

PARTIE I – TRAJECTOIRE DU ROBOT EN PHASE DE DEPLACEMENT AU SOL

Question 1 À l'aide de la condition de roulement sans glissement en I, donner la relation entre $V(t)$, $\omega_{21}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

Roulement sans glissement en I de la roue 2 sur le sol 0 : $\vec{V}_{I \in 2/0} = \vec{0} = \vec{V}_{I \in 2/1} + \vec{V}_{I \in 1/0}$

$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0} + R\vec{y}_1 \wedge \omega_{21}(t)\vec{z}_1 = R\omega_{21}(t)\vec{x}_1$ (A sur l'axe du pivot entre 2 et 1)

$$\vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{IO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = V(t)\vec{x}_1 + \left(R\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\vec{z}_1\right) \wedge \omega_{10}(t)\vec{y}_1 = V(t)\vec{x}_1 - \frac{L}{2}\omega_{10}(t)\vec{x}_1$$

En projection sur \vec{x}_1 : $R\omega_{21}(t) + V(t) - \frac{L}{2}\omega_{10}(t) = 0$

Question 2 Par un raisonnement analogue, donner directement la relation entre $V(t)$, $\omega_{31}(t)$ et $\omega_{10}(t)$.

On remplace 2 par 3 et $L/2$ par $-L/2$: $R\omega_{31}(t) + V(t) + \frac{L}{2}\omega_{10}(t) = 0$

Question 3 En déduire $\omega_{10}(t)$ en fonction de $\omega_{21}(t)$ et de $\omega_{31}(t)$.

On isole $V(t)$ dans les expressions précédentes : $V(t) = \frac{L}{2}\omega_{10}(t) - R\omega_{21}(t) = -R\omega_{31}(t) - \frac{L}{2}\omega_{10}(t)$

$$L\omega_{10}(t) = R(\omega_{21}(t) - \omega_{31}(t))$$

$$\omega_{10}(t) = \frac{R}{L}(\omega_{21}(t) - \omega_{31}(t))$$

Question 4 Démontrer que pour une trajectoire rectiligne, $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t)$. En déduire $\omega_{moy}(t)$ et donner sa valeur.

En trajectoire rectiligne $\omega_{10}(t) = 0$ donc $\omega_{21}(t) = \omega_{31}(t) = \omega_{moy}(t)$.

$$\omega_{moy}(t) = -\frac{V(t)}{R} = -\frac{2}{20 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Question 5 Donner dans ces conditions la valeur de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{10}(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{21}(t)$.

$\omega_{10}(t) = \frac{R}{L}(\omega_{21}(t) - \omega_{31}(t))$ donc $\dot{\omega}_{10}(t) = \frac{R}{L}(\dot{\omega}_{21}(t) - \dot{\omega}_{31}(t))$, de plus $\dot{\omega}_{21}(t) = -\dot{\omega}_{31}(t)$, donc :

$$\dot{\omega}_{10}(t) = \frac{2R}{L}\dot{\omega}_{21}(t)$$

Question 6 En faisant l'hypothèse que $t_1 = 0$, donner les expressions littérales de t_2 , de t_3 et de t_4 en fonction de ω_{10max} et de γ_{10} .

Sur la première phase (accélération) : $t_2 \cdot \gamma_{10} = \omega_{10max}$ donc $t_2 = \frac{\omega_{10max}}{\gamma_{10}}$

Même accélération et décélération en norme, donc même durée des phases 1 et 3 : $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$

On veut faire un virage de 90° , donc l'intégrale de $\omega_{10}(t)$ (aire sous la courbe) vaut 90° :

$$90^\circ = \int_0^{t_4} \omega_{10}(t) dt = 2 \cdot \left(\frac{t_2 \cdot \omega_{10max}}{2} \right) + (t_3 - t_2) \omega_{10max} = t_3 \omega_{10max}$$

$$\text{Donc } t_3 = \frac{90^\circ}{\omega_{10max}}$$

$$t_4 = t_2 + t_3 = \frac{\omega_{10max}}{\gamma_{10}} + \frac{90^\circ}{\omega_{10max}}$$

Question 7 À l'aide des figure 10 et figure 11, commenter l'influence de ω_{10max} sur la trajectoire du robot lors d'un virage.

