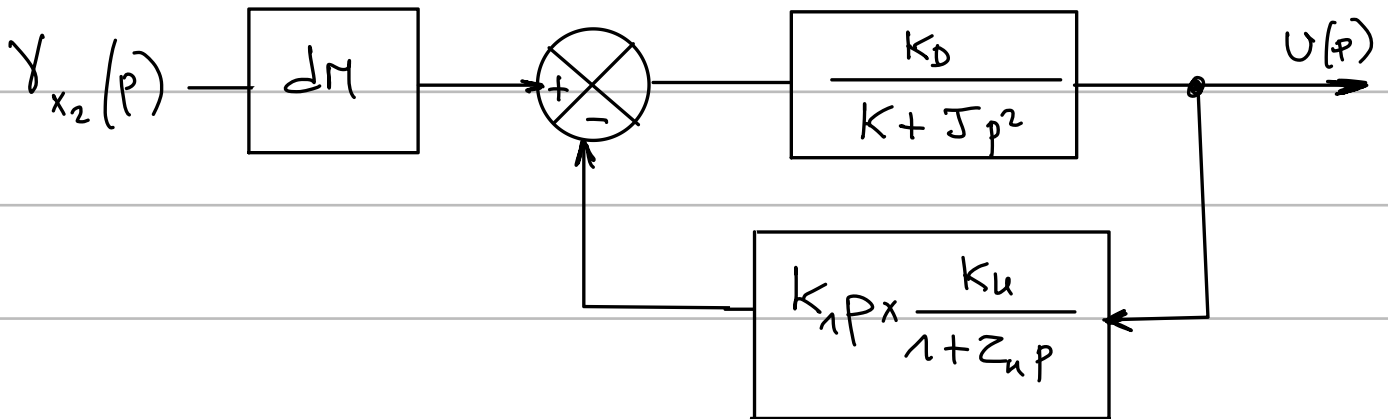


S11 MP Correction du DM de Noël 2024

Q1: On redessine le schéma bloc avec $U_c(p)=0$



En appliquant la formule de Black cela donne :

$$\frac{U(p)}{Y_{x2}(p)} = dM \times \frac{\frac{K_D}{K + J p^2}}{1 + \frac{K_D}{K + J p^2} \times \frac{K_1 K_u p}{1 + z_u p}} = dM \frac{K_D (1 + z_u p)}{(K + J p^2)(1 + z_u p) + K_1 K_u p K_D}$$

$$\frac{U(p)}{Y_{x2}(p)} = \frac{dM K_D (1 + z_u p)}{K + (K z_u + K_1 K_u K_D) p + J p^2 + J z_u p^3}$$

$$H_y(p) = \frac{dM K_D}{K} \cdot \frac{1 + z_u p}{1 + \left(z_u + \frac{K_1 K_u K_D}{K}\right) p + \frac{J}{K} p^2 + \frac{J z_u}{K} p^3}$$

on a alors $K_{HF} = \frac{dM K_D}{K}$ $a_1 = z_u$ $b_1 = \left(z_u + \frac{K_1 K_u K_D}{K}\right)$

$b_2 = \frac{J}{K}$ et $b_3 = \frac{J z_u}{K}$

Q2: Les pôles p_1, p_2 et p_3 sont à partie réelle négative $\forall K_1$
la chose de la fonction de transfert est 0, la fonction
de transfert correspond à un comportement stable.

Pour $K_1 = 0,05$ on a une résonance ce qui ne répond
pas au Cdc, c'est $K_1 = 0,5$ qui donne la bande
passante à -3dB la plus grande, même si la condition
d'amplification de 10dB jusqu'à 3 rad/s n'est pas
vérifiée.

