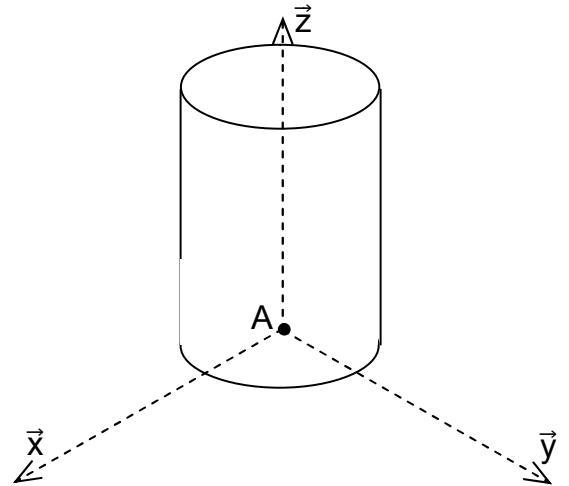
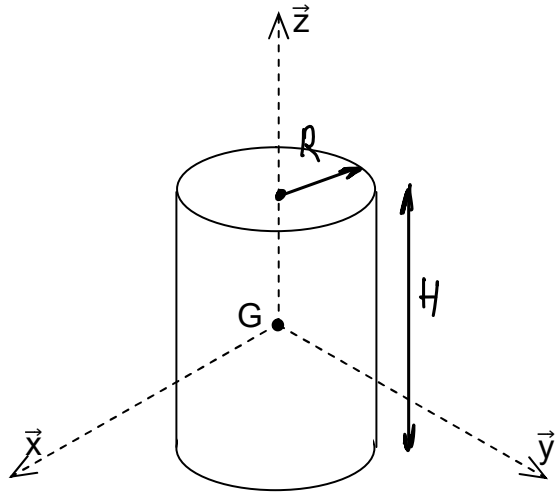


NOM :		Prénom :	
-------	--	----------	--

Q1. Ecrire l'opérateur d'inertie $\bar{I}(G,S)$ puis $\bar{I}(A,S)$ du cylindre S de masse M, de hauteur H et de rayon R. :



$$\bar{I}(G,S) = \begin{bmatrix} \frac{MH^2}{12} + \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MH^2}{12} + \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Pour calculer $\bar{I}(A,S)$ on utilise le théorème de Huygens :

$$I_{xx'} = \frac{MH^2}{12} + \frac{MR^2}{4} + M \times \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{MH^2}{12} + \frac{MH^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MH^2}{3} + \frac{MR^2}{4} = I_{yy'}$$

d'où

$$\bar{I}(A,S) = \begin{bmatrix} \frac{MH^2}{3} + \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MH^2}{3} + \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Q2. Donner la définition du torseur cinétique du solide S par rapport au repère R_0 , écrit au point O. Vous détaillerez l'expression de la résultante cinétique et du moment cinétique.

$$\left\{ \mathcal{C}_{S/R_0} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{c,S/R_0} \\ \vec{\sigma}_{(c,S/R_0)} \end{array} \right\}_O \quad \text{avec} \quad \vec{R}_{c,S/R_0} = m \vec{V}_{G \in S / R_0} \quad \text{Résultante cinétique}$$

$$\text{et} \quad \vec{\sigma}_{(o,S)} = \bar{I}(O,S) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0} + m \vec{OG} \wedge \vec{V}_{O \in S / R_0}$$

Moment cinétique en O

Q3. Donner la définition du torseur dynamique du solide S par rapport au repère R_0 , écrit au point O. Vous détaillerez l'expression de la résultante dynamique et du moment dynamique.

$$\left\{ \mathcal{D}_{S/R_0} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_d \\ \vec{\delta}(O, S/R_0) \end{array} \right\}_O \quad \text{avec } \vec{R}_d = m \vec{a}_{G \in S/R_0} \quad (\text{résultante dynamique})$$

