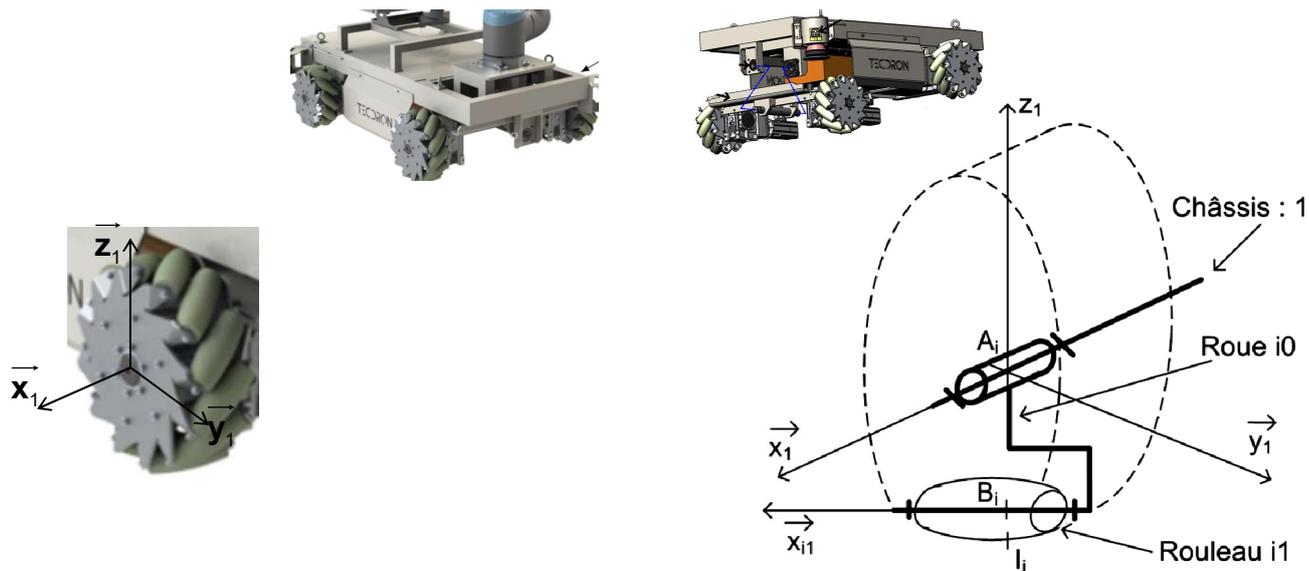


Exercice 1 : Etude dynamique de la base TC200

Etude d'une base roulante de robot, propulsé par des roues « mecanum ».



La figure 1 donne le modèle de contact d'une roue sur le sol. Par hypothèse, la liaison pivot entre un rouleau i1 et une roue i0 d'axe  $(B_i, \vec{x}_{i1})$  est supposée sans frottement. La liaison sphère plan en  $I_i$  de normale  $\vec{z}$  avec

frottement entre le rouleau et le sol permet d'écrire le torseur d'action mécanique  $\left\{ \mathbf{F}_{\text{sol} \rightarrow i} \right\}_{I_i} = \begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ Z_i & 0 \end{Bmatrix}_{I_i, \vec{x}_{i1}, \vec{y}_{i1}, \vec{z}_{i1}}$