Q3 Pour $K_1 = 0,5$ $p_1 = -1000$ $p_2 = -0,64$ $p_3 = -9,32$

le dénominateur de $H_Y(p)$ peut se mettre
sous la forme $(1 + z_1 p)(1 + z_2 p)(1 + z_3 p)$ par
analogie à un système du second ordre non
oscillant. on a alors $p_1 = -\frac{1}{z_1}$ $p_2 = -\frac{1}{z_2}$ $p_3 = -\frac{1}{z_3}$
on rappelle que les pôles sont les valeurs de p qui
annulent le dénominateur

$H_Y(p)$ peut donc s'écrire $K_{HF} \frac{(1 + z_H p)}{(1 + z_1 p)(1 + z_2 p)(1 + z_3 p)}$

avec $z_1 = -\frac{1}{p_1}$ $z_2 = -\frac{1}{p_2}$ et $z_3 = -\frac{1}{p_3}$

la table 4 donne $z_H = 0,001$ et $p_1 = -1000$ d'où $z_1 = 0,001$

$$\text{Alors } H_r(p) = K_{uf} \frac{(1 + 0,001p)}{(1 + 0,001p)(1 + z_2p)(1 + z_3p)}$$

$$\text{il reste } H_r(p) = \frac{dM K_0}{k} \times \frac{1}{(1 + z_2p)(1 + z_3p)}$$

$$\text{avec } z_2 = -\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{-0,64} = 1,56 \text{ s et } z_3 = -\frac{1}{p_3} = -\frac{1}{-9,32} = 0,11$$

$$z_3 \gg z_2$$

Q4: Le gain n'est pas unitaire donc la précision n'est pas assurée, de même l'amplification à 110 dB, n'est pas effective jusqu'à 3 rad/s. (à 3 rad/s on a une amplification de 100 dB)

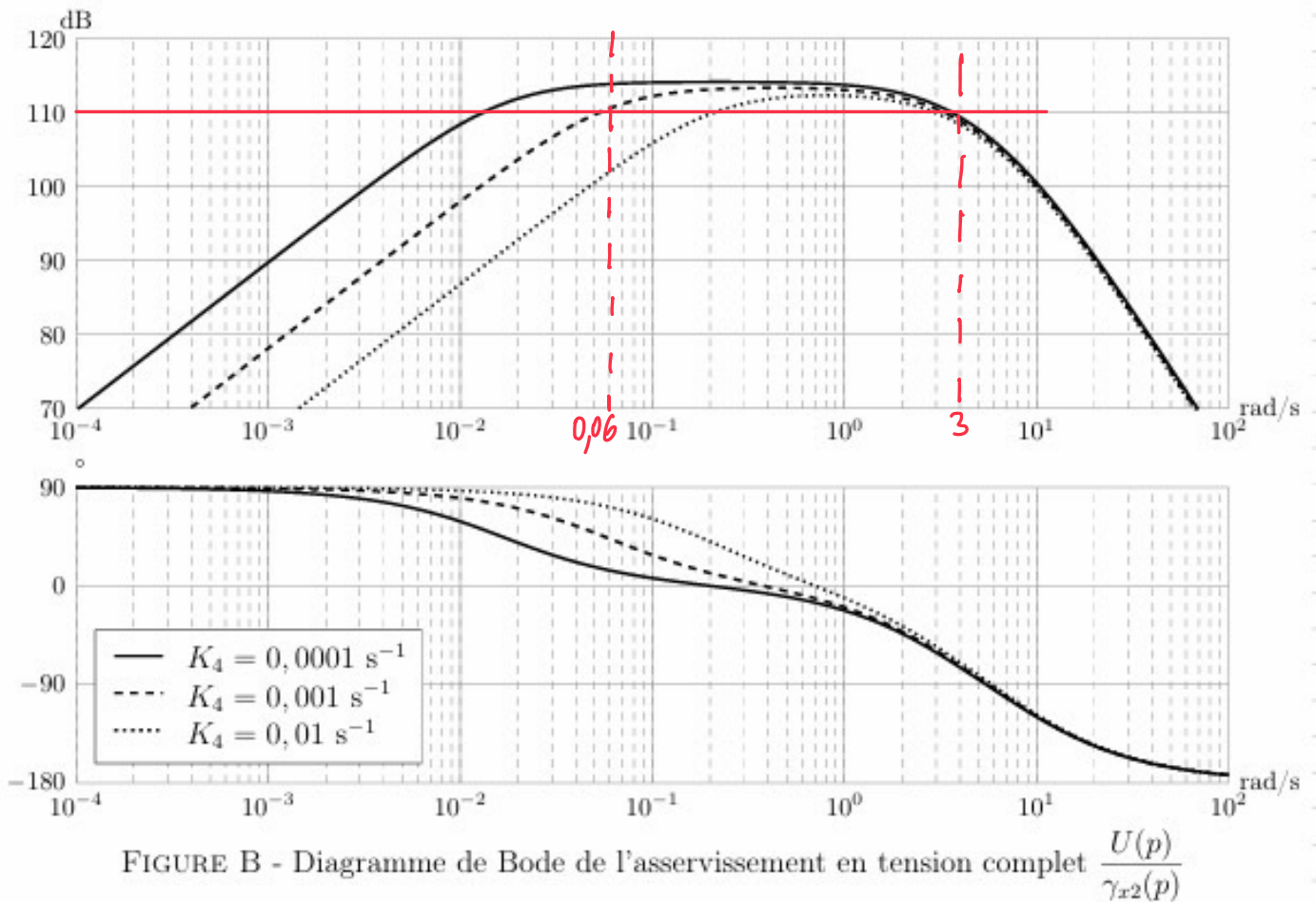
Q5 Le correcteur intégral placé avant la perturbation, rend le système insensible à la perturbation. (erreur statique nulle sous l'effet d'une accélération).

