

Partie 1 CCSE 2025 Correction DS 2 du 5 Novembre 2025

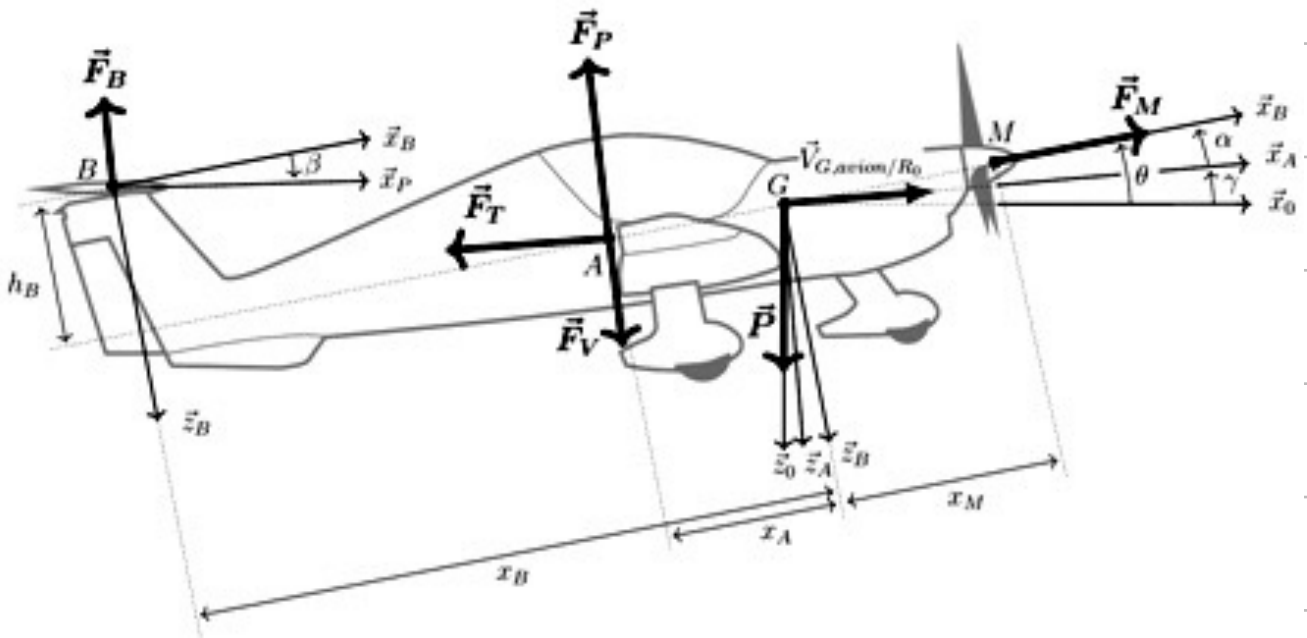
$$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_B) \quad \alpha = (\vec{x}_A, \vec{x}_B) \quad \gamma = (\vec{x}_0, \vec{x}_A) \quad \beta = (\vec{x}_B, \vec{x}_P)$$

$$\vec{OG} = x(t) \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_0 + z(t) \vec{z}_0$$

Q<sub>2</sub>  $F_V = 0 \text{ N}$   $V = V_2 = V_0$   $V_2 = 0 \text{ m/s}$   $\beta = 0^\circ$   $\gamma = 0^\circ$

On isole l'avion : B.A.N.E :  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_V = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_T$ ,  $\vec{F}_P$ ,  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_H$

Ici  $R_A = R_0$  puisque



On applique le TRS projeté sur  $\vec{x}_A$  et  $\vec{z}_A$

$$\vec{R}_s \cdot \vec{x}_A = 0 = + F_T + F_H \cos \alpha \quad (1)$$

$$\vec{R}_s \cdot \vec{y}_A = 0 = mg + F_P + F_B - F_H \sin \alpha \quad (2)$$

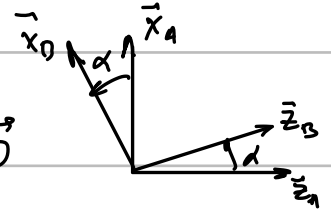
(1) donne :  $F_H = \frac{1}{2 \cos \alpha} \rho (C_{x_0} + C_{x \alpha}) S V_0^2$

(2) donne :  $mg - \frac{1}{2} \rho (C_{z_0} + C_{z \alpha}) S V_0^2 - \frac{1}{2} \rho (C_{P_0} + C_P (\alpha + \beta)) S V_0^2 - \frac{\rho \tan \alpha}{2} (C_{x_0} + C_{x \alpha}) S V_0^2 = 0$

ce qui donne : 
$$V_0^2 = \frac{2mg}{\rho S (C_{z_0} + C_{p_0} + \alpha(C_{z_2} + C_p) + \tan \alpha(C_{x_0} + C_{x\alpha}))}$$

Q2: Pour avoir uniquement des moments dépendant de  $V_0^2$ , écrivons

le TMS au point G



$$\vec{M}_{G, \vec{F}_T} + \vec{M}_{G, \vec{F}_P} + \vec{M}_{G, \vec{F}_B} + \vec{M}_{G, \vec{P}} + \vec{M}_{G, \vec{F}_N} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{F}_T + \vec{GA} \wedge \vec{F}_P + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B + \vec{GM} \wedge \vec{F}_N = \vec{0}$$

$$-x_A \vec{x}_0 \wedge -\frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{x_0} + C_{x\alpha}) \vec{x}_A - x_A \vec{x}_B \wedge -\frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{z_0} + C_{z\alpha}) \vec{z}_A \\ + (-x_B \vec{x}_B - h_B \vec{z}_B) \wedge -\frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{p_0} + C_{p\alpha}) \vec{z}_A + \underbrace{x_N \vec{x}_B \wedge \vec{F}_N \vec{x}_B}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \rho S V_0^2 \left( -\sin \alpha x_A (C_{x_0} + C_{x\alpha}) - \cos \alpha x_A (C_{z_0} + C_{z\alpha}) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \alpha x_B (C_{p_0} + C_{p\alpha}) - h_B \sin \alpha (C_{p_0} + C_{p\alpha}) \right) \right] \vec{y}_A = \vec{0}$$

donc  $\tan \alpha x_A (C_{x_0} + C_{x\alpha}) + x_A (C_{z_0} + C_{z\alpha}) + x_B (C_{p_0} + C_{p\alpha}) \\ + h_B \tan \alpha (C_{p_0} + C_{p\alpha}) = 0$

$$\alpha \left( \tan \alpha (x_A C_x + h_B C_p) + x_A C_z + x_B C_p \right)$$

$$+ \tan \alpha (x_A C_{x_0} + h_B C_{p_0}) + x_A C_{z_0} + x_B C_{p_0} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \tan \alpha \left( \underbrace{\frac{x_A C_{x_0} + h_B C_{p_0}}{x_A C_{z_0} + x_B C_{p_0}}}_{l_1} + \left( \underbrace{\frac{x_A C_z + x_B C_p}{x_A C_{z_0} + x_B C_{p_0}}}_{l_2} + \underbrace{\frac{x_A C_x + h_B C_p \tan \alpha}{x_A C_{z_0} + x_B C_{p_0}}}_{l_3} \right) \alpha \right) = 0$$