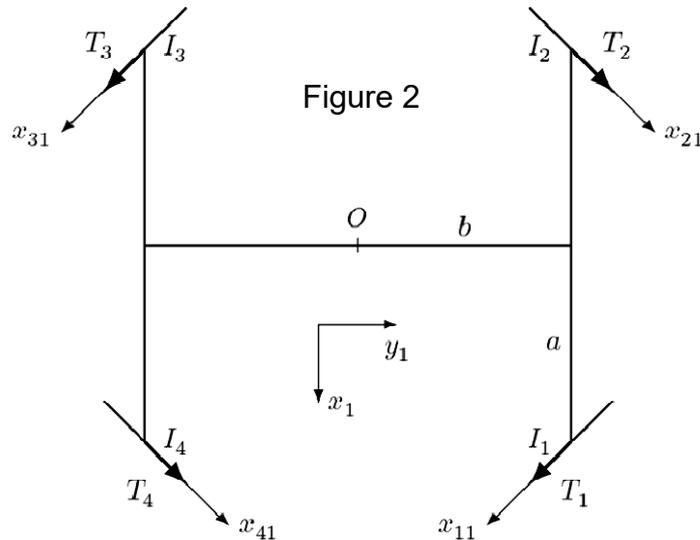
On a par ailleurs  $\vec{I_i B_i} = \mathbf{r} \cdot \vec{z}$  et  $\vec{\Omega}_{\text{rouleau/sol}} = \beta_i \cdot \vec{x}_{i1}$   $\vec{I_i A_i} = (\mathbf{r} + \mathbf{R}) \cdot \vec{z}$

Paramètres	Notations
Position de consigne du point $O$ par rapport au sol	$(x_c(t), y_c(t))$ dans $(x_0, y_0)$
Vitesse de consigne du point $O$ par rapport au sol	$V_{c1/0}(O) = V_{xc}(t)x_0 + V_{yc}(t)y_0$
Vitesses de rotation de consigne des roues par rapport au châssis	$\omega_{10c}(t), \omega_{20c}(t), \omega_{30c}(t), \omega_{40c}(t)$
Position réelle du point $O$ par rapport au sol	$(x(t), y(t))$ dans $(x_0, y_0)$
Vitesse réelle du point $O$ par rapport au sol	$V_{1/0}(O) = V_x(t)x_1 + V_y(t)y_1$
Vitesses de rotation réelles des roues par rapport au châssis	$\omega_{10}(t), \omega_{20}(t), \omega_{30}(t), \omega_{40}(t)$
Angle de rotation réel du robot par rapport au sol	$(x_0, x_1) = (y_0, y_1) = \theta, z_0 = z_1$
Vitesse de rotation réelle du robot par rapport au sol	$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}z_1 = \omega z_1$

Q 1. En considérant que le rouleau i1 est sans masse ni inertie, justifier que le torseur d'actions mécaniques du sol sur le rouleau se simplifie sous la forme

$$\left\{ \mathbf{F}_{\text{sol} \rightarrow i} \right\}_{I_i} = \begin{Bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \\ N_i & 0 \end{Bmatrix}_{I_i, \vec{x}_{i1}, \vec{y}_{i1}, \vec{z}_{i1}}$$

Cette propriété permet de proposer la figure 2 dans laquelle seules les composantes tangentielles des actions mécaniques du sol sur les rouleaux sont représentées. Pour chaque rouleau  $i1$ , le paramétrage permet d'écrire  $(\vec{x}_1, \vec{x}_{i1}) = (\vec{y}_1, \vec{y}_{i1}) = \alpha_{i1}$  avec  $\alpha_{11} = \alpha_{31} = -45^\circ$  et  $\alpha_{21} = \alpha_{41} = 45^\circ$ . La notation utilisée pour la suite est  $\vec{T}_1 = T_1 \vec{x}_{11}$ . Compte tenu de la commande particulière étudiée, les moteurs sont commandés par paire, ce qui permet de faire les hypothèses  $T_1 = T_3 = T$  et  $T_2 = T_4 = T'$ .



On donne  $\vec{V}_{\text{base/sol}} = V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1$

**Q 2.** En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique à la base TC200 (châssis + essieu avant + motorisations), notée S, de masse M, supposée en translation, déterminer les équations faisant intervenir les composantes tangentielles des actions mécaniques du sol sur les rouleaux, les paramètres du mouvement  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$  et leurs dérivées.

**Q 3.** En déduire les expressions de T et de T' en fonction de M,  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$  et leurs dérivées.