$$\text{Q6: } H_{B0}(p) = \frac{K_4(1 + z_4p)}{p} \times \frac{K_B}{1 + z_Bp} \times \frac{K_D}{k(1 + z_2p)(1 + z_3p)}$$

on choisit z_4 tel qu'il permette de simplifier l'expression et de compenser le pôle dominant qui est ici p_2

On rappelle que le pôle dominant correspond à la constante de temps la plus grande on prendra donc $z_4 = z_2$

Q7:

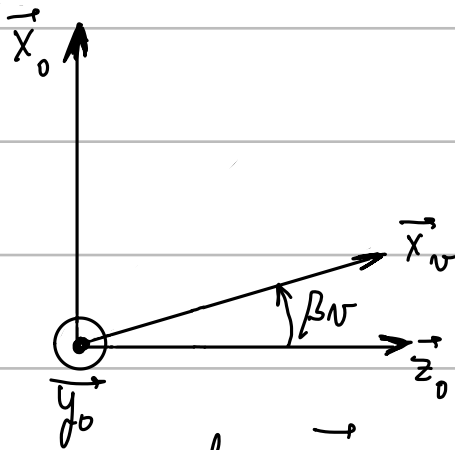
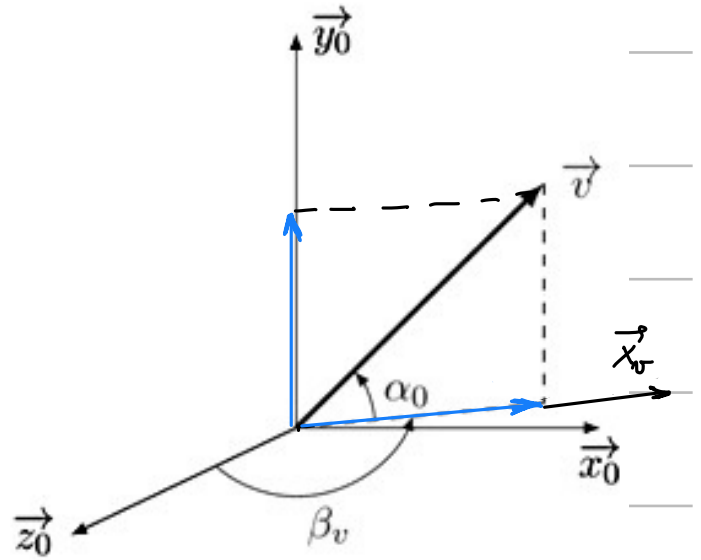
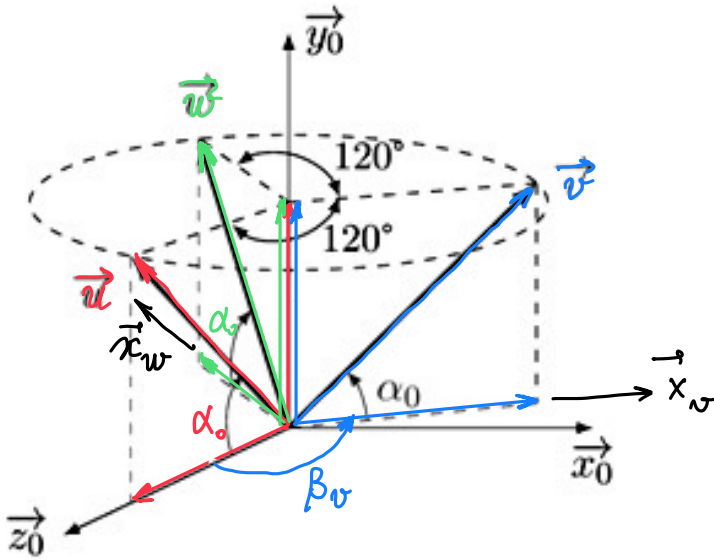