Q3: Applications numériques:

$$V_0 = \left( \frac{2 \times 630 \times 9,81}{0,8 \times 8 \left( 0,4 - 0,045 + 0,84 \times \frac{\pi}{180} (11,6 + 1,08) + \tan\left(\frac{0,84\pi}{181}\right) \left(0,066 + 0,26 \times \frac{0,84\pi}{180}\right) \right)} \right)^{0,5}$$

$$V_0 = 59,75 \text{ m/s} = 215,11 \text{ km/h}$$

$$F_H = \frac{0,8}{2 \times 65 \left(\frac{0,84}{180} \pi\right)} \times \left( 0,066 + 0,26 \times \left(\frac{0,84}{180} \times \pi\right) \right) \times 8 \times 59,75^2$$

$$F_H = 797,73 \text{ N}$$

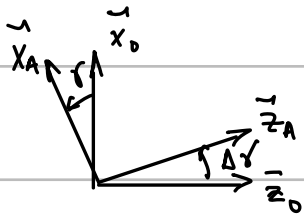
La vitesse calculée de 215 km/h est bien inférieure à la vitesse maximum de l'avion (290 km/h) de plus la puissance délivrée par le moteur est de  $72 \times 10^3 \text{ W} = F_H \times 59,75$  ce que fait  $F_H = 1205 \text{ N}$

$797,73 \text{ N} < 1205 \text{ N}$ , l'avion a donc la possibilité de croiser à sa vitesse de croisière.

Q4:  $\vec{V}_{G \rightarrow \text{avion}/R_0} = (V_0 + \Delta V_x) \vec{x}_0 - (\Delta V_z) \vec{z}_0$

$$\left. \frac{d\vec{V}_{G \rightarrow \text{avion}/R_0}}{dt} \right|_{R_0} = \left( \left. \frac{dV_0}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{d\Delta V_x}{dt} \right|_{R_0} \right) \vec{x}_0 - \left. \frac{d\Delta V_z}{dt} \right|_{R_0} \vec{z}_0$$

$$\vec{\Gamma}_{G, \text{avion}/R_0} = \frac{dV_x}{dt} \vec{x}_0 - \frac{d\Delta V_z}{dt} \vec{z}_0$$



$$\vec{x}_0 = \cos \Delta\gamma \vec{x}_A + \sin \Delta\gamma \vec{z}_A = \vec{x}_A + \Delta\gamma \vec{z}_A$$

$$\vec{z}_0 = \cos \Delta\gamma \vec{z}_A - \sin \Delta\gamma \vec{x}_A = \vec{z}_A - \Delta\gamma \vec{x}_A$$

d'où  $\vec{\Gamma}_{G, \text{Axe } z_0} = \Delta \dot{V}_x (\vec{x}_A + \Delta\gamma \vec{z}_A) - \Delta \dot{V}_z (\vec{z}_A - \Delta\gamma \vec{x}_A)$

donc  $\vec{\Gamma}_{G, \text{Axe } z_0} = (\Delta \dot{V}_x + \Delta\gamma \Delta \dot{V}_z) \vec{x}_A + (\Delta\gamma \Delta \dot{V}_x - \Delta \dot{V}_z) \vec{z}_A$

Q5: On applique le TRD en projection sur  $\vec{x}_A$  et  $\vec{z}_A$   $\vec{R}_d = \vec{R}_s$

(1)  $\vec{R}_d \cdot \vec{x}_A = -\frac{1}{2} \rho (C_{x_0} + C_x \alpha) S V^2 + F_H \cos \alpha - mg \sin(\Delta\gamma) = m (\Delta \dot{V}_x + \Delta\gamma \Delta \dot{V}_z)$

(2)  $\vec{R}_d \cdot \vec{z}_A = mg \cos(\Delta\gamma) - \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{z_0} + C_{p_0} + (C_z + C_p) \alpha + C_p \beta) - F_H \sin \alpha$   
 $= m (\Delta\gamma \Delta \dot{V}_x - \Delta \dot{V}_z)$

Q6: (1) donne avec des développements limités au 1<sup>er</sup> ordre.

$$-\frac{1}{2} \rho S \left( (C_{x_0} + C_x (\alpha_0 + \Delta\alpha)) (V^2) \right) + (F_{H_0} + \Delta F_H) \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) - mg \Delta\gamma$$

$$= m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \underbrace{m \Delta\gamma \frac{d\Delta V_z}{dt}}_{\approx 0}$$

$$\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \cos \alpha_0 \cos \Delta\alpha - \sin \alpha_0 \sin \Delta\alpha$$

$$= \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \Delta\alpha$$



$$(1) \text{ donne } -\frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{x_0} + C_x d_0) - \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x \Delta \alpha + F_{n_0} \cos(d_0 + \Delta \alpha) + \Delta F_n \cos(d_0 + \Delta \alpha) - mg \Delta \gamma = m \frac{d\Delta V_x}{dt}$$

$$\text{or } V_0^2 = V_x^2 + V_z^2 = (V_0 + \Delta V_x)^2 + (\Delta V_z)^2 = V_0^2 + 2V_0 \Delta V_x$$

$$-\frac{1}{2} \rho S (V_0^2 + 2V_0 \Delta V_x) (C_{x_0} + C_x d_0) - \frac{1}{2} \rho S (V_0^2 + 2V_0 \Delta V_x) C_x \Delta \alpha + F_{n_0} \cos d_0 - F_{n_0} \sin \alpha_0 \Delta \alpha + \Delta F_n \cos d_0 - mg \Delta \gamma = m \frac{d\Delta V_x}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= -F_{n_0} \cos d_0 \\ &-\frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{x_0} + C_x d_0) - \rho S V_0 \Delta V_x (C_{x_0} + C_x d_0) - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 C_x \Delta \alpha + F_{n_0} \cos d_0 \\ &- F_{n_0} \sin d_0 \Delta \alpha + \Delta F_n \cos d_0 - mg \Delta \gamma = m \frac{d\Delta V_x}{dt} \end{aligned}$$

on a alors :

$$m \frac{d\Delta V_x}{dt} + \rho S V_0 (C_{x_0} + C_x d_0) \Delta V_x = -mg \Delta \gamma + \cos d_0 \Delta F_n - \left( F_{n_0} \sin d_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S C_x \right) \Delta \alpha$$

il vient finalement :

$$\frac{d\Delta V_x}{dt} + \underbrace{\frac{\rho S V_0}{m} (C_{x_0} + C_x d_0)}_a \Delta V_x = -g \Delta \gamma + \underbrace{\frac{\cos d_0}{m} \Delta F_n}_b - \underbrace{\left( \frac{F_{n_0} \sin d_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 S C_x}{m} \right) \Delta \alpha}_c$$

$$\text{Q7: } \frac{1}{V_0} \frac{d\Delta V_z}{dt} = \frac{d\Delta \gamma}{dt} \Rightarrow \Delta V_z = V_0 \times \Delta \gamma + \text{cte}$$

$$\text{li } \Delta \gamma = 0 \Rightarrow \Delta V_z = 0$$

$$\Rightarrow \Delta V_z = V_0 \Delta \gamma$$

28.  $\vec{\sigma}_{G, A_{\text{ion}}/R_0} = \bar{I}(G, A_{\text{ion}}) \cdot \vec{\Omega}_{A_{\text{ion}}/0} + \underbrace{m \vec{G} \wedge \vec{V}_{GA_{\text{ion}}/0}}_{=\vec{0}}$

