

Correction du TD eTras mécanique CCMP MP 2024

Q1: On applique le théorème de la résultante dynamique au système avion:

B.A.M.E. : Poids $\vec{P} = -Mg \vec{y}$

Force aérodynamique $\vec{F}_a = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \vec{x}$

Réaction du sol sur chacune des roues

$$\vec{R} = T_i \vec{x} + N_i \vec{y} \text{ avec } T_i = f N_i$$

Th. Résultante dynamique donne:

$$M \vec{a} = \vec{P} + 22 \vec{R} + \vec{F}_a$$

donc (1) $M \vec{a} \cdot \vec{x} = Ma = -22T_i + F_a$

(2) $M \vec{a} \cdot \vec{y} = 0 = -Mg + 22N_i \Rightarrow N_i = \frac{Mg}{22}$

(2) dans (1) donne $Ma = -22 \cancel{f} \frac{Mg}{\cancel{22}} + F_a$

$$a = -g - \frac{1}{2M} \rho S C_x v^2$$

Q2 Le théorème de l'énergie cinétique donne:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{INT}} + P_{\text{EXT}}, \text{ la forme intégrée donne:}$$

$$\Delta E_c = W_{\text{INT}} + W_{\text{EXT}}$$

Sachant que $W_i = \int_0^T P_{int} dt$ $W_{int} = \int_0^T P_{int} dt$

On suppose qu'au moment de l'atterrissage aucune pièce est en mouvement dans l'avion, les P_{int} sont donc nulle, les P_{int} sont celles développées par le poids, les forces de frottement et la force aérodynamique

$$P_{poids} = \begin{Bmatrix} -Mg \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_a \vec{x} \end{Bmatrix} = 0$$

$$P_{Ti} = 22x \begin{Bmatrix} -\frac{Mg}{22} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v(x) \vec{x} \end{Bmatrix} = -Mg v(x)$$

$$P_{Fa} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2(x) \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 \\ v(x) \vec{x} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^3(x)$$

d'où $\Delta E_c = -\int_0^T Mg v(x) dt - \int_0^T \frac{1}{2} \rho S C_x v^3(x) dt$

$$\frac{1}{2} M v_a^2 = -Mg \int_0^T v(x) dt - \frac{1}{2} \rho S C_x \int_0^T v^3(x) dt$$

l'Énergie cinétique à dissipée est égale à

$$\frac{1}{2} M v_a^2 = \frac{1}{2} 400 \times 10^3 \times \left(\frac{260 \times 1000}{3600} \right)^2 = 16 \text{ J}$$

Q3:

```
1 def F(vi):
2     return A0 + A1*vi**2
3
4 def eulerExplicite(Cini, FI):
5     V = [Cini] # liste des vitesses
6     t = [0]    # liste de temps
7     pas = 0.001 # dt en seconde
8     v = Cini   # vitesse à l'instant i
9     Wf = [0]   # liste d'énergie due aux actions de frottement
10    Wa = [0]   # liste d'énergie due aux actions aérodynamique
11    x = [0]    # liste de distance
12    Ec0 = 1/2*M*v0**2 # énergie cinétique initiale
13    while v > 0 : # A COMPLETER
14        v = pas * F(v) + v # A COMPLETER
15        x.append(x[-1]+v*pas) # A COMPLETER
16        V.append(v)
17        Wf.append(Wf[-1]+(A0*M*v*pas))
18        Wa.append(Wa[-1]+(A1*M*v**3*pas) # A COMPLETER
19        t.append(t[-1]+pas)
20    return V, x, t, Wf, Wa
21
22 V, x, t, Wf, Wa = eulerExplicite(v0,F)
```

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = A_0 + A_1 v(t)^2$$

$$\frac{v(h+1) - v(h)}{\text{pas}} = A_0 + A_1 v(h)^2$$

$$v(h+1) = \text{pas} \underbrace{\left(A_0 + A_1 v(h)^2 \right)}_{F(v(h))} + v(h)$$

Q4: On suppose le frottement constante, il est donc indépendant de la vitesse de l'avion, l'évolution de l'énergie de frottement est donc linéaire

Q5:

	Sans inverseur		Avec inverseur	
	Distance d'arrêt	Validation	Distance d'arrêt	Validation
Piste sèche	800 m	😊	700 m	😊
Piste glacée	3850 m	😞	1200 m	😊

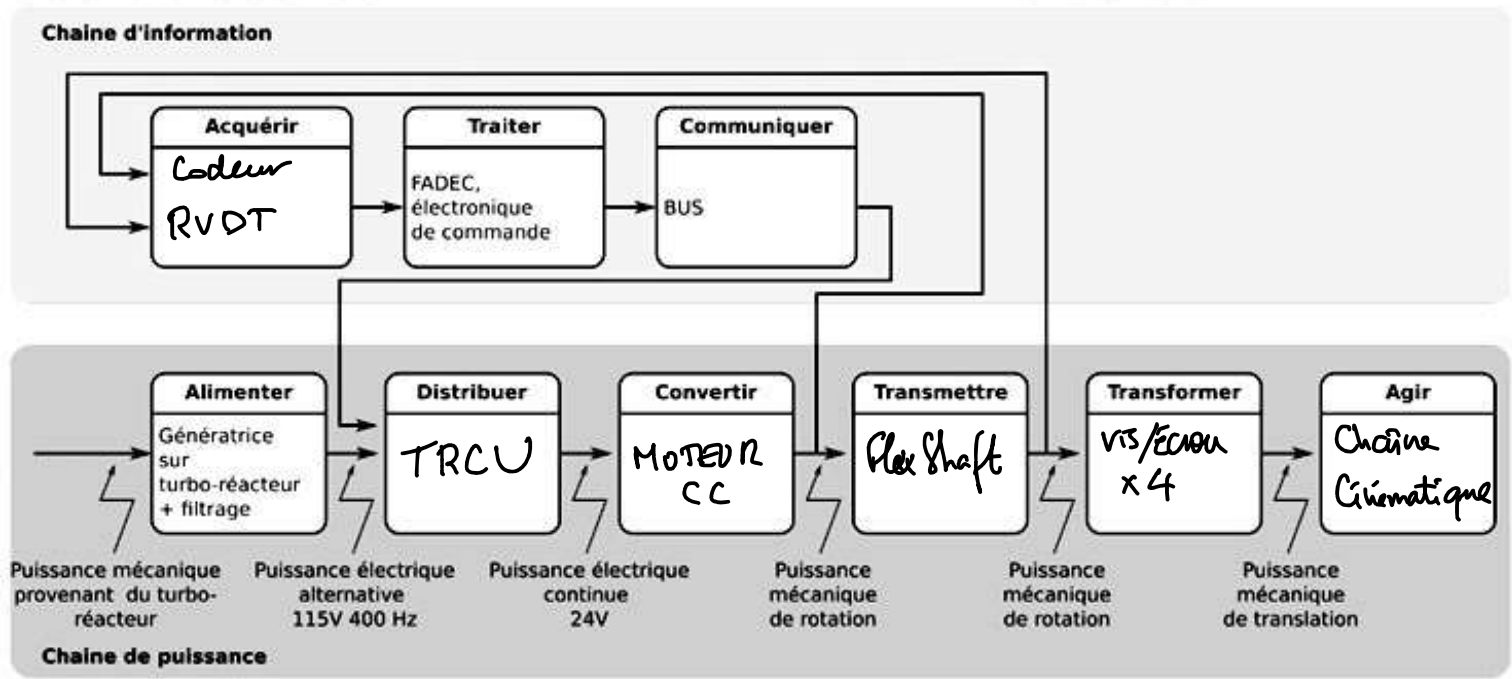
A Roissy l'avion doit laisser $\frac{1}{3}$ de la piste libre, c'est à dire qu'il doit se poser sur $\frac{2}{3}$ piste = $\frac{2}{3} \times 2700 = 1800$ m

Q6: Sur piste sèche l'intérêt de l'inverseur de pousse est faible puisque le pourcentage d'énergie absorbée par le freinage reste $\approx$ le même.