Pour effectuer un virage de 90° , plus ω_{10max} est élevé plus le robot sort à l'extérieur du virage en comparaison d'un arc de cercle. Toujours avec de grandes vitesses, le rayon de courbure du virage est plus faible et la trajectoire se rapproche de l'angle droit (rayon de 1,25 m pour $\omega_{10max} = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et rayon de 4,1m pour $\omega_{10max} = 0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

Dans tous les cas, le robot tourne bien de 90° .

PARTIE II – SOLLICITATION DU ROBOT EN MOUVEMENT VERTICAL

Question 8 Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $E_c(S/R_0)$ de l'ensemble S par rapport au repère R_0 .

Pour un mouvement de translation du châssis, les deux moteurs tournent à la même vitesse mais avec des sens opposés. $\omega_{m1} = -\omega_{m'1}$ et $\omega_{51} = -\omega_{5'1}$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} m_S \cdot (v_a(t))^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} J_m \omega_{m1}^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_{51}^2 \right)$$

Question 9 Exprimer le vecteur de la vitesse d'ascension du robot $v_a(t) \vec{y}_0$ en fonction de la vitesse de rotation d l'arbre moteur $\omega_{m1}(t)$.

Roulement sans glissement du pignon sur la crémaillère : $v_a(t) = -\omega_{51} \cdot R_p$

(Si $\omega_{51} > 0$, $v_a(t) < 0$ d'après la figure 14)

Système poulie courroie : $\frac{\omega_{51}}{\omega_{m1}} = \frac{R_m}{R_r}$

$$v_a(t) = -\frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \cdot \omega_{m1}(t)$$

Question 10 En déduire l'expression de l'inertie équivalente notée J_{eq} de l'ensemble S rapportée à l'arbre moteur, en fonction de m_S, J_m, J_5 et des grandeurs géométriques.

Remarque : La question est ambiguë, on ne sait pas s'il faut considérer un seul moteur équivalent aux deux ou si J_{eq} est l'inertie rapportée sur l'arbre d'un seul des deux moteurs.

On considère que J_{eq} est l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre d'un des deux moteurs.

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \left[m_S \cdot \left(\frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \right)^2 + 2 \cdot J_m + 2 \cdot J_5 \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2 \right] \omega_{m1}^2 = \frac{1}{2} [2 \cdot J_{eq}] \omega_{m1}^2(t)$$

$$J_{eq} = \frac{m_s}{2} \cdot \left(\frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \right)^2 + J_m + J_5 \left(\frac{R_m}{R_r} \right)^2$$

En faisant l'hypothèse inverse d'un moteur équivalent aux 2, on trouve une inertie équivalente 2 fois plus grande.

Question 11 Déterminer l'expression de la somme des puissances extérieures (galiléennes) et intérieures à l'ensemble S . On ne fera apparaître que $\omega_{m1}(t)$ comme variable cinématique.

Bilan des puissances extérieures :

- Pesanteur : $P(pes \rightarrow S/R_0) = -m_s g \cdot v_a(t) = m_s g \cdot \frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \cdot \omega_{m1}(t)$ ($\omega_{m1} < 0$ en montée)
- Crémaillère sur les pignons : $P(0 \rightarrow S/0) = 0$ car roulement sans glissement des pignons sur les crémaillères.