On étudie uniquement une rotation de tangage

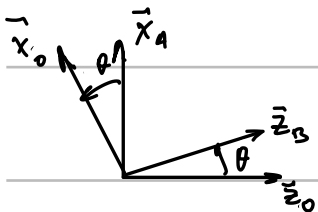
$$\vec{\Omega}_{A_{\text{ion}}/0} = (\dot{\alpha} + \dot{\gamma}) \vec{y}_0$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma}_{G, A_{\text{ion}}/R_0} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & -I_4 \\ 0 & I_2 & 0 \\ -I_4 & 0 & I_3 \end{pmatrix}_{R_B} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} = (\dot{\alpha} + \dot{\gamma}) I_2 \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(G, A_{\text{ion}}/R_0) &= \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, A_{\text{ion}}/R_0) + m \vec{V}_{GA/R_0} \wedge \vec{V}_{GA/R_0} \\ &= I_2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}) \vec{y}_0 = I_2 \ddot{\theta} \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(A, A_{\text{ion}}/R_0) = \vec{\delta}(G, A_{\text{ion}}/R_0) + \vec{AG} \wedge m \vec{\Gamma}_{G, A_{\text{ion}}/R_0}$$

$$= I_2 \ddot{\theta} \vec{y}_0 + x_A \vec{x}_B \wedge m \left( (\Delta \dot{V}_x + \Delta \gamma \Delta \dot{V}_z) \vec{x}_0 + (\Delta \gamma \Delta \dot{V}_x - \Delta \dot{V}_z) \vec{z}_0 \right)$$



$$\text{d'où } \vec{\delta}(A, A_{\text{ion}}/R_0) = I_2 \ddot{\theta} \vec{y}_0 + m \left( -x_A \sin \theta (\Delta \dot{V}_x + \Delta \gamma \Delta \dot{V}_z) \vec{y}_0 - x_A \cos \theta (\Delta \gamma \Delta \dot{V}_x - \Delta \dot{V}_z) \vec{y}_0 \right)$$

en négligeant les termes du second ordre cela donne

$$\vec{\delta}(A, A_{\text{ion}}/R_0) = \left( I_2 \ddot{\theta} - m x_A (\sin \theta \Delta \dot{V}_x + \cos \theta \Delta \dot{V}_z) \right) \vec{y}_0$$

$$\text{or } \theta = \alpha + \gamma = (\alpha_0 + \Delta \alpha + \Delta \gamma)$$

$$\vec{S}(A, A_0/R_0) = \left( \vec{I}_2^{\ddot{\theta}} - m X_A \left( \sin \alpha_0 + \Delta \alpha + \Delta \delta \right) \Delta \dot{V}_x + \left( \cos \alpha_0 - (\Delta \alpha + \Delta \delta) \sin \alpha_0 \right) \Delta \dot{V}_z \right) \vec{Y}_0$$

Q9 On reprend le moment statique déterminé à la question Q2 en considérant que  $\gamma \neq 0$ , ce qui donnera

$$\vec{S}(A, A_0/R_0) = \sum \vec{M}_{A, \vec{F}_{ext}}$$

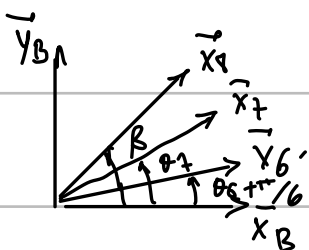
Q10 Le modèle non linéaire est légèrement plus oscillant que le modèle linéaire, mais  $V_x$  et  $V_z$  restent dans le même ordre de grandeur à 5% près.

Les fréquences propres sont légèrement plus élevées pour le modèle non linéaire. En 5 pseudo périodes les signaux sont en opposition de phase  $\Rightarrow$  un écart de 10% sur la fréquence propre.

Le modèle linéarisé permettra de modéliser le système à 10% près.

Q11. On écrit la fermeture géométrique vectorielle :

$$\vec{O} = \vec{HJ} + \vec{JK} + \vec{KL} + \vec{LH} = L_6 \vec{x}_6 + L_7 \vec{x}_7 - L_8 \vec{x}_8 + (x_L - x_H) \vec{x}_B + (y_L - y_H) \vec{y}_B$$



$$L_6 \left( \cos(\theta_6 + \pi/6) \vec{x}_B + \sin(\theta_6 + \pi/6) \vec{y}_B \right) + L_7 \left( \cos \theta_7 \vec{x}_B + \sin \theta_7 \vec{y}_B \right) - L_8 \left( \cos \theta \vec{x}_B + \sin \theta \vec{y}_B \right) + (x_L - x_H) \vec{x}_B + (y_L - y_H) \vec{y}_B = \vec{0}$$

Donne en projection sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  :

$$L_7 \cos \theta_7 = L_6 \cos \left( \theta_6 + \frac{\pi}{6} \right) + L_8 \cos \beta + x_L - x_H$$

$$L_7 \sin \theta_7 = L_6 \sin \left( \theta_6 + \frac{\pi}{6} \right) + L_8 \sin \beta + y_L - y_H$$

d'où 
$$L_7^2 = \left( L_6 \cos \left( \theta_6 + \frac{\pi}{6} \right) + L_8 \cos \beta + x_L - x_H \right)^2 + \left( L_6 \sin \left( \theta_6 + \frac{\pi}{6} \right) + L_8 \sin \beta + y_L - y_H \right)^2$$

Q12.  $\beta = A \theta_3 + B$   $A = \frac{38}{40} = 0,95$

Si  $\theta_3 = 0$  alors  $\beta = 0$  d'où  $B = 0$

on a finalement  $\beta = 0,95 \theta_3$

Q13. Entre  $0,5 \text{ rad/s}$  et  $5 \text{ rad/s}$  (une décade) le gain diminue de  $20 \text{ dB}$

on a donc un comportement de type intégrateur, d'où le  $\frac{k_{4a}}{p}$   
pour ciller la phase sur cette même bande de pulsation et de

$+\frac{\pi}{2}$ , or un intégrateur pur induit une phase de  $-\frac{\pi}{2}$ , il