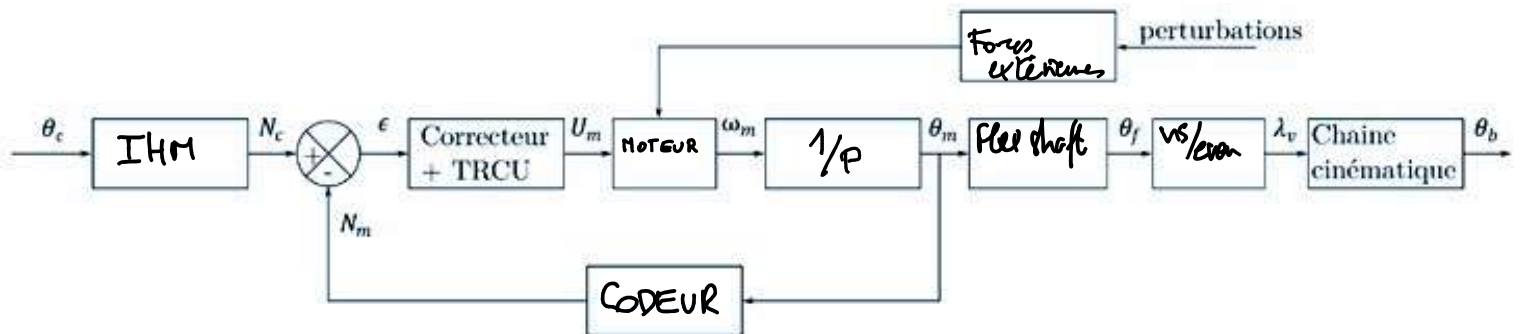
En revanche sur piste glacée, l'apport est considérable puisque il permet à l'A380 de se poser sur piste glacée alors que sans cela n'aurait pas été possible.

Ce qui impose un déviation vers un aéroport non gelé (cela arrive régulièrement dans le nord est des USA, en hiver).

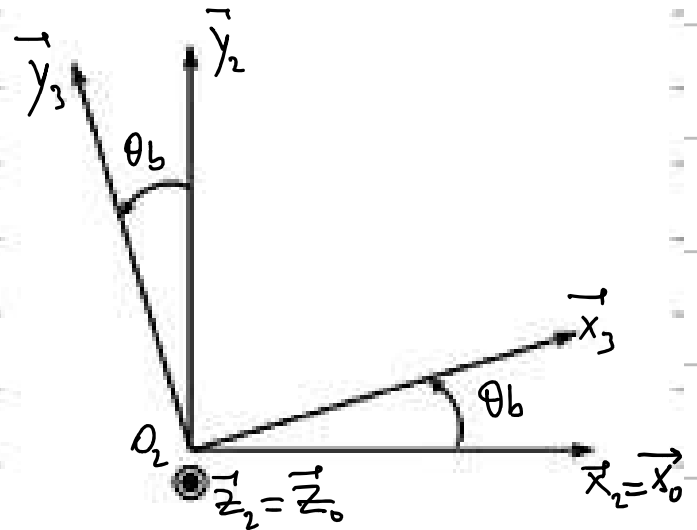
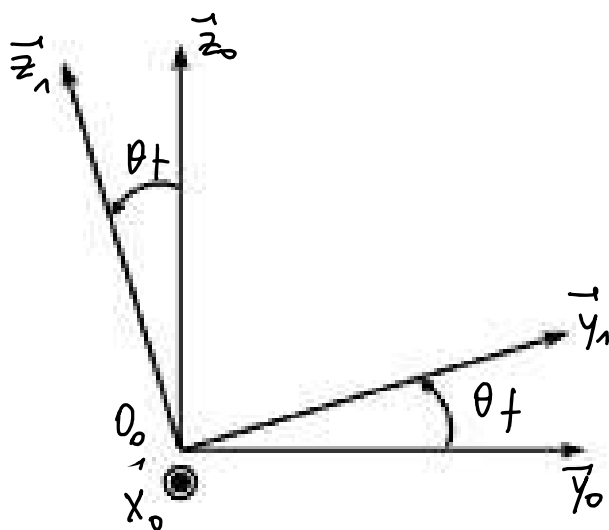
Q7 :