Bilan des puissances intérieures :

- 2 moteurs : $P(moteurs) = 2C_m \cdot \omega_{m1}$ ($C_m < 0$ et $\omega_{m1}(t) < 0$ en montée)
- Frottement sur arbres de transmission : $P(frottements) = C_f \cdot \omega_{51} + C'_f \cdot \omega_{5r1} = (C_f - C'_f) \frac{R_m}{R_r} \omega_{m1}$

(en montée $\omega_{m1} < 0$, $C_f > 0$ et $C'_f < 0$)

Somme des puissances :
$$m_s g \cdot \frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \cdot \omega_{m1}(t) + 2C_m \cdot \omega_{m1}(t) + (C_f - C'_f) \frac{R_m}{R_r} \omega_{m1}(t)$$

Question 12 Dédire des questions précédentes, en justifiant rigoureusement, l'expression du couple moteur $C_m(t)$ en fonction de $\dot{\omega}_{m1}(t)$ et des grandeurs caractéristiques constantes du système.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble S en mouvement par rapport à R_0 (galiléen) :

$$\frac{d}{dt} E_c(S/R_0) = P_{ext}(\bar{S} \rightarrow S/R_0) + P_{int}(S)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} (2 \cdot J_{eq}) \cdot \omega_{m1}(t) \cdot \dot{\omega}_{m1}(t) = m_s g \cdot \frac{R_m \cdot R_p}{R_r} \cdot \omega_{m1}(t) + 2C_m(t) \cdot \omega_{m1}(t) + (C_f - C'_f) \frac{R_m}{R_r} \omega_{m1}(t)$$

$$2 \cdot J_{eq} \cdot \dot{\omega}_{m1}(t) = m_s g \cdot \frac{R_m \cdot R_p}{R_r} + 2C_m(t) + (C_f - C'_f) \frac{R_m}{R_r}$$

$$C_m(t) = J_{eq} \cdot \dot{\omega}_{m1}(t) - \frac{m_s}{2} g \cdot \frac{R_m \cdot R_p}{R_r} - \frac{(C_f - C'_f) R_m}{2 R_r}$$

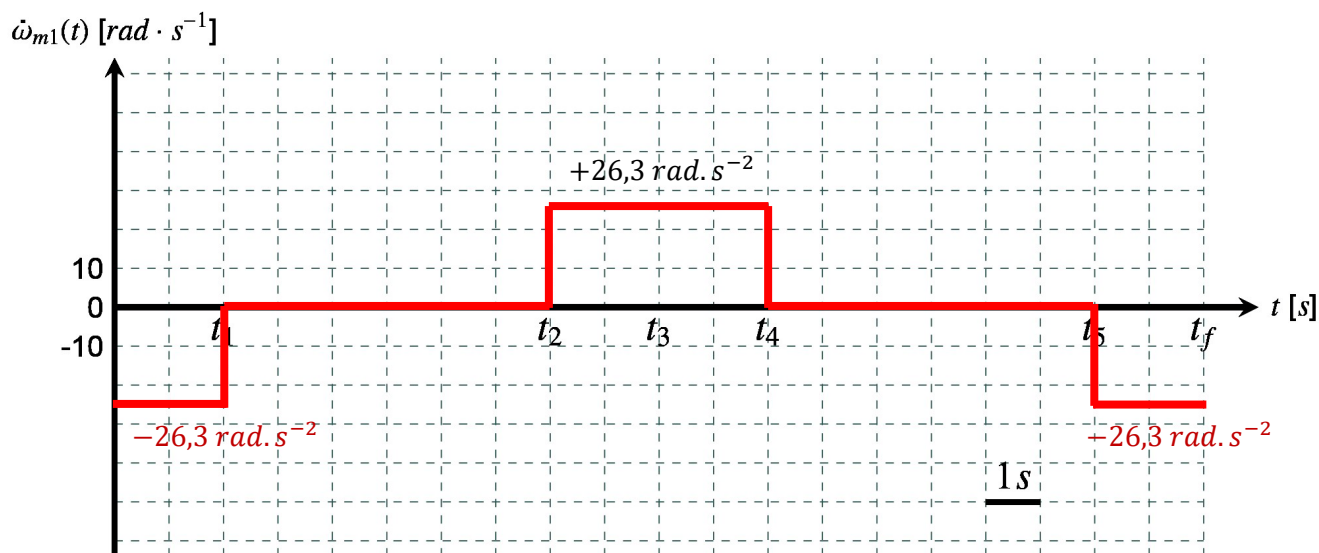
En accélération vers le haut chaque terme est négatif, car $\dot{\omega}_{m1} < 0$, $C_f > 0$ et $C'_f < 0$. Le couple moteur doit bien vaincre l'action du poids, des frottements et contribue à l'accélération.