l'amplification de 110 dB entre 0,06 et 3 rad/s est respectée
par les valeurs $K_4 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et $K_4 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

la limite de 120 dB est respectée par les 3 valeurs.

Q8 Il s'agit d'un filtre passe-bande qui écarte les perturbations
de BF (dilatation thermique par exemple) et de haute fréquence
mouvements dus au vent par exemple.

Q9: La matrice P donne la relation entre les accélérations selon les directions $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des accélérations sur les axes $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$



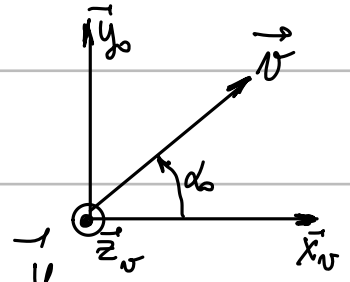
Appelons $\vec{x}_v$ le vecteur directeur de la projection orthogonal de $\vec{v}$ sur le plan $(\vec{x}_0; \vec{z}_0)$

$$\text{alors } \vec{x}_v = \cos \beta_v \vec{z}_0 + \sin \beta_v \vec{x}_0$$

$$\text{or } \vec{v} = \cos \alpha_0 \vec{x}_v + \sin \alpha_0 \vec{y}_0$$

$$= \cos \alpha_0 (\cos \beta_v \vec{z}_0 + \sin \beta_v \vec{x}_0) + \sin \alpha_0 \vec{y}_0$$

$$\vec{v} = \cos \alpha_0 \sin \beta_v \vec{x}_0 + \sin \alpha_0 \vec{y}_0 + \cos \alpha_0 \cos \beta_v \vec{z}_0$$



de même il vient avec le même type de calcul :

$$\vec{u} = \cos \alpha_u \sin \beta_u \vec{x}_0 + \sin \alpha_u \vec{y}_0 + \cos \alpha_u \cos \beta_u \vec{z}_0$$

$$\vec{w} = \cos \alpha_w \sin \beta_w \vec{x}_0 + \sin \alpha_w \vec{y}_0 + \cos \alpha_w \cos \beta_w \vec{z}_0$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \sin \beta_u & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_u \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_v & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_v \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_w & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_w \end{pmatrix}$$

Q10: D'où l'application numérique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & -\frac{1}{2} \cos \alpha_0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & -\frac{1}{2} \cos \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Q11: On rappelle que $\begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma_{u_0} \\ \gamma_{v_0} \\ \gamma_{w_0} \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix}$

d'où $\gamma_{x_0}^* = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} (\gamma_v + \varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} (\gamma_w + \varepsilon)$

$$\gamma_{y_0}^* = \frac{1}{3 \sin \alpha_0} (\gamma_u + \varepsilon + \gamma_v + \varepsilon + \gamma_w + \varepsilon)$$

$$\gamma_{z_0}^* = \frac{1}{3 \cos \alpha_0} (2(\gamma_u + \varepsilon) - (\gamma_v + \varepsilon) - (\gamma_w + \varepsilon))$$