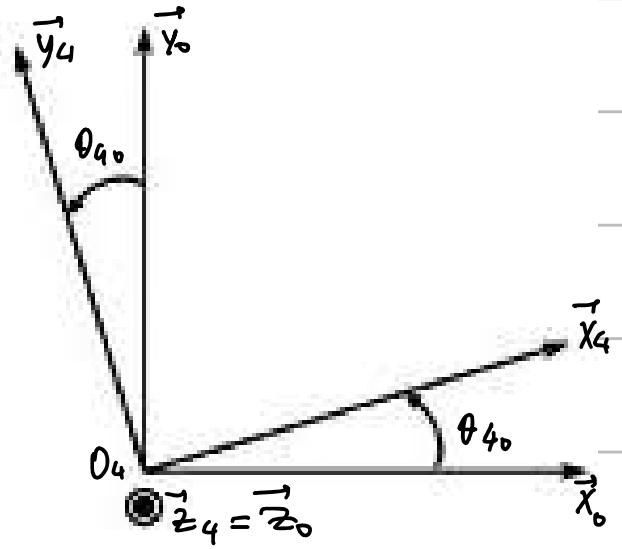
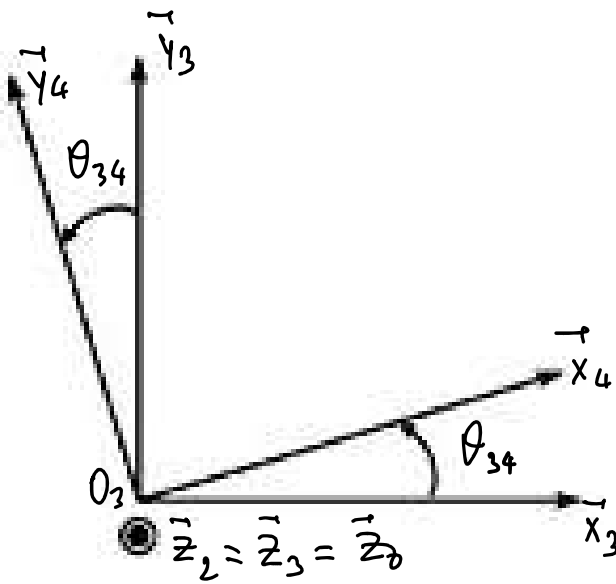


Q8 :



Q9 :





Q10: Faisons une fermeture géométrique:

$$\vec{O_1 O_2} + \vec{O_2 O_3} + \vec{O_3 O_4} + \vec{O_4 O_1} = \vec{0}$$

$$\vec{G} = \lambda(t) \vec{x}_0 + L_3 \vec{x}_3 + L_4 \vec{y}_4 - L \vec{x}_0 - H \vec{y}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{G} = \lambda(t) \vec{x}_0 + L_3 (\cos \theta_b \vec{x}_0 + \sin \theta_b \vec{y}_0) + L_4 (-\sin(\theta_{34} + \theta_b) \vec{x}_0 + \cos(\theta_{34} + \theta_b) \vec{y}_0) - L \vec{x}_0 - H \vec{y}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{G} \cdot \vec{x}_0 = 0 = \lambda(t) + L_3 \cos \theta_b - L_4 \sin(\theta_{34} + \theta_b) - L \quad (1)$$

$$\vec{G} \cdot \vec{y}_0 = 0 = L_3 \sin \theta_b + L_4 \cos(\theta_{34} + \theta_b) - H \quad (2)$$

$$(1) \text{ donne } L_4 \sin(\theta_{34} + \theta_b) = \lambda(t) + L_3 \cos \theta_b - L$$

$$(2) \text{ donne } L_4 \cos(\theta_{34} + \theta_b) = H - L_3 \sin \theta_b$$

$$(1)^2 + (2)^2 \text{ donne } L_4^2 = (\lambda(t) - L + L_3 \cos \theta_b)^2 + (H - L_3 \sin \theta_b)^2$$

$$(L_4^2 - (H - L_3 \sin \theta_b)^2)^{1/2} = \lambda(t) - L + L_3 \cos \theta_b$$