y a donc un décalage de  $+\pi$  qui provient du  $-1$  dans

$$(-1) \times \frac{k_{4a}}{p}.$$

On obtient la valeur de  $k_{4a}$  grâce à  $\omega_{0dB} = 100 \text{ rad/s}$

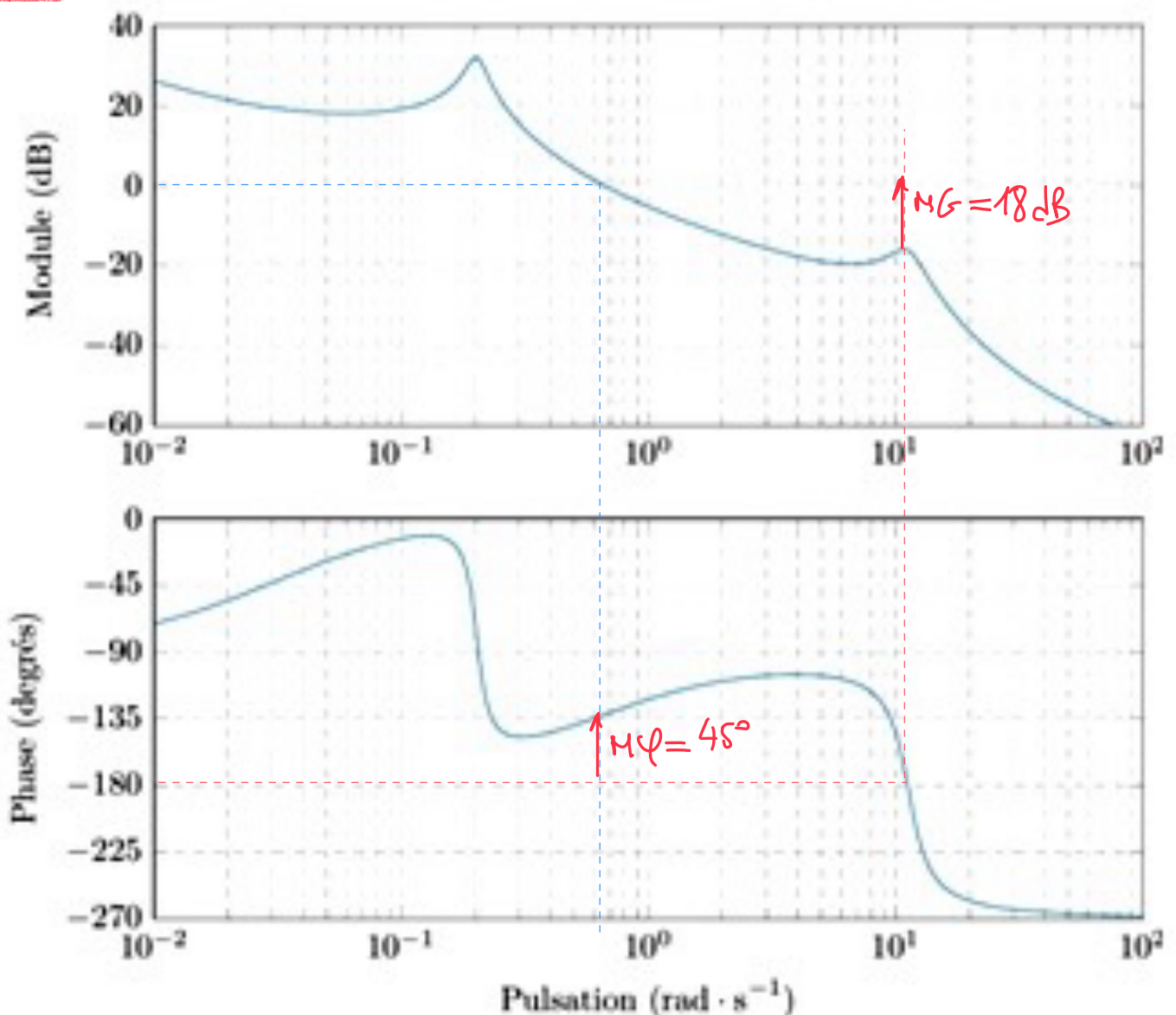
$\Rightarrow k_{4a} = 120 \text{ m/s}^2$

$$Q14. \quad FTBO = \frac{\Delta V_z(p)}{\varepsilon_z} = H_4 \times 1 \times C_{Kz}(p) = - \frac{K_{4a}}{p} \times K_z \left(1 + \frac{1}{\tau_z p}\right)$$

$$\text{or } FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{-K_{4a} K_z (\tau_z p + 1)}{\tau_z p^2 - K_{4a} K_z (\tau_z p + 1)}$$

Pour que le système soit stable il faut que tous les coefficients du dénominateur soient de même signe (ici  $> 0$ )  
 Ce qui impose que  $K_z < 0$  pour que  $-K_{4a} K_z > 0$  !

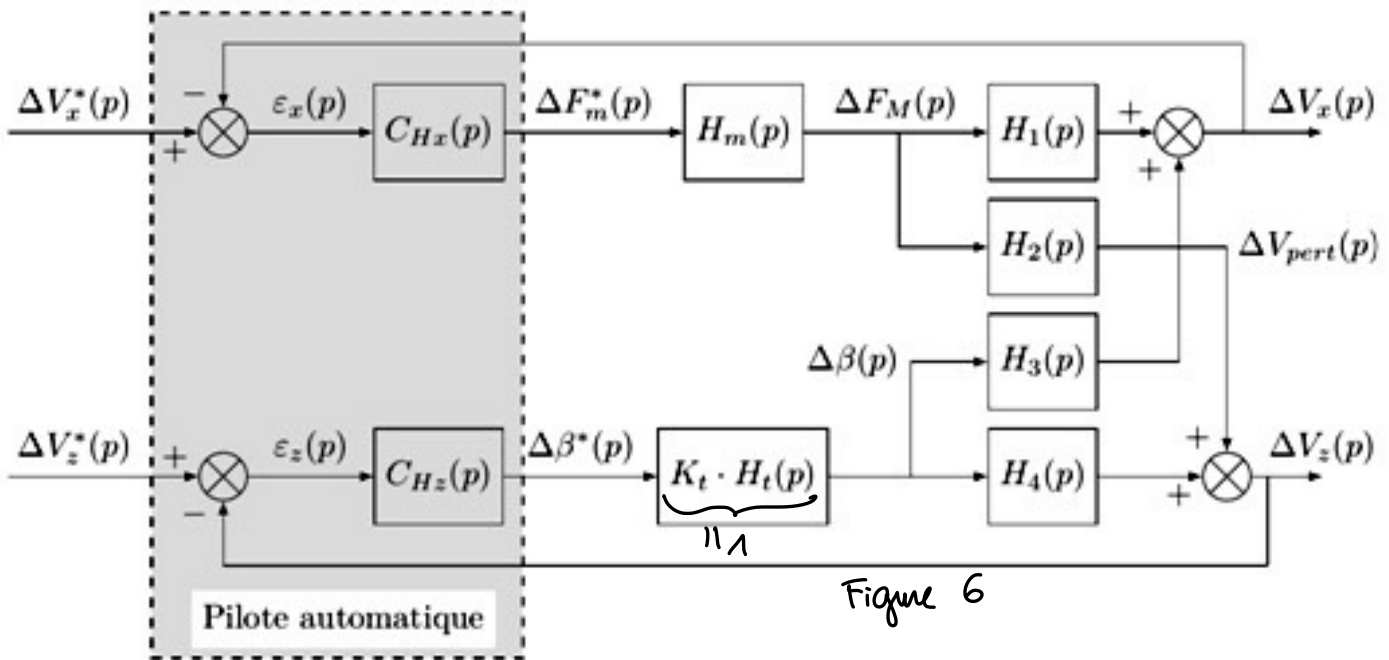
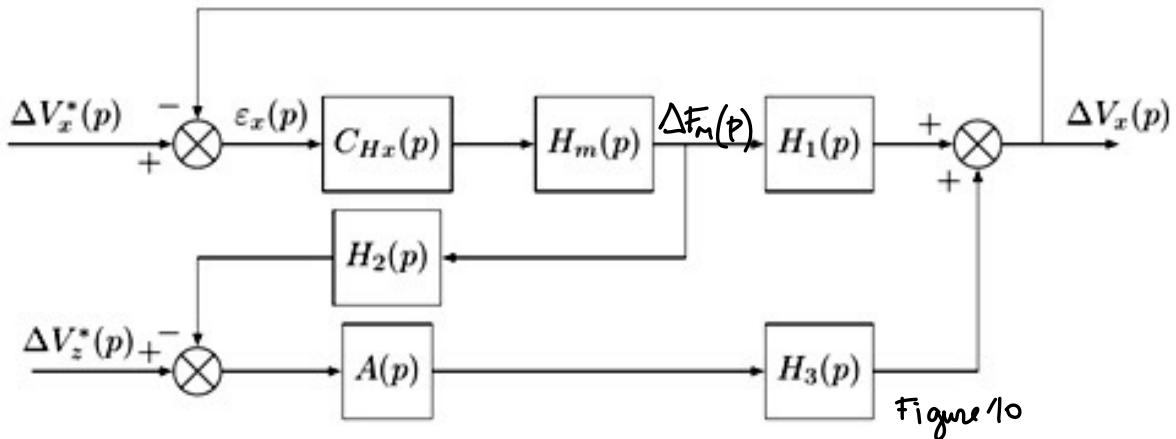
Q15:



Le réglage convient aussi bien sur la marge de phase que de gain puisque  $45^\circ = 45^\circ$  et  $18dB > 8dB$

Q 16 
$$H_{BF_{V_2}}(p) = \frac{C_{H_2} H_4(p)}{1 + C_{H_2} H_4(p)} = \frac{\Delta V_2(p)}{\Delta V_2^*(p)}$$

Q 17



La figure 6 donne :

$$\Delta V_x(p) = H_1(p) \Delta F_m(p) + H_3(p) C_{H_z}(p) (\Delta V_z^*(p) - \Delta V_z(p)) \quad (1)$$

$$\Delta V_z(p) = H_2(p) \Delta F_m(p) + H_4(p) C_{H_z}(p) (\Delta V_z^*(p) - \Delta V_z(p)) \quad (2)$$

il n'y a plus de  $\Delta V_z(p)$  dans le schéma Figure 10

il faut donc substituer la valeur de  $\Delta V_z(p)$

$$(2) \text{ donne } \Delta V_z(p) = \frac{H_2(p) \Delta F_m(p) + H_4(p) C_{u2}(p) \Delta V_z^*(p)}{1 + H_4(p) C_{u2}(p)}$$

$\Delta V_z(p)$  substitué dans l'équation (1) donne

$$\begin{aligned} \Delta V_x(p) &= H_1(p) \Delta F_m(p) + H_3(p) C_{u2}(p) \left( \frac{\Delta V_z^*(p) - H_2(p) \Delta F_m(p)}{1 + H_4(p) C_{u2}(p)} \right) \\ &= \left( H_1(p) - \frac{H_3(p) C_{u2}(p) H_2(p)}{1 + H_4(p) C_{u2}(p)} \right) \Delta F_m(p) + \frac{H_3(p) C_{u2}(p)}{1 + H_4(p) C_{u2}(p)} \Delta V_z^*(p) \end{aligned}$$

la figure 10 donne :

$$\begin{aligned} \Delta V_x(p) &= H_1(p) \Delta F_m(p) + H_3(p) A(p) (\Delta V_z^*(p) - H_2(p) \Delta F_m(p)) \\ &= (H_1(p) - A(p) H_3(p) H_2(p)) \Delta F_m(p) + H_3(p) A(p) \Delta V_z^*(p) \end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$A(p) = \frac{C_{u2}(p)}{1 + H_4(p) C_{u2}(p)}$$

Q18 : Dans la figure 10 on a : (en ne notant pas la variable  $p$ )

$$\Delta V_x(p) = H_1 H_m C_{ux} (\Delta V_x^* - \Delta V_x) + H_3 A (\Delta V_z^* - H_2 \frac{\Delta V_x}{H_1})$$

$$\Delta V_x \left( 1 + H_1 H_m C_{ux} + \frac{H_3 H_2 A}{H_1} \right) = H_1 H_m C_{ux} \Delta V_x^* + H_3 A \Delta V_z^*$$

$$\Delta V_x = \frac{H_1^2 H_m C_{ux}}{H_1 + H_1^2 H_m C_{ux} + H_3 H_2 A} \Delta V_x^* + \frac{H_1 H_3 A}{H_1 + H_1^2 H_m C_{ux} + H_3 H_2 A} \Delta V_z^*$$



La figure 11 donne :

$$\Delta V_x = AH_3 \Delta V_2^* + (H_1 - B) C_{Hx} H_m (\Delta V_x^* - \Delta V_x)$$

$$\Delta V_x (1 + (H_1 - B) C_{Hx} H_m) = AH_3 \Delta V_2^* + (H_1 - B) C_{Hx} H_m \Delta V_x^*$$

$$\Delta V_x = \frac{AH_3}{1 + (H_1 - B) C_{Hx} H_m} \Delta V_2^* + \frac{(H_1 - B) C_{Hx} H_m}{1 + (H_1 - B) C_{Hx} H_m} \Delta V_x^*$$

Par identification on a

$$\frac{H_1^2 H_m C_{Hx}}{H_1 + H_1^2 H_m C_{Hx} + H_3 H_2 A} = \frac{AH_3}{1 + (H_1 - B) C_{Hx} H_m}$$

Ce qui donne après calcul

$$B(p) = \frac{H_2(p) H_3(p) C_{H2}(p)}{1 + C_{H2}(p) H_4(p)}$$

Q19: on a une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  dans l'intervalle étudié

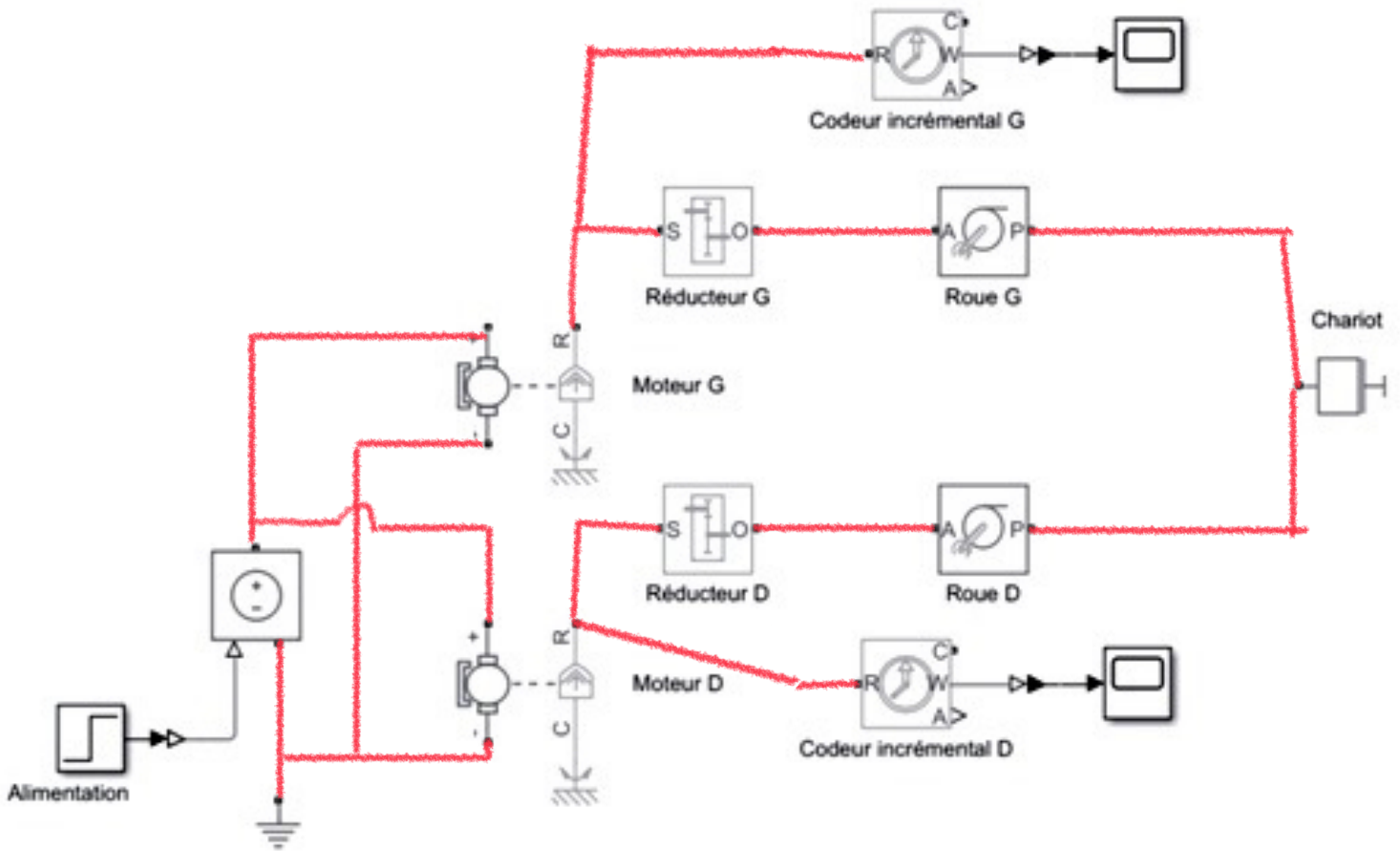
ce qui donne un intégrateur pur de type  $\frac{K_{na}}{p}$