Question 13 Compléter le DR2 en traçant l'évolution de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{m1}(t)$ au cours du temps.

$$\omega_{m1}(t) = -\frac{R_r}{R_m \cdot R_p} \cdot v_a(t) \text{ donc } \dot{\omega}_{m1}(t) = -\frac{R_r}{R_m \cdot R_p} \cdot \dot{v}_a(t)$$

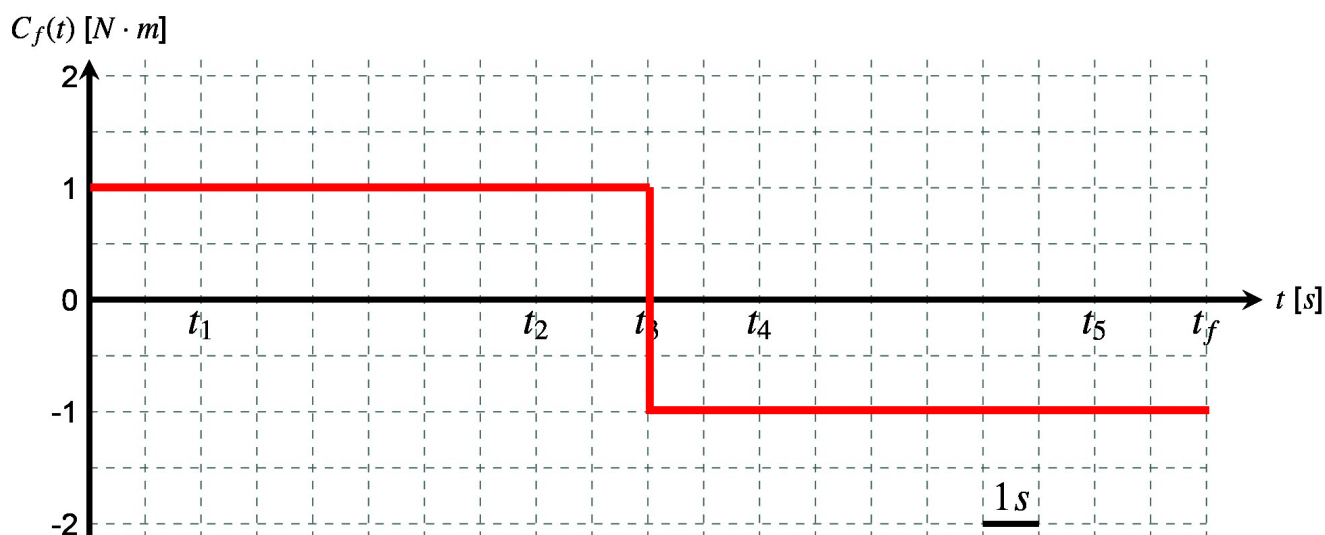
Pour la première phase d'accélération : $\dot{v}_a(t) = \frac{v_{max}}{t_1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ donc :

$$\dot{\omega}_{m1}(t) = -\frac{30}{30 \times 38 \cdot 10^{-3}} \cdot 1 = -26,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$



Question 14 Tracer sur le DR3 l'évolution de C_f au cours du temps.

$C_f(t)$ est opposé à $\omega_{s1}(t)$ qui est lui-même opposé à $v_a(t)$, donc $C_f(t)$ est du même signe que $v_a(t)$.



Question 15 Après avoir précisé l'instant correspondant, déterminer la valeur numérique de la puissance maximale que le moteur devra développer pour assurer le mouvement étudié. Conclure quant au choix du moteur envisagé.

