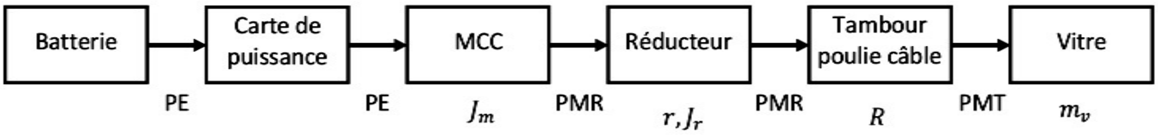
## Moment d'inertie équivalent

On s'intéresse à la vitre à motorisation électrique d'une automobile. La chaîne de puissance considérée est ci-dessous.




$\{\mathcal{V}_{m/0}\}_A=\begin{Bmatrix}\omega_{m/0}.\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$ Torseur cinématique du moment à courant continu ;

$\{\mathcal{V}_{r/0}\}_A=\begin{Bmatrix}\omega_{r/0}.\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$ Torseur cinématique du réducteur

$\{\mathcal{V}_{v/0}\}_A=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ V_v.\vec{z}\end{Bmatrix}_A$ Torseur cinématique de la vitre

Avec $\omega_r=r\omega_m$ et $V_v=R\omega_r$

On associe un repère 0 au châssis, un repère 1 au rotor du moteur, un repère 2 à l'arbre de sortie du réducteur et au tambour, un repère 3 à la vitre.On isole l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au châssis $\Sigma=\{1,2,3\}$.

Le terme $J_{eq}$ est appelé moment d'inertie équivalent des solides en mouvement ramené sur l'axe moteur.
L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

## Dynamique des solides

### Principe fondamental de la dynamique

Le PFD permet d'établir une relation entre les actions mécaniques qui sont appliquées à un solide ou un ensemble de solides et les mouvements qui en résultent selon toutes les directions de l'espace.
Il existe au moins un référentiel galiléen $R_g$ tel que pour tout ensemble matériel $\sum$ et à chaque instant t, le **torseur dynamique** associé au mouvement de ce système par rapport à ce repère est égal au **torseur des actions mécaniques extérieures** exercées sur $\sum$.

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}(\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}_A=\left\{\mathcal{D}(\Sigma/R_g)\right\}_A\Leftrightarrow\Sigma_i\begin{Bmatrix}\vec{F}_{ext_i\rightarrow\Sigma}\\ \vec{M}_{A,F_{ext_i}\rightarrow\Sigma}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}m.\vec{a}_{G\in\Sigma/R_g}\\ \vec{\delta}_{A\in\Sigma/R_g}\end{Bmatrix}}$$

On a une équation torsorielle, soit 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.

Théorème de la Résultante Dynamique (TRD) :

$$\boxed{\sum_i\vec{F}_{ext_i\rightarrow\Sigma}=m.\vec{a}_{G\in\Sigma/R_g}}$$

Théorème du Moment Dynamique (TMD) au point A :

$$\boxed{\sum_i\vec{M}_{A,\vec{F}_{ext_i}}=\vec{\delta}_{A\in\Sigma/R_g}}$$

Le PFD est une égalité entre les quantités d'accélération et les actions mécaniques extérieures. Les 6 équations scalaires obtenues sont à mettre en relation avec les 6 ddl dans l'espace géométrique de dimension 3.

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus, on détermine les mouvements et on peut dimensionner les actionneurs (moteurs, vérins, ...).
- Les mouvements sont connus, on détermine les efforts et on peut dimensionner les pièces soumises à des accélérations (bielles, suspensions, structures, ...).

  Les conséquences de ce principe sont nombreu*ses.*

## Principe des actions réciproques (PAM)

Soient 2 systèmes matériels quelconques $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ disjoints. Le torseur des actions mécaniques exercées par 1→2 est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par 2→1.

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\Sigma_1\rightarrow\Sigma_2)\}_A=-\{\mathcal{T}(\Sigma_2\rightarrow\Sigma_1)\}_A}$$

## Principe fondamental de la statique

On appelle équilibre un mouvement nul. Si un solide S est à l'équilibre par rapport à un référentiel Galiléen alors la somme des torseurs des actions mécaniques du milieu extérieur sur S est nulle.

$$\boxed{\sum_i\{\mathcal{T}(\bar{\Sigma}_i\rightarrow\Sigma)\}_A=\{0\}_A}$$

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de 2 équations vectorielles :

| | |
|---|---|
| Théorème de la Résultante Statique (TRS) : | $\sum_i \vec{F}_{ext_i\rightarrow\Sigma}=\vec{0}$ |
| Théorème du Moment Statique (TMS) au point A : | $\sum_i \vec{M}_{A,\vec{F}_{ext_i}}=\vec{0}$ |

## Puissance

Puissance d'une action mécanique.