pour  $\omega = 1 \text{ rad/s}$   $G_{db} = -55 \text{ dB} = 20 \log K_{na}$

$$\text{d'où } K_{na} = 10^{-55/20} = 1,78 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{H}_1(p) = \frac{1,78 \times 10^{-3}}{p}$$

Q20



Q21 On a  $V_{\text{roue}} = r \times \omega_{\text{red}} = 0,2 \times \frac{1}{24} \times 180 = \frac{36}{24} = \frac{9}{6} = 1,5 \text{ m/s}$

La distance de déplacement est D.

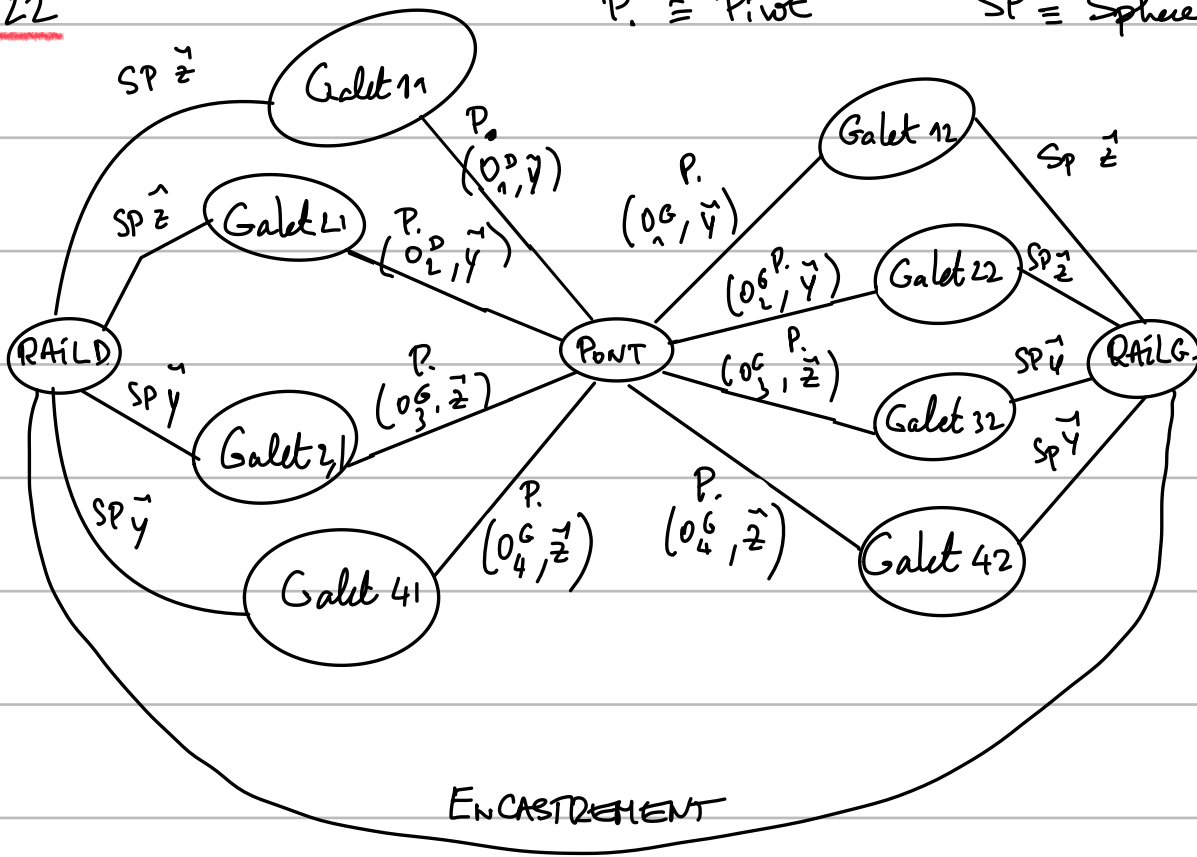
$$V = \frac{D}{\Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{D}{V} = \frac{4}{1,5} = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2,7 \text{ s} < 6 \text{ s}$$

En supposant la vitesse le C2C est vérifiée.  
Constante.

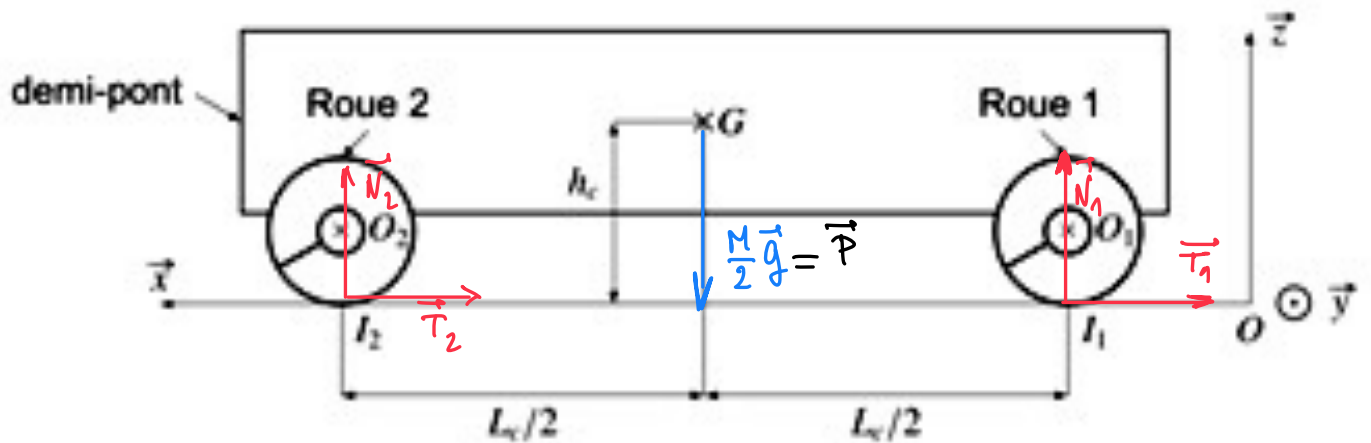
Q22

$P. \equiv \text{Pivot}$

$SP \equiv \text{Sphere PL}$



Q23



On isole la roue 2 en négligeant l'inertie de la roue et en appliquant le THD on obtient  $T_2 \times r = \underbrace{T_1}_{\approx 0} \times r$