La puissance est maximale en phase de montée (car il faut vaincre l'action du poids), en phase d'accélération et à vitesse maximale. On se place donc à l'instant t_1 (ou juste avant).

$$\omega_{m1}(t_1) = -\frac{R_r}{R_m \cdot R_p} \cdot v_{max}$$

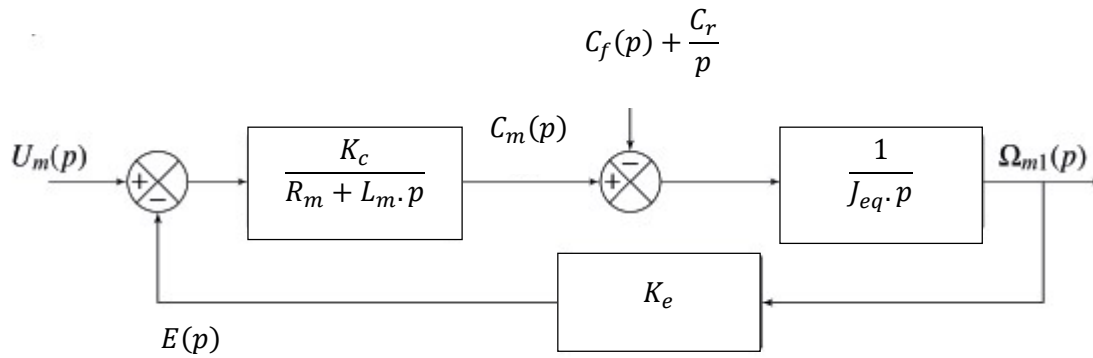
$$P_{max} = C_m(t_1) \cdot \omega_{m1}(t_1) = -17 \times -52,6 = 895 \text{ W}$$

$$P_{max} = 895 \text{ W} < 1000 \text{ W}$$

Le moteur envisagé d'une puissance de 1000 W est satisfaisant pour respecter les performances attendues.

PARTIE III – ASSERVISSEMENT DE L'ASSIETTE DU ROBOT

Question 16 Compléter les blocs du DR4 au niveau des « ... », avec les fonctions de transfert et variables manquantes dans le schéma-blocs du moteur.



Question 17 En se plaçant à l'équilibre statique et en précisant la démarche, déterminer les expressions de Y_g et Y_d en fonction de m_s, g, L, R_p et de x_{G_S} . On rappelle que l'angle α est supposé très petit.

On isole l'ensemble S en équilibre et à l'horizontale (α petit), on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Force de la chaîne gauche en C_g : $Y_g \vec{y}_0$
- Force de la chaîne droite en C_d : $Y_d \vec{y}_0$
- Poids en G_S : $-m_s g \vec{y}_0$

Théorème de la résultante statique projeté sur \vec{y}_0 : $Y_g + Y_d - m_s g = 0$

Théorème du moment statique en C_g projeté sur \vec{z}_0 : $0 + Y_d(L + 2R_p) - m_s g \left(R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S} \right) = 0$

$$Y_d = m_s g \left(\frac{R_p + \frac{L}{2} + x_{G_S}}{L + 2R_p} \right) = \boxed{m_s g \left(\frac{1}{2} + \frac{x_{G_S}}{L + 2R_p} \right) = Y_d}$$

$$Y_g = m_s g - Y_d = \boxed{m_s g \left(\frac{1}{2} - \frac{x_{G_S}}{L + 2R_p} \right) = Y_g}$$

Question 18 En déduire l'expression des couples C_r^g et C_r^d .

Pour le moteur droit : en supposant le système poulie-courroie parfait, avec les mêmes rayons en entrée et sortie, on retrouve le même couple en sortie du système poulie courroie C_r^d exercé sur le pignon droit.

C_r^d est le couple exercée par le poids sur l'axe moteur, donc le couple exercée sur le pignon est $-C_r^d$.