Il reste :

$$\gamma_{x_0}^* = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} (\gamma_u - \gamma_w)$$

$$\gamma_{y_0}^* = \frac{1}{\sin \alpha_0} \left(\frac{\gamma_u + \gamma_v + \gamma_w}{3} + \varepsilon \right)$$

$$\gamma_{z_0}^* = \frac{1}{3 \cos \alpha_0} (2\gamma_u - \gamma_v - \gamma_w)$$

$$\text{on a } \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = \underbrace{P^{-1} P}_I \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} & -\frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} \\ \frac{1}{3 \sin \alpha_0} & \frac{1}{3 \sin \alpha_0} & \frac{1}{3 \sin \alpha_0} \\ \frac{2}{3 \cos \alpha_0} & -\frac{1}{3 \cos \alpha_0} & -\frac{1}{3 \cos \alpha_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \gamma_{x_0}^* = \gamma_{x_0} \quad \gamma_{y_0}^* = \gamma_{y_0} + \frac{\varepsilon}{\sin \alpha_0} \quad \gamma_{z_0}^* = \gamma_{z_0}$$

Seule la composante de l'accélération verticale est affectée

Q12: Il faudrait avoir mathématiquement $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ pour minimiser l'effet du bruit sur l'accélération sur $\vec{y}_0$
Ce qui pratiquement n'est pas réalisable.

Q13: $\vec{V}_{E2/sol} = \vec{V}_{O_{E2}/sol} + \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{2/sol} = \vec{V}_{O_{E2}/sol} + \vec{IO}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/sol})$

La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\vec{V}_{E2/sol} = \vec{0} = \vec{V}_{O_{E2}/1} + \vec{V}_{O_{E1}/sol} + \left(R\vec{Y}_1 + \frac{L}{2}\vec{Z}_1 \right) \wedge \left(\omega_{21}\vec{Z}_1 + \omega_{10}\vec{Y}_1 \right)$$

$\stackrel{||}{\vec{0}}$

$$\vec{0} = V(t)\vec{X}_1 + R\omega_{21}\vec{X}_1 - \frac{L}{2}\omega_{10}\vec{X}_1$$

on a l'égalité scalaire: $V(t) = \frac{L}{2}\omega_{10} - R\omega_{21}$

Q14: Avec un raisonnement identique on a :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= V(t)\vec{X}_1 + \left(R\vec{Y}_1 - \frac{L}{2}\vec{Z}_1 \right) \wedge \left(\omega_{31}\vec{Z}_1 + \omega_{10}\vec{Y}_1 \right) \\ &= V(t)\vec{X}_1 + R\omega_{31}\vec{X}_1 + \frac{L}{2}\omega_{10}\vec{X}_1 \end{aligned}$$

ce qui donne $V(t) = - \left(R\omega_{31} + \frac{L}{2}\omega_{10} \right)$

Q15: D'après les questions 13 et 14 on a :

$$\frac{L}{2}\omega_{10} - R\omega_{21} = - \left(R\omega_{31} + \frac{L}{2}\omega_{10} \right)$$

$$L\omega_{10} = R(\omega_{21} - \omega_{31})$$

Q16: Si la trajectoire est rectiligne alors $\omega_{10} = 0$

$$\Rightarrow 0 = R(\omega_{21} - \omega_{31}) \Rightarrow \omega_{21} = \omega_{31}$$

Alors $|V(t)| = + R \omega_{31} \Rightarrow \omega_{31} = \omega_{\text{moy}} = \frac{v(t)}{R}$

A.N. $\omega_{\text{moy}} = \frac{2}{0,02} = \frac{1}{0,01} = \underline{100 \text{ rad/s}}$

Q17: On a la relation $L \omega_{10} = R (\omega_{21} - \omega_{31})$
 en la dérivant par rapport au temps on obtient

$$L \dot{\omega}_{10} = R (\dot{\omega}_{21} - \dot{\omega}_{31})$$

Si $\dot{\omega}_{31} = -\dot{\omega}_{21}$ on a $L \dot{\omega}_{10} = R \times 2 \times \dot{\omega}_{21}$

d'où $\dot{\omega}_{10} = \frac{2R}{L} \dot{\omega}_{21}$

Q18: $t_1 = 0$ $\gamma_{10} = \text{constante} = \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{t_2}$

d'où $t_2 = \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{\gamma_{10}}$ (phase 1 d'accélération constante)

de plus $-\gamma_{10} = \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{t_3 - t_4}$ (phase 3 de décélération constante)

d'où $t_4 - t_3 = \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{\gamma_{10}} = t_2$

On sait par ailleurs d'entre t_1 et t_4 $\theta_{10} = +\frac{\pi}{2}$

$$\theta_{10} = \int_{t_1}^{t_4} \omega_{10}(t) dt = \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{2} \times t_2 + \omega_{10 \text{ max}} (t_3 - t_2) + \frac{\omega_{10 \text{ max}}}{2} t_2$$

$$\frac{\pi}{2} = \omega_{10 \text{ max}} t_2 + \omega_{10 \text{ max}} (t_3 - t_2)$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2 \omega_{\max}}$$

Q19: Plus ω_0 est importante et plus le rayon de courbure est petit, dans tous les cas le robot tourne bien de 90° vers la gauche.