$$\Rightarrow T_2 = 0$$

Q24 On isole l'ensemble {roue 1, roue 2, demi-pont} =  $\Sigma$

B.A.N.E :  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{T}_2$  et  $\vec{P}$   $\left\{ \mathcal{C}_{0 \rightarrow \Sigma} \right\}_{I_1} = \left\{ \mathcal{D}_{0 \rightarrow \Sigma} \right\}_{I_1}$

$$\vec{R}_d \cdot \vec{x} = -\frac{M}{2} \gamma = -T_1 \Rightarrow \frac{M}{2} \gamma = T_1 \quad (1)$$

$$\vec{R}_d \cdot \vec{y} = 0 = -\frac{M}{2} g + N_2 + N_1 \quad (2)$$

$$\vec{S}(\vec{I}_1, \vec{z}/r_0) = \vec{S}(\vec{G}, \vec{z}/r_0) + \vec{I}_1 \vec{G} \wedge -\frac{M}{2} \gamma \vec{x} = \left( \frac{L_c}{2} \vec{x} + h_c \vec{z} \right) \wedge -\frac{M}{2} \gamma \vec{x}$$

$\parallel$   
 $\vec{O}$

$$= -\frac{M}{2} h_c \gamma \vec{y}$$

$$\vec{S}(\vec{I}_1, \vec{z}/r_0) \cdot \vec{y} = -\frac{M}{2} h_c \gamma = -N_2 \times L_c + \frac{M}{2} g \frac{L_c}{2} \quad (3)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{M}^e \text{ dynamique}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Somme des moments statiques.}}$

Q25 (3) donne :  $N_2 = \frac{Mg}{4} + \frac{M}{2} \frac{h_c}{L_c} \gamma = \frac{M}{2} \left( \frac{g}{2} + \frac{h_c}{L_c} \gamma \right) = N_2$

en reportant  $N_2$  dans (2) on obtient :

$$N_1 = \frac{M}{2} g - \frac{M}{2} \left( \frac{g}{2} + \frac{h_c}{L_c} \gamma \right) = \frac{M}{2} \left( \frac{g}{2} - \frac{h_c}{L_c} \gamma \right) = N_1$$

On a donc  $B = \frac{g}{2}$  et  $A = \frac{h_c}{L_c}$

Q26 : A la limite du glissement d'après la théorie de Coulomb

$$\|\vec{T}_1\| = f \|\vec{N}_1\|, \text{ or d'après l'équation (1) } \|\vec{T}_1\| = \frac{M}{2} \gamma$$

On obtient donc l'égalité  $\frac{M}{2} \gamma_{\lim} = \frac{M}{2} (B - A \gamma_{\lim}) \times f$

d'où  $\gamma_{\lim} = \frac{fB}{1+fA}$

A.N.  $\gamma_{\lim} = \frac{0,4 \times 5}{1 + 0,4 \times 0,5} = \frac{2}{1 + 0,2}$

$$\gamma_{\lim} = \frac{2}{1,2} = \frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1,66 \text{ m.s}^{-2}$$

(Q27:)  $C_r(t) = F_r r k$   
 $J = 2J_m + M r^2 k$

Question retirée du sujet.

Q28: On a  $V(t) = k r \omega_m \Rightarrow \omega_m(t) = \frac{V(t)}{k r}$

les équation (2) donne  $U_m(t) = R_m \frac{C_m(t)}{k_m} + k_m \omega_m(t)$

l'équation de Q27, avec  $C_r(t) = 0$  donne:

$$C_m(t) = \frac{J}{2} \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

d'où  $U_m(t) = \frac{R_m J}{2 k_m} \times \frac{d\omega_m(t)}{dt} + k_m \omega_m(t)$

on a alors dans le domaine de Laplace:

$$U_m(p) = \frac{R_m J}{2 k_m} p \Omega_m(p) + k_m \Omega_m(p)$$

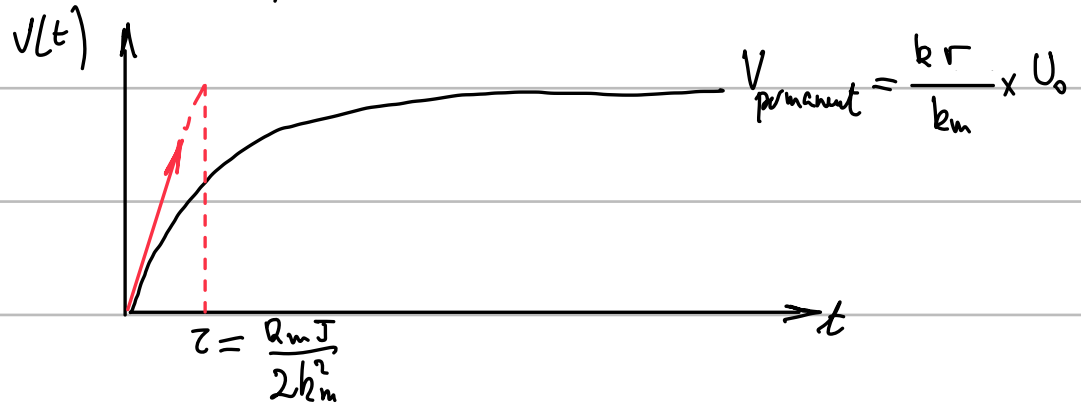
or  $\Omega_m(p) = \frac{1}{k r} V(p)$

donc  $U_m(p) = \left( k_m + p \frac{R_m J}{2 k_m} \right) \frac{V(p)}{k r}$

D'où  $\frac{V(p)}{U_m(p)} = \frac{k \cdot r}{k_m \left( 1 + \frac{R_m J}{2 k_m^2} p \right)}$  le gain statique est égal  $\bar{a} = \frac{k \cdot r}{k_m}$

et la constante de temps  $\tau = \frac{R_m J}{2 k_m^2}$

Q29: On a une courbe temporelle d'évolution de la vitesse de la forme:



$\gamma$  est donnée par la pente de la tangente à l'origine

puis  $\gamma(t) = \frac{dV(t)}{dt}$  ici  $\gamma_{\max} = \frac{\frac{k \cdot r}{k_m} U_0}{\frac{R_m J}{2 k_m^2}}$

$$\gamma_{\max} = \frac{k \cdot r \cdot U_0}{k_m} \times \frac{2 k_m^2}{R_m J} = \frac{2 k r k_m U_0}{R_m J} = \gamma_{\max}$$