Le pignon droit est donc en équilibre sous l'action du couple $-C_r^d$ sur l'axe (O_d, \vec{z}_0) de la force $Y_d \vec{y}_0$ en C_d et de l'action du châssis par l'intermédiaire d'une liaison pivot d'axe (O_d, \vec{z}_0) . Le théorème de moment statique en O_d projeté sur \vec{z}_0 : $-C_r^d + Y_d \cdot R_p + 0 = 0$

$$\text{Donc } C_r^d = Y_d \cdot R_p = R_p m_S g \left(\frac{1}{2} + \frac{x_{G_S}}{L+2R_p} \right)$$

$$\text{Par analogie : } C_r^g = -Y_g \cdot R_p = -R_p m_S g \left(\frac{1}{2} - \frac{x_{G_S}}{L+2R_p} \right)$$

Question 19 Exprimer $H_p(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de $P(p)$.

$$H_p(p) = \frac{R_m + L_m \cdot p}{K_c}$$

$P_p(p)$ en volt (V).

Question 20 Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.



Avec α petit : $\sin \alpha = \frac{h_d - h_g}{L} \approx \alpha$ donc $\alpha = \frac{1}{L} \cdot (+h_d - h_g)$ ce qui est cohérent avec les signes du schéma-blocs.

Question 21 Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction des variables $\varepsilon_c(p)$, $U_c(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

$$h_g(p) = R_p \cdot \frac{1}{p} \cdot H_m(p) \left(-P_g(p) + U_v(p) - K_{adapt} \cdot \varepsilon_c(p) \right)$$

$$h_d(p) = -R_p \cdot \frac{1}{p} \cdot H_m(p) \left(-P_d(p) - U_v(p) - K_{adapt} \cdot \varepsilon_c(p) \right) = R_p \cdot \frac{1}{p} \cdot H_m(p) \left(P_d(p) + U_v(p) + K_{adapt} \cdot \varepsilon_c(p) \right)$$

Question 22 Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme présentée par la figure 20. Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma initial de la figure 19.

Si $P_d(p) = -P_g(p)$:

$$\alpha(p) = \frac{1}{L} \left(h_d(p) - h_g(p) \right) = R_p \cdot \frac{1}{p} \cdot H_m(p) \cdot 2 \cdot K_{adapt} \times \varepsilon_c(p) = H_{eq} \times \varepsilon_c(p)$$

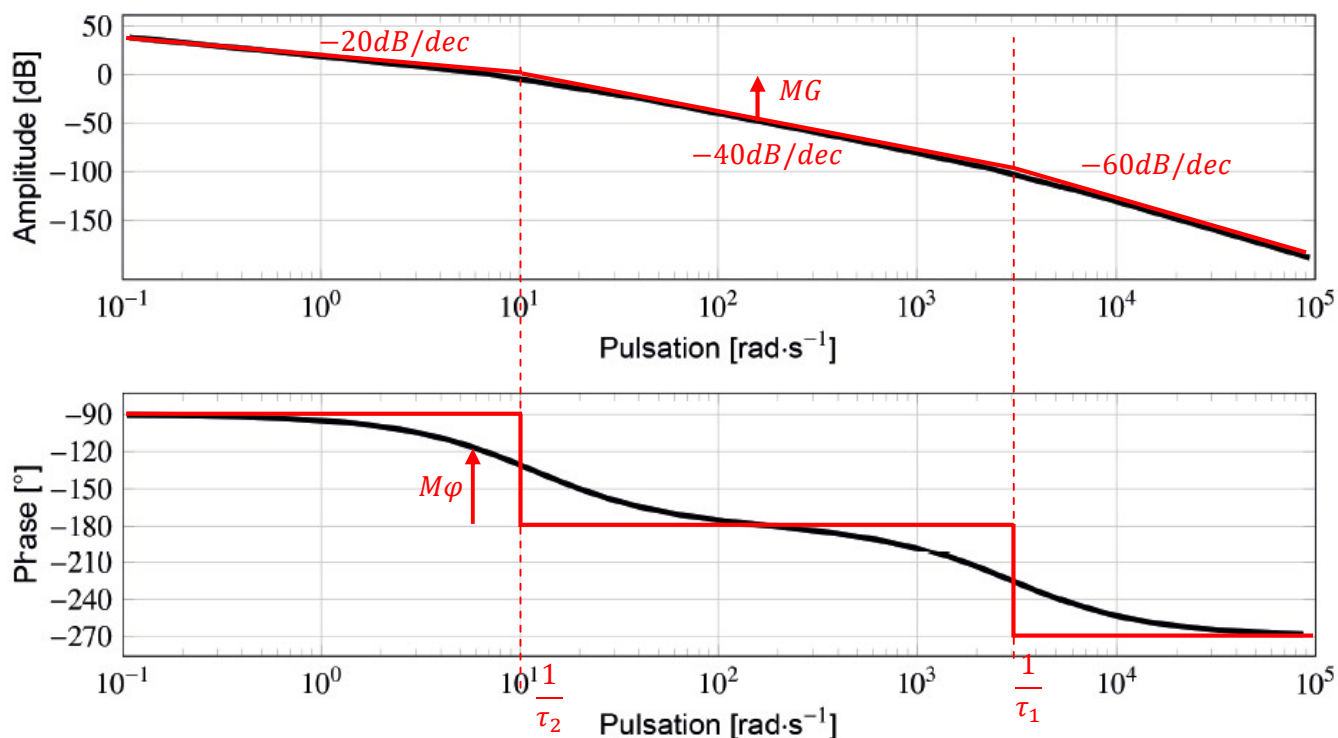
$$H_{eq}(p) = \frac{2 \cdot R_p \cdot H_m(p) \cdot K_{adapt}}{p \cdot L}$$