Q20: L'ensemble se déplace verticalement à la vitesse $\dot{x}_G = \dot{y}_G$

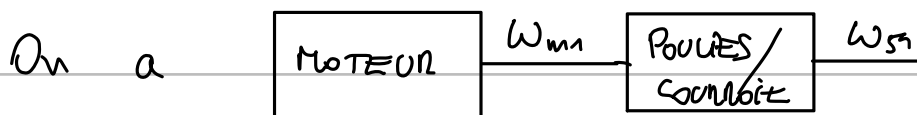
$$\text{d'où } E_{c_s} = \frac{1}{2} m_s \dot{y}_G^2$$

$$E_{c_4} = E_{c_4'} = \frac{1}{2} J_m \omega_{m1}^2$$

$$E_{c_5} = E_{c_5'} = \frac{1}{2} J_f \omega_{f1}^2$$

$$E_c = E_{c_s} + 2E_{c_4} + 2E_{c_5} = \frac{1}{2} \left(m_s \dot{y}_G^2 + 2 J_m \omega_{m1}^2 + 2 J_f \omega_{f1}^2 \right)$$

Q21:



$$\frac{\omega_{f1}}{\omega_{m1}} = \frac{R_m}{R_r} \quad \left(\text{transmission du système poulies/courroie} \right)$$

Si on suppose un RSG entre le pignon et la chaîne, on a

$$\theta_a = -R_p \omega_{f1} = -R_p \times \frac{R_m}{R_r} \omega_{m1}$$

Q22: Dans l'expression de la Q20 cela donne :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(m_s \left(\frac{R_p R_m}{R_r} \right)^2 \omega_{m1}^2 + 2 J_m \omega_{m1}^2 + \frac{2 R_m^2}{R_r^2} J_f \omega_{m1}^2 \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(m_s \frac{R_p^2 R_m^2}{R_r^2} + 2J_m + \frac{2R_m^2 J_s}{R_r^2} \right) \omega_{m1}^2 = J_{eq}$$

Q23: P_{int} : les puissances des liaisons mécanique sont nulles (liaisons parfaites)

$$P_{moteur} + P_{frottement} \quad \text{on a } C_f = C_f^i$$

$$2\omega_{m1} C_m - 2\omega_{s1} C_f = 2\omega_{m1} \left(C_m - \frac{R_m}{R_r} C_f \right)$$

$$P_{ext}: \underbrace{P_{pignon/chaîn}} + P_{pesanteur} = 0 \text{ (RSG)}$$

$$P_{pesanteur} = \begin{Bmatrix} -m_s g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{y}_G \vec{y}_0 \end{Bmatrix} = -m_s g \dot{y}_G$$

$$\text{d'où } P_{pesanteur} = -m_s g x - R_p \times \frac{R_m}{R_r} \omega_{m1}$$

$$\text{d'où } P_{totale} = 2\omega_{m1} \left(C_m - \frac{R_m}{R_r} C_f \right) + \frac{m_s g R_p R_m}{R_r} \omega_{m1}$$

Q24 En appliquant le théorème de l'Energie Cinétique à S on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{eq} \omega_{m1}^2 \right) = \omega_{m1} \left(2 \left(C_m - \frac{R_m}{R_r} C_f \right) + \frac{m_s g R_p R_m}{R_r} \right)$$

$$\text{d'où } J_{eq} \cancel{\omega_{m1}} \times \dot{\omega}_{m1} = \cancel{\omega_{m1}} \left(2 \left(C_m - \frac{R_m}{R_r} C_f \right) + \frac{m_s g R_p R_m}{R_r} \right)$$

$$\text{Alors } \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\omega}_{m1} - \frac{m_s g R_p R_m}{2 R_z} + \frac{R_m}{R_z} C_f = C_m$$