Paramètres	Notations
Couple électromagnétique exercé sur le rotor du moteur de la motorisation $i$	$c_{emi}(t)$
Vitesse de rotation du moteur de la motorisation $i$	$\omega_{mi}(t)$
Couple exercé par le réducteur sur la roue $i0$ de la motorisation $i$	$c_{ri}(t)$
Couple exercé par la roue sur le motoréducteur de la motorisation $i$ , ramené sur l'arbre d'entrée du réducteur, en supposant le réducteur sans pertes	$c_{redi}(t) = -\frac{c_{ri}(t)}{k}$
Couple de frottement sec exercé sur le rotor du moteur de la motorisation $i$	$-C_{fi}$
Rapport de réduction du réducteur	$k = \frac{\omega_{mi}(t)}{\omega_{i0}(t)} = 32$
Moment d'inertie de l'ensemble du motoréducteur équilibré (rotor du moteur et réducteur ramené sur l'arbre d'entrée) autour de l'axe de rotation du moteur	$J_m + J_{red}$
Moment d'inertie de la roue équilibrée autour de son axe de rotation ( $A_i$ est le centre de gravité de la roue $i0$ )	$J_{roue}$
En dehors du frottement sec sur le rotor moteur, toutes les liaisons pivot sont parfaites.	

**Q 4.** Donner le nom du théorème à appliquer (à quel solide, en quel point et en projection selon quel axe) pour obtenir la relation (III.1). Exprimer le paramètre  $\rho_i$  en fonction de  $r+R$  et de  $\alpha_{i1}$ .

$$\mathbf{J}_{\text{roue}} \cdot \frac{d\omega_{i0}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{c}_{ri}(\mathbf{t}) + \rho_i \mathbf{T}_i \quad (\text{III.1})$$

L'application du théorème de la dynamique à l'ensemble du motoréducteur permet d'obtenir la relation

$$(\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_{\text{red}}) \cdot \frac{d\omega_{mi}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{c}_{emi}(\mathbf{t}) + \mathbf{c}_{redi}(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_{fi} \quad (\text{III.2})$$

**Q 5.** En utilisant les relations (III.1) et (III.2), montrer que le modèle dynamique pour chaque motorisation s'écrit sous la forme de la relation (III.3). Exprimer les constantes  $\delta_i$  et  $J$  en fonction des données.

$$\mathbf{J} \cdot \frac{d\omega_{mi}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{c}_{emi}(\mathbf{t}) + \delta_i \cdot \mathbf{T}_i - \mathbf{C}_{fi} \quad (\text{III.3})$$

On rappelle les relations I.1  $\omega_{10}(\mathbf{t}) = \omega_{30}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{V}_x(\mathbf{t}) - \mathbf{V}_y(\mathbf{t})}{(r + R)}$   $\omega_{20}(\mathbf{t}) = \omega_{40}(\mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{V}_x(\mathbf{t}) + \mathbf{V}_y(\mathbf{t})}{(r + R)}$

**Q 6.** En utilisant les expressions obtenues à la question 3 et les relations (I.1), montrer que la relation (III.3) se met sous la forme de la relation (III.4). Expliciter la valeur de  $J_{\text{eq}}$  en fonction de  $J$ ,  $M$  et des paramètres  $r$ ,  $R$  et  $k$ .

$$\mathbf{J}_{\text{eq}} \cdot \frac{d\omega_{mi}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{c}_{emi}(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_{fi} \quad (\text{III.4})$$

Exercice 2 Système élévateur électrique

Un élévateur est constitué d'un chariot mobile (1), d'un coulisseau (3) solidaire du plateau et d'un ensemble {rotor,vis} (2), l'écrou en B est solidaire du coulisseau (3).

La position du plateau est repérée par  $AB=y$  et la position angulaire du rotor par rapport au stator par l'angle  $\theta=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$

Les liaisons sont sans frottement.

Le mécanisme évolue dans le plan vertical  $(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$  en considérant le chariot **fixe** par rapport au sol.