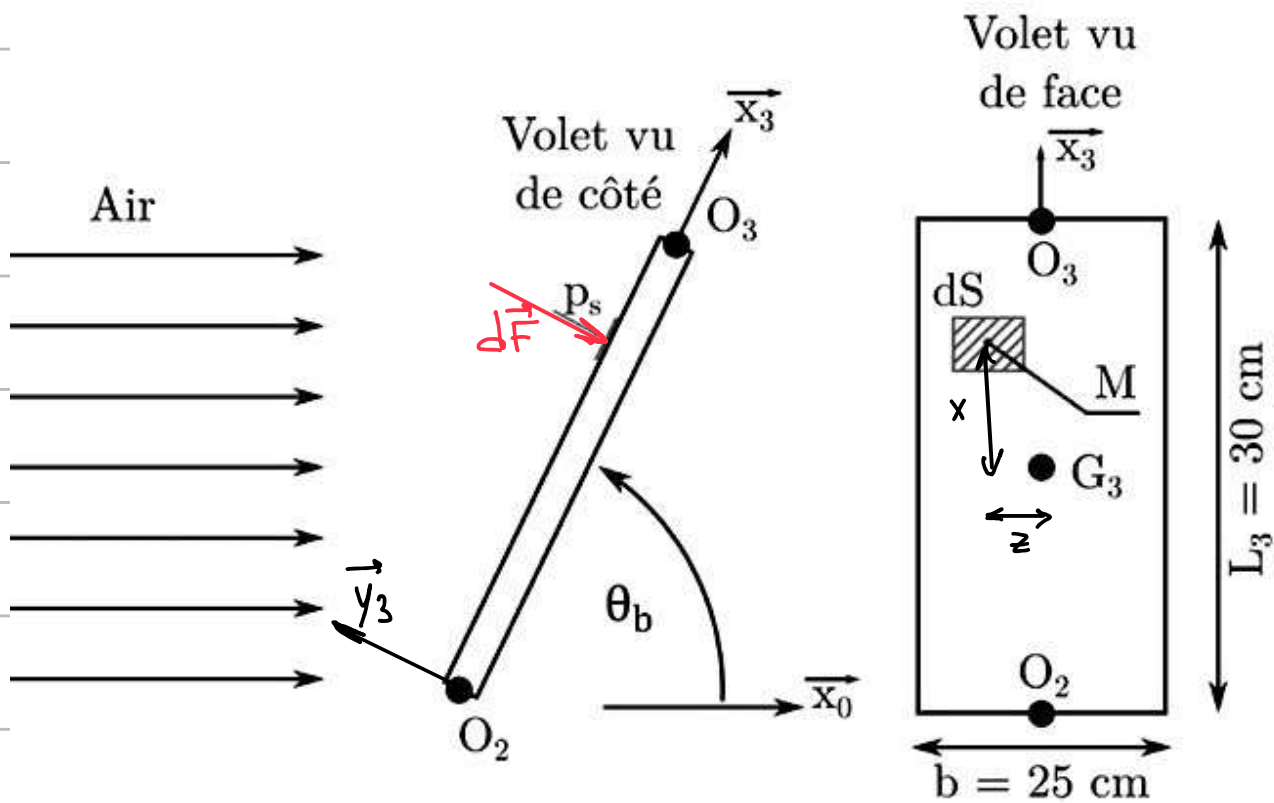
$$\lambda(t) = \sqrt{(L_4^2 - (H - L_3 \sin \theta_b)^2) + L - L_3 \cos \theta_b}$$

Q11: D'après la figure 9 θ_b variant en 5° et 85°
représente $\Delta = f(\theta_b)$

alors $C = f(85^\circ) - f(5^\circ) = 790 - 240 = 550 \text{ mm}$

on vérifie l'exigence 1.2.2 du cahier des charges.