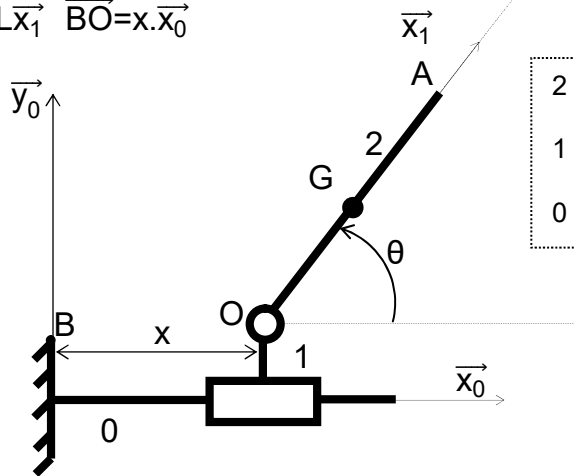
$$\text{et } \vec{\delta}(O, S/R_0) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O, S/R_0) \right) + m \vec{V}_{O \in S/R_0} \wedge \vec{V}_{G \in S/R_0} \quad (\text{moment dynamique de S en O})$$

Q4. Soit le mécanisme décrit figure 1 :

On note I_{Gz} le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{z}_0)$.

$$\vec{OG} = \frac{L}{2} \vec{x}_1 \quad \vec{OA} = L \vec{x}_1 \quad \vec{BO} = x \vec{x}_0$$

Figure 1



2 : Barre homogène de masse M de longueur L.

1 : Coulisseau de masse négligée.

0 : Bâti.

Objectif : Calculer le torseur dynamique $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_d \\ \vec{\delta}(O, 2/0) \end{array} \right\}_O$.

On propose de calculer dans un premier temps la vitesse de G par rapport au solide 0, puis l'accélération de G par rapport au solide 0.

En déduire $\vec{\sigma}(G, 2/0)$, puis $\vec{\delta}(G, 2/0)$ et conclure en calculant $\vec{\delta}(O, 2/0)$.

$$\vec{V}_{G \in 2/0} = \frac{d}{dt} (\vec{OG}) \Big|_O = \frac{d}{dt} (\vec{BO}) \Big|_O + \frac{d}{dt} (\vec{OG}) \Big|_O = \dot{x} \vec{x}_0 + \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{y}_1 = \vec{V}_{G \in 2/0}$$

$$\vec{a}_{G \in 2/0} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_{G \in 2/0}) \Big|_O = \ddot{x} \vec{x}_0 - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \frac{L}{2} \ddot{\theta} \vec{y}_1 = \vec{a}_{G \in 2/0}$$

$$\vec{\sigma}(G, 2/0) = \vec{I}(G, 2/0) \cdot \ddot{\theta} \vec{z} + m \vec{OG} \wedge \vec{a}_{G \in 2/0} = I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\vec{\delta}(G, 2/0) = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(G, 2/0)) + m \vec{V}_{G \in 2/0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0} = I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\vec{\delta}(O, 2/0) = \vec{\delta}(G, 2/0) + \vec{OG} \wedge m \vec{a}_{G \in 2/0} = I_{Gz} \ddot{\theta} \vec{z} + m \frac{L}{2} \vec{x}_1 \wedge \left(\ddot{x} \vec{x}_0 - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \frac{L}{2} \ddot{\theta} \vec{y}_1 \right)$$

$$\vec{\delta}(O, 2/0) = \left(I_{Gz} \ddot{\theta} - \frac{mL}{2} \ddot{x} \sin \theta + \frac{mL^2}{4} \ddot{\theta} \right) \vec{z}$$

$$\vec{\delta}(O, 2/0) = \left(\left(I_{Gz} + \frac{mL^2}{4} \right) \ddot{\theta} - \frac{mL}{2} \ddot{x} \sin \theta \right) \vec{z}$$