A.N.  $\gamma_{\max} = \frac{2 \times \frac{1}{24} \times 0,2 \times 0,2 \times 36}{2 \times 0,016} = \frac{0,4 \times 36 \times 0,2}{24 \times 0,032} = \frac{0,4 \times 6 \times 0,2}{4 \times 0,032} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,032}$

$$\gamma_{\max} = \frac{0,12}{0,032} = \frac{12 \times 10^{-2}}{32 \times 10^{-3}} = \frac{6}{16} \times 10 = \frac{3}{8} \times 10 = 0,375 \times 10$$

$\gamma_{\max} = 3,75 \text{ m.s}^2 > 1,66 \Rightarrow$  il y a glissement

Q30: On a  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  d'où  $D = \int_0^{2t_a + T_m} v(t) dt$   
 $= \frac{v_{max} \times t_a}{2} \times 2 + v_{max} T_m$

donc  $T_m = \frac{D - v_{max} t_a}{v_{max}} = \frac{D}{v_{max}} - t_a$

Q31: L'accélération maximum est égale à  $1,6 \text{ m.s}^{-2} < 1,66 \text{ m.s}^{-2}$   
 $\Rightarrow$  il n'y a pas glissement

La distance de 4m est atteinte en  $5,4 \text{ s} < 6 \text{ s}$   
 $\Rightarrow$  le Cdl est vérifié.

Q32:  $\vec{V}_{B_c \in C_0} = \vec{V}_{B_c \in C_1} + \vec{V}_{B_c \in I_0}$   
 $= \vec{B_c B_2} \wedge \dot{\theta} \vec{y}_c + v(t) \vec{x}$   
 $= L \vec{z}_c \wedge \dot{\theta} \vec{y}_c + v(t) \vec{x} = -L \dot{\theta} \vec{x}_c + v(t) \vec{x}$   
 $\vec{V}_{B_c \in C_0} = -L \dot{\theta} \vec{x}_c + v(t) \vec{x}$

On en déduit  $\vec{\Gamma}_{B_c \in C_0} = \frac{d \vec{V}_{B_c \in C_0}}{dt} \Big|_0 = -L \ddot{\theta} \vec{x}_c + L \dot{\theta}^2 \vec{z}_c + \dot{v}(t) \vec{x}$

Q33: On isole l'ensemble  $\{c, 1\}$

B.A.M.E.:  $\vec{P}_{chariot}$ ,  $\vec{P}_{charge}$ ,  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{F}_v(t)$ , Action transmise par la glissière  $(\vec{z}_{01}, \vec{H}_{01})$



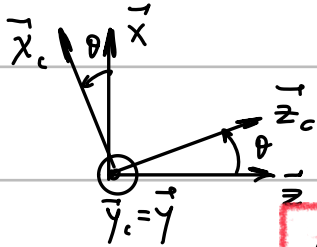
\* On applique le théorème de la résultante dynamique projeté

sur  $\vec{x}$ , cela donne :

$$\text{on a } x(t) = \ddot{x} \\ v(t) = \dot{x}$$

$$M\ddot{x} + m\vec{r}_{B_2c_0} \cdot \ddot{x} = F(t) - F_r(t)$$

$$M\ddot{x} + m(-L\ddot{\theta}\vec{x}_c \cdot \vec{x} + L\dot{\theta}^2\vec{z}_c \cdot \vec{x} + \ddot{x}) = F(t) - F_r(t)$$



$$\vec{x}_c = -\sin\theta\vec{z} + \cos\theta\vec{x}$$

$$\vec{z}_c = \cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{x}$$

donne

$$(M+m)\ddot{x} - mL\dot{\theta}\cos\theta + mL\dot{\theta}^2\sin\theta = F(t) - F_r(t)$$

\* On isole la charge c seule.

B.A.M.E :  $\vec{P}_{\text{charge}}, \vec{C}_{\text{fluide}} = -f\dot{\theta}\vec{y}$ , Efforts transmis par le pivot entre c et 1 ( $\vec{x}_{1c}, \vec{y}_{1c}$ )

On applique le théorème du moment dynamique en B

$$\begin{aligned} \text{on a : } \vec{\sigma}(B_2, c_0) &= mL^2 \cdot \ddot{\theta} \vec{y} + m\vec{B_2B_c} \wedge \vec{V}_{B_2c_0} \\ &= mL^2 \ddot{\theta} \vec{y} - mL\vec{z}_c \wedge \dot{x} \vec{x} \\ &= mL^2 \ddot{\theta} \vec{y} - mL\cos\theta \dot{x} \vec{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(B_2, c_0) &= \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(B_2, c_0) \Big|_0 + m\vec{V}_{B_2c_0} \wedge \vec{V}_{B_2c_0} \\ &= mL^2 \ddot{\theta} + mL\sin\theta \dot{\theta} \dot{x} - mL\cos\theta \ddot{x} \\ &\quad + m\dot{x}\vec{x} \wedge (-L\dot{\theta}\vec{x}_c + \dot{x}\vec{x}) \\ &= mL^2 \ddot{\theta} + mL\sin\theta \dot{\theta} \dot{x} - mL\cos\theta \ddot{x} - mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(B_2, C/O) = mL^2 \ddot{\theta} - mL \cos \theta \ddot{x}$$

En appliquant le TMDA c on a :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(B_2, C/O) &= \vec{B_2 B_c} \wedge \vec{P}_{charge} - f_c \dot{\theta} \vec{y} \\ &= -L \vec{z_c} \wedge -mg \vec{z} - f_c \dot{\theta} \vec{y} \\ &= (-mgL \sin \theta - f_c \dot{\theta}) \vec{y} \end{aligned}$$

en projection sur  $\vec{y}$  il vient :

$$mL^2 \ddot{\theta} - mL \cos \theta \ddot{x} = -(mgL \sin \theta + f_c \dot{\theta})$$

Q35:  $F(t) = Ki(t)$

Passons les équations (6) dans le domaine de Laplace :  
avec  $F_r(t) = 0$

$$(1) (M+m) p^2 X(p) - Lm p^2 \theta(p) = KI(p)$$

$$(2) L p^2 \theta(p) - p^2 X(p) + g \theta(p) + f_v p \theta(p) = 0$$

$$(1) \Rightarrow X(p) p^2 (M+m) = KI(p) + Lm p^2 \theta(p)$$

$$X(p) = \frac{KI(p) + Lm p^2 \theta(p)}{p^2 (M+m)}$$

dans (2) il vient

$$(L p^2 + f_v p + g) \theta(p) = \frac{KI(p) + Lm p^2 \theta(p)}{(M+m)}$$

$$\left( \left( L - \frac{Lm}{M+m} \right) p^2 + f_v p + g \right) \theta(p) = \frac{k}{(M+m)} I(p)$$

$$\left( \frac{L_m}{M+m} p^2 + f_v p + g \right) \theta(p) = \frac{K}{M+m} I(p)$$

$$\frac{\theta(p)}{I(p)} = \frac{K}{(M+m) \left( \frac{L_m}{M+m} p^2 + f_v p + g \right)}$$

$$\text{Puis } \frac{X(p)}{I(p)} = \frac{X(p)}{\theta(p)} \times \frac{\theta(p)}{I(p)}$$

$$\text{Or (2) donne } \frac{X(p)}{\theta(p)} = \frac{L p^2 + f_v p + g}{p^2}$$

$$\text{d'où } \frac{X(p)}{I(p)} = \frac{K (L p^2 + f_v p + g)}{(M+m) p^2 \left( \frac{L_m}{M+m} p^2 + f_v p + g \right)}$$

FIN