Q12:



On a $\vec{dF} = -p_s dS \vec{y}_3$ d'où $\vec{F} = \int_{x=-\frac{L_3}{2}}^{x=\frac{L_3}{2}} \int_{z=-\frac{b}{2}}^{z=\frac{b}{2}} -p_s dx dz \vec{y}_3$

$$= -p_s \left[x \right]_{-\frac{L_3}{2}}^{\frac{L_3}{2}} \left[z \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \vec{y}_3$$

$$\vec{F} = -p_s b L_3 \vec{y}_3$$

de même $\vec{dM}_{O_2, dF} = \vec{O_2 M} \wedge \vec{dF} = (z \vec{z}_3 + x \vec{x}_3) \wedge -p_s dS \vec{y}_3$

$$d'o\grave{u} \quad d\vec{M}_{O_2, d\vec{F}} = p_s dS \left(z \vec{x}_3 - x \vec{z}_3 \right)$$

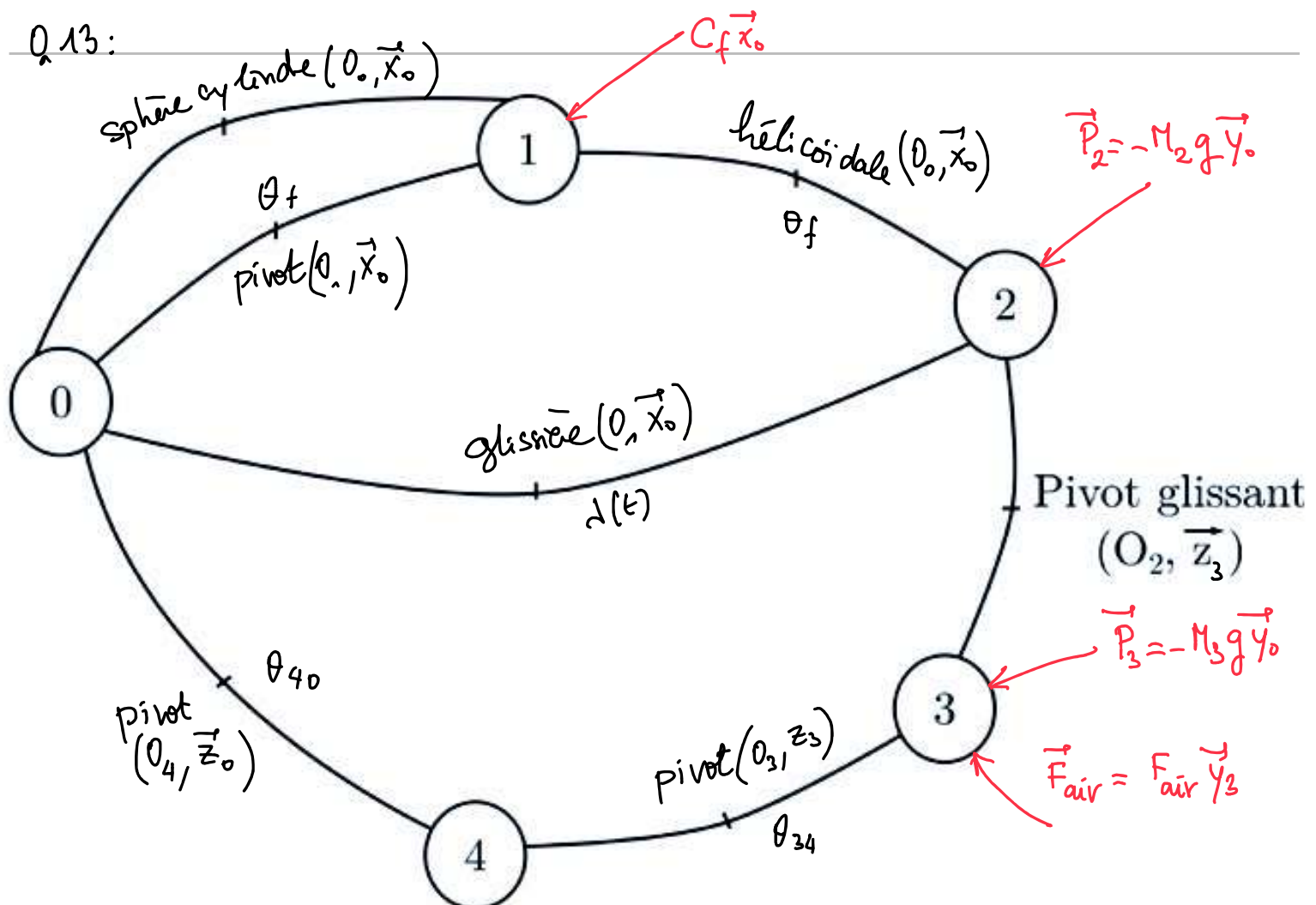
$$\vec{M}_{O_2, d\vec{F}} = p_s \int_{z=-\frac{b}{2}}^{z=\frac{b}{2}} \int_{x=0}^{x=L_3} (z \vec{x}_3 - x \vec{z}_3) dx dz$$