On appelle puissance de l'action mécanique 2→1 dans le mouvement 1/R la quantité scalaire somme des puissances élémentaires développées au niveau de chacun des points du solide considéré $S_1$

$$P_{2\rightarrow 1/R}=\int_{S_1}\vec{f}_{2\rightarrow 1}(P)\cdot\vec{V}_{P\in 1/R}dm$$

Son unité est le Watt [W].

Pour un solide indéformable, On appelle puissance de l'action mécanique 2→1 dans le mouvement 1/R la quantité scalaire obtenue par comoment du torseur associé à l'action mécanique 2→ 1 et du torseur cinématique associé au mouvement 1/R.

$$\boxed{P_{2\rightarrow 1/R}=\{\mathcal{T}_{2\rightarrow 1}\}_A\otimes\{\mathcal{V}_{1/R}\}_A}$$

Le comoment se calcule simplement de la façon suivante :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{2\rightarrow 1}\}_A\otimes\{\mathcal{V}_{1/R}\}_A=\begin{Bmatrix}\vec{F}_{2\rightarrow 1}\\ \vec{M}_{A,\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}}\end{Bmatrix}_A\otimes\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{1/R}\\ \vec{V}_{A\in 1/R}\end{Bmatrix}_A=\vec{F}_{2\rightarrow 1}.\vec{V}_{A\in 1/R}+\vec{M}_{A,\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}}.\vec{\Omega}_{1/R}}$$

On parle de puissance galiléenne lorsque le mouvement est exprimé par rapport à $R_g$.

## Puissance des interefforts

Soit 2 solides indéformables $S_1$ et $S_2$.

On appelle puissance des interefforts la puissance de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 dans leur mouvement relatif 2/1.

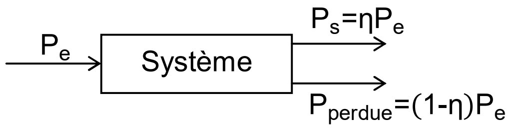
$$\boxed{P_{2\leftrightarrow 1/R}=\{\mathcal{T}_{2\rightarrow 1}\}_A\otimes\{\mathcal{V}_{1/2}\}_A=\{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\}_A\otimes\{\mathcal{V}_{2/1}\}_A}$$

## Rendement

On définit le rendement d'un système comme étant :

$$\boxed{\eta=\left|\frac{P_s}{P_e}\right|}.$$

$P_e$ est la puissance d'entrée, $P_s$ la puissance de sortie
La puissance perdue est donc de $P_{perdue}=(1-\eta)P_e$
Exemple en régime permanent :




## Puissance des interefforts de liaison

Si la puissance dissipée au niveau d'une liaison est nulle alors

$$P_{1\leftrightarrow 2}=0$$

Si une liaison est parfaite alors le mouvement est sans pertes $P_{1\leftrightarrow 2}=0$.
Si on néglige le frottement dans un contact par glissement, on a un modèle de liaison parfaite.
Si on néglige la résistance au roulement dans un contact par roulement, on a un modèle de liaison parfaite.

## Théorème de l'énergie cinétique (TEC).

Le Théorème de l'Energie Cinétique permet de déterminer l'équation du mouvement. Elle est déduite du PFD, ce n'est pas une équation supplémentaire.

Il est pertinent d'utiliser le TEC lorsque l'on étudie un système ayant une seule mobilité utile.

Contrairement au PFD, une action mécanique qui ne travaille pas ne peut pas être déterminée avec le TPC.

### Pour 1 solide

Pour un solide indéformable unique , la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{dE_c S/R_g}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R_g}$$

### Pour 2 solides

Pour un système matériel Σ formé de 2 solides indéformables 1 et 2 , la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts entre 1 et 2 .

$$\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/R_g} + P_{1\leftrightarrow 2}$$

### Pour n solides

Pour un système matériel Σ formé de n solides indéformables, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts qu'on appelle aussi les puissances intérieures.

$$\boxed{\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = \underbrace{P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/R_g}}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P_{S_i\leftrightarrow S_j}}_{P_{int}}}$$

Par exemple pour n=3:$P_{int} = P_{S_1\leftrightarrow S_2} + P_{S_1\leftrightarrow S_3} + P_{S_2\leftrightarrow S_3}$