Q25: On a $V_a = -R_p \times \frac{R_m}{R_z} \omega_{m1}$ or $R_m = R_z$

donc $V_a = -R_p \omega_{m1} \Rightarrow \omega_{m1} = -\frac{V_a}{R_p}$

A.N. $\omega_{m1 \max} = -\frac{2}{0,038} = -52,63 \text{ rad.s}^{-1}$

entre 0 et t_1 $\dot{\omega}_{m1} = \frac{\omega_{m1 \max}}{t_1} = -\frac{52,63}{2} = -26,3 \text{ rad.s}^{-2}$

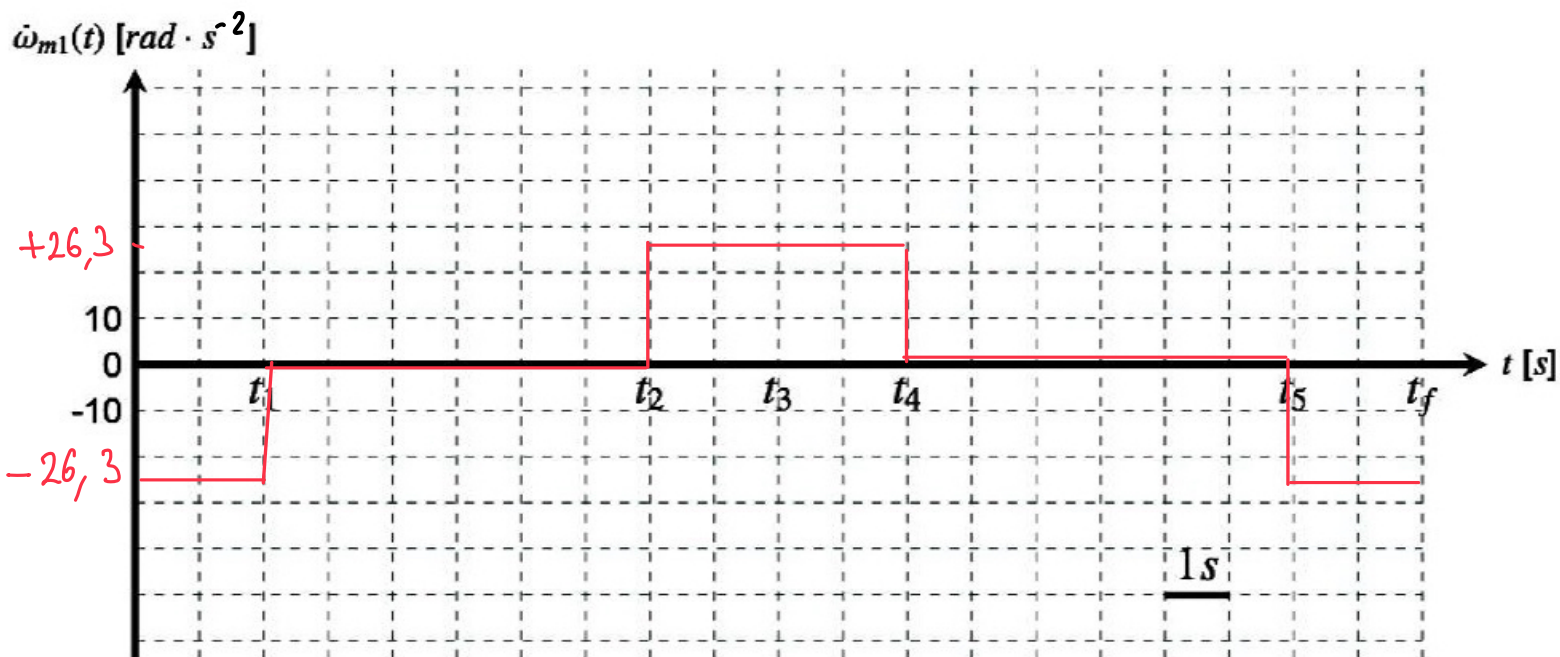
entre t_1 et t_2 $\dot{\omega}_{m1} = 0$ (vitesse constante)