$$= p_s \left(\begin{bmatrix} \frac{z^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0^{L_3} \vec{x}_3 - \begin{bmatrix} z \\ -\frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_0^{L_3} \vec{z}_3 \right)$$

$$\vec{M}_{O_2, d\vec{F}} = -p_s b \frac{L_3^2}{2} \vec{z}_3$$

$$\left\{ \mathcal{L}_{air \rightarrow 3} \right\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} -p_s b L_3 \vec{y}_3 \\ -p_s b \frac{L_3^2}{2} \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_{O_2}$$

Q.13:



Q14: La vis 1 est un solide de révolution autour de l'axe $\vec{x}_0$, donc la matrice d'inertie est diagonale avec $I_{yy} = I_{zz}$

Le volet 3 est un parallélépipède rectangle, il a deux axes de symétrie, donc la matrice est diagonale.

Q15 Le solide 1 est en rotation $E_{c_1} = \frac{1}{2} A_1 \omega_1^2$
 autour de $\vec{x}_0$

Le solide 2 est en translation $E_{c_2} = \frac{1}{2} M_2 V_{20}^2$

Le solide 3 est en rotation et en translation!

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/2} + \vec{V}_{G_3 \in 2/1} + \underbrace{\vec{V}_{G_3 \in 1/0}}_{\parallel \vec{0}}$$

$$= \underbrace{\vec{V}_{O_2 \in 3/2}}_{\parallel \vec{0}} + \vec{G_3 O_2} \wedge \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{V}_{O_2 \in 2/1} + \underbrace{\vec{G_3 O_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}}_{\parallel \vec{0}}$$

$$= -\frac{L_3}{2} \vec{x}_3 \wedge \omega_b \vec{z} + V_{20} \vec{x}_0$$

$$= +\frac{L_3}{2} \omega_b \vec{y}_3 + V_{20} \vec{x}_0$$

$$= \frac{L_3}{2} \omega_b (-\sin \theta_b \vec{x}_0 + \cos \theta_b \vec{y}_0) + V_{20} \vec{x}_0$$

$$E_{c_3} = \frac{1}{2} M_3 V_{G_3}^2 + \frac{1}{2} \left(C_3 + M_2 \frac{L_3^2}{4} \right) \omega_b^2$$

$$E_{c_3} = \frac{1}{2} M_3 \left(\left(V_{20} - \frac{L_3}{2} \omega_b \sin \theta_b \right)^2 + \left(\frac{L_3}{2} \omega_b \cos \theta_b \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(C_3 + \frac{L_3^2}{4} M_3 \right) \omega_b^2$$

$$E_{c3} = \frac{1}{2} M_3 \left(V_{20}^2 - V_{20} L_3 \omega_b \sin \theta_b + \frac{L_3^2}{4} \omega_b^2 \sin^2 \theta_b + \frac{L_3^2}{4} \omega_b^2 \cos^2 \theta_b \right) + \frac{1}{2} \left(C_3 + \frac{L_3^2}{4} M_3 \right) \omega_b^2$$

$$E_{cT} = \frac{1}{2} \left(A_1 \omega_f^2 + M_2 V_{20}^2 + M_3 \left(V_{20}^2 - V_{20} L_3 \omega_b \sin \theta_b + \frac{L_3^2}{4} \omega_b^2 \right) + \left(C_3 + \frac{L_3^2}{4} M_3 \right) \omega_b^2 \right)$$

$$\text{Or } V_{20} = \frac{P}{2\pi} \omega_f \quad \omega_b = K_{cc} V_{20} \quad \text{avec } \omega_b = \dot{\theta}_b$$

$$\text{d'où } \omega_b = \frac{K_{cc} P}{2\pi} \omega_f \quad \omega_f = \dot{\theta}_f$$