Question 23 Donner la fonction de transfert en boucle ouverte (notée $H_{BO}(p)$) de ce système en fonction de $H_m(p)$, $C_{orr}(p)$, K_{adapt} et des paramètres géométriques. Préciser son ordre et sa classe si $C_{orr}(p) = 1$.

$$H_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{\varepsilon(p)} = C_{orr}(p) \times H_{eq}(p) = C_{orr}(p) \times \frac{2 \cdot R_p \cdot H_m(p) \cdot K_{adapt}}{p \cdot L}$$

$H_m(p)$ est d'ordre 2, donc si $C_{orr}(p) = 1$, $H_{BO}(p)$ est d'ordre 3 et de classe 1.

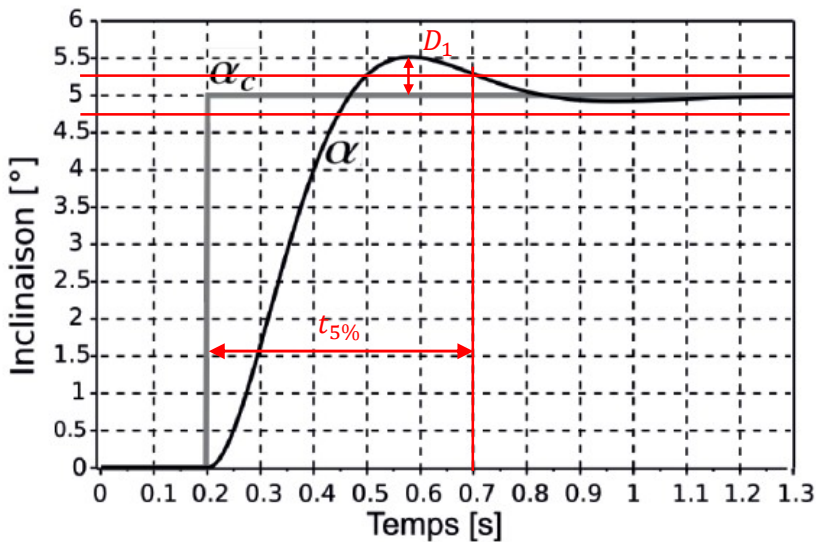
Question 24 Répondre sur le DR5 : vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison du robot sont vérifiées. Mettre en place les tracées permettant la vérification des critères considérés.



Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

On mesure $M\varphi = 65^\circ < 75^\circ$ et $MG = 50dB > 10dB$ donc l'exigence 1.3.1.1 n'est pas respectée à cause de la marge de phase.

On mesure une bande passante à 0 dB de $7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc l'exigence 1.3.1.3 n'est pas respectée.