entre t_2 et t_3 $\dot{\omega}_{m1} = +26,3 \text{ rad.s}^{-2}$

entre t_3 et t_4 $\dot{\omega}_{m1} = +26,3 \text{ rad.s}^{-2}$

entre t_4 et t_5 $\dot{\omega}_{m1} = 0$

entre t_5 et t_6 $\dot{\omega}_{m1} = -26,3 \text{ rad.s}^{-2}$

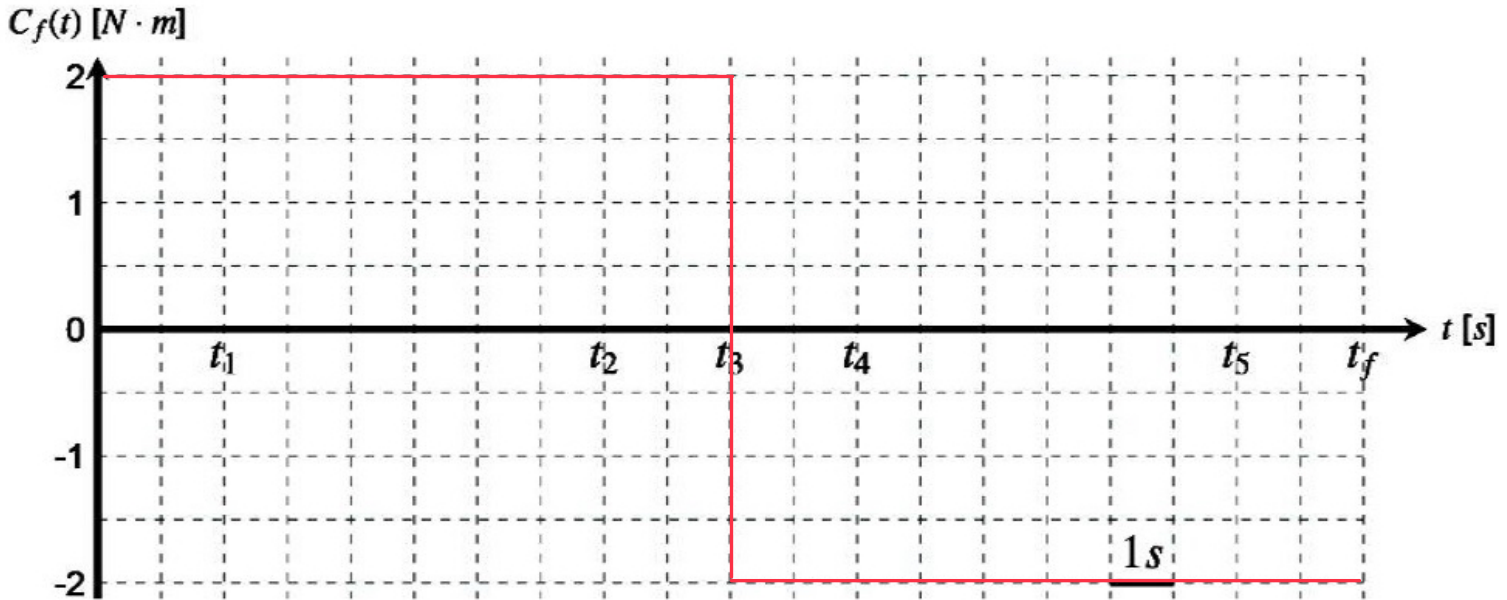


Q26: C_f est opposé au sens de rotation du moteur

$$\text{Comme } \omega_{m,1} = -V_a \times \frac{R_r}{R_m R_p}$$

en montée $V_a > 0$ donc $\omega_{m,1} < 0$ alors $C_f > 0$

en descente $V_a < 0$ donc $\omega_{m,1} > 0$ alors $C_f < 0$



Q27: Le moteur développe la puissance maximale à l'instant t_1 en montée alors

$$\omega_{m,1} = -V_a \times \frac{R_r}{R_m R_p} \quad \text{et} \quad C_m = -17 \text{ N.m}$$

$$P_{\max} = -V_a \times \frac{R_r}{R_m R_p} \times -17$$

$$\text{A.N. } P_{\max} = +2 \times \frac{1}{0,038} \times 17 = 895 \text{ W}$$

$895 \text{ W} < 1000 \text{ W}$ le moteur est bien dimensionné