**Données**

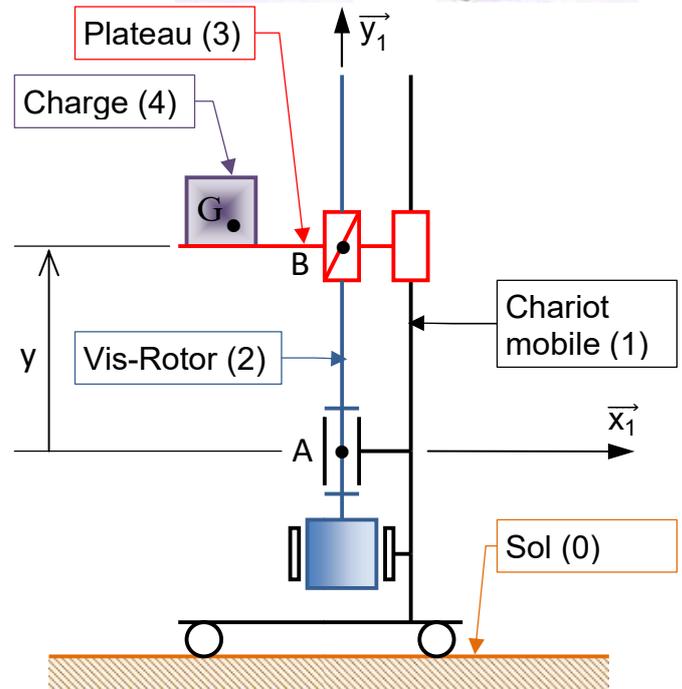
Vis-Rotor (2) : masse  $m_2$ , centre d'inertie  $G_2$ ,

$$[I_{A,2}] = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$$

Plateau(3) et charge (4) :  
masse  $m$ , centre d'inertie  $G$ ,

$$[I_{G,\{3,4\}}] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

L'action motrice du stator sur le rotor est modélisée par un couple  $C_m$  porté par  $\vec{y}_1$ .



L'ensemble {rotor,vis} (2) admet une symétrie matérielle de révolution d'axe  $(A,\vec{y}_1)$ .

**Question 1 :** Simplifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble {rotor,vis} (2) .

On note  $p$  le pas du système vis-écrou (en mètre) qui représente l'avance axiale relative pour un tour de rotation relative entre la vis et l'écrou. On considère  $p$  positif pour une hélice à droite.

**Question 2 :** En fonction de  $p$ , exprimer le pas réduit de l'hélice qui représente l'avance axiale relative pour un radian de rotation relative entre la vis et l'écrou. Ecrire le torseur cinématique  $\{\mathcal{O}_{3/2}\}$  relatif à la liaison glissière hélicoïdale à partir de la notation

$$\text{générique } \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{32_x} & v_{32_x} \\ \omega_{32_y} & v_{32_y} \\ \omega_{32_z} & v_{32_z} \end{array} \right\}_{P \in (\overline{B, y_1})} .$$

**Question 3 :** Par composition des vecteurs rotations, identifier  $\omega_{32_y}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ . Par composition des vecteurs vitesse en B, identifier  $v_{32_y}$  en fonction de  $\dot{y}$ . En déduire l'expression de  $\dot{y}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ .

**Question 4 :** Isoler l'ensemble (2) et modéliser chaque action mécanique extérieure par un torseur.

**Question 5 :** Parmi les 6 relations scalaires issues du PFD appliqué à (2), laquelle est utile pour exprimer la relation entre le couple moteur  $C_m$  et l'effort axial exercé par l'écrou sur la vis ? Exprimer en conséquence les éléments utiles du torseur dynamique  $\{\mathcal{D}_{2/1}\}$  et résoudre.

**Question 6 :** Isoler l'ensemble {3,4} et modéliser chaque action mécanique par un torseur.

**Question 7 :** Parmi les 6 relations scalaires issues du PFD appliqué à {3,4}, laquelle est utile pour exprimer l'effort axial vis/écrou ? Exprimer en conséquence les éléments utiles du torseur dynamique  $\{\mathcal{D}_{\{3,4\}/1}\}$  et résoudre. Donner alors l'expression de  $C_m$  avec  $p=1 \text{ mm}$ ,  $m=250 \text{ kg}$ ,  $g=9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $B_2=1,25 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$ ,  $\ddot{\theta}=314 \text{ rad.s}^{-2}$ .