Réponse temporelle du système non corrigé en boucle fermée

Erreur statique :

$$\varepsilon_s = 0^\circ \text{ exigence 1.3.1.5 respectée}$$

Premier dépassement :

$$D_{1\%} = \frac{0,5}{5} = 10\% \text{ exigence 1.3.1.4 respectée de justesse}$$

Temps de réponse à 5% :

$$t_{5\%} = 0,7 - 0,2 = 0,5s > 0,1s$$

Exigence 1.3.1.2 n'est pas respectée

Question 25 Sur le DR5, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondant aux tracés proposés.

Cf Question 24

Question 26 En déduire les valeurs numériques de τ_1 et de τ_2 .

$$\text{D'après l'énoncé } \tau_2 > \tau_1 \text{ donc } \omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} < \omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$$

$$\omega_{c2} = 10 \text{ rad. s}^{-1} \text{ donne } \tau_2 = 0,1 \text{ s}$$

$$\omega_{c1} = 3000 \text{ rad. s}^{-1} \text{ donne } \tau_1 = \frac{1}{3000} \text{ s} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,33 \text{ ms}$$

Question 27 Justifier le choix d'un tel correcteur.

L'exigence 1.3.1.6 stipule que les perturbations ne doivent pas influencer la précision à long terme. Le correcteur Proportionnel Intégral (PI) permet d'ajouter une intégration avant la perturbation, et ainsi de rejeter les perturbations de type échelon. Mais le schéma-blocs de la figure 20 qui est utilisé pour la simulation du DR5 ne présente pas de perturbation !

Mais ce correcteur va nécessairement faire diminuer la marge de phase quelque soit le réglage, alors que cette dernière n'était déjà pas bonne.

La rapidité peut être améliorée en compensant le pôle dominant s'il y a suffisamment de stabilité, mais avec cet unique correcteur PI, ça ne sera pas le cas.

Utiliser uniquement un correcteur PI ne semble pas adapté ! Il faut également améliorer la marge de phase.

Question 28 Donner la valeur de T_i permettant de compenser le pôle dominant de $H_{eq}(p)$ et en déduire la forme de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ sous forme canonique.

Le pôle dominant correspond à la constante de temps la plus grande (la plus lente), on choisit donc :

$$\tau_i = \tau_2 = 0,1 \text{ s}$$

$$H_{BO}(p) = \frac{K_p K_{eq}}{\tau_2 \cdot p^2 \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}$$

Question 29 Justifier le choix d'un tel correcteur.

Sur le diagramme de Bode de la FTBO avec correcteur PI, la marge de phase est de $4^\circ < 75^\circ$ ce qui est très faible. L'ajout du correcteur à avance de phase va permettre de retrouver la stabilité souhaitée en ajoutant une bosse de phase à l'endroit souhaité.

Question 30 Déterminer la valeur de a permettant d'apporter la phase nécessaire au niveau de la pulsation ω_{0dB} visée ($20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) permettant de satisfaire la marge de phase.

En $\omega = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la marge de phase est de 3° sans le correcteur à avance de phase, il faut donc ajouter $\varphi_{max} = 72^\circ$ de phase en $\omega = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\sin(\varphi_{max}) = \frac{a-1}{a+1} \text{ donne } a = \frac{1+\sin(\varphi_{max})}{1-\sin(\varphi_{max})} = 40$$

Question 31 En déduire la valeur de T_{av} qu'il faut choisir.

$$\omega_{max} = \frac{1}{T_{av}\sqrt{a}} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ donne } T_{av} = \frac{1}{\omega_{max}\sqrt{a}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 8 \text{ ms}$$

Question 32 À l'aide de la figure 22, donner une valeur approchée de K_p permettant l'asservissement en position du robot.

D'après la figure 22, seule la valeur $K_p = 3,5$ permet de satisfaire les exigences temporelles suivantes :

- $D_{1\%} = 10\% \leq 10\%$ (exigence 1.3.1.4)
- $t_{5\%} = 0,08\text{s} < 0,1\text{s}$ (exigence 1.3.1.2)
- $\varepsilon_S = 0^\circ$ (exigence 1.3.1.5)