$$E_{cT} = \frac{1}{2} \left(A_1 \omega_f^2 + (M_2 + M_3) \frac{P^2}{(2\pi)^2} \omega_f^2 - M_3 \frac{P}{2\pi} \omega_f L_3 \frac{K_{cc} P}{2\pi} \omega_f \sin \theta_b + M_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} \frac{K_{cc}^2 P^2}{(2\pi)^2} \omega_f^2 + \left(C_3 + \frac{L_3^2}{4} M_3 \right) \frac{K_{cc}^2 P^2}{(2\pi)^2} \omega_f^2 \right)$$

$$E_{cT} = \frac{1}{2} \left(A_1 + \frac{P^2}{(2\pi)^2} \left(M_2 + M_3 + M_3 \frac{L_3^2}{4} K_{cc}^2 + K_{cc}^2 \left(C_3 + \frac{L_3^2}{4} M_3 \right) \right) - M_3 \frac{P}{2\pi} L_3 \frac{K_{cc} P}{2\pi} \sin \theta_b \right) \omega_f^2$$

$$J_{eq} = A_1 + \frac{P^2}{(2\pi)^2} \left[\left(M_2 + M_3 \right) + \frac{M_3 L_3^2 K_{cc}^2}{2} + K_{cc}^2 C_3 \right] - M_3 \frac{P^2 K_{cc} L_3}{4} \sin \theta_b$$

Q16: Il faut faire apparaître les solides 1 et 3, 4 n'a pas d'effet puisque sa masse est négligée. Si on isole $\{1, 2, 3\}$, les efforts inter-solides intérieurs sont ceux échangés par les liaisons mécaniques

hypothesées parfaites. Les puissances extérieures sont générées par les poids de 2 et 3, le couple appliqué sur 1 et la force de l'air sur 3.

on a alors en appliquant le théorème de l'énergie cinétique (ou énergie/puissance) :

$$\frac{d E_{CT}}{dt} = \underset{0}{\underset{O}{P_{int}}} + P_{ext}$$

$$P_{\vec{P}_2} = \left\{ \begin{array}{c} -M_2 g \vec{Y}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_2 \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{G_2} = 0$$

$$P_{\vec{P}_3} = \left\{ \begin{array}{c} -M_3 g \vec{Y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_b \vec{Z}_0 \\ \frac{L_3}{2} \omega_b \vec{Y}_3 + V_2 \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{G_3} = -M_3 g \frac{L_3}{2} \omega_b \cos \theta_b$$

$$P_{\vec{F}_{air}} = \left\{ \begin{array}{c} F_{air} \vec{Y}_3 \\ \frac{L_3}{2} F_{air} \vec{Z}_3 \end{array} \right\}_{O_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_b \vec{Z}_0 \\ V_2 \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{O_2} = -F_{air} V_2 \sin \theta_b + \omega_b \frac{L_3}{2} F_{air}$$

$$P_{\vec{C}_f} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_f \vec{X}_0 \end{array} \right\}_{V_{rel}} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_f \vec{X}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{V_{rel}} = C_f \omega_f$$

$$\text{on a } \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (J_{eq} \omega_f^2) = -M_3 g \frac{L_3}{2} \omega_b \cos \theta_b - F_{air} V_2 \sin \theta_b + C_f \omega_f + \omega_b \frac{L_3}{2} F_{air}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(A_{eq} + B_{eq} \sin \theta_b \right) \omega_f^2 \right] = -M_3 g \frac{L_3}{2} \frac{P}{2\pi} K_{cc} \cos \theta_b \omega_f - F_{air} \frac{P}{2\pi} \omega_f \sin \theta_b + C_f \omega_f + \frac{L_3}{2} F_{air} \omega_f \times \frac{P}{2\pi} K_{cc}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E_{CT}) &= (A_{eq} + B_{eq} \sin \theta_b) \dot{\omega}_f \omega_f + \frac{1}{2} B \omega_b \cos \theta_b \omega_f^2 \\ &= (A_{eq} + B_{eq} \sin \theta_b) \dot{\omega}_f \omega_f + \frac{1}{2} \frac{P}{2\pi} k_{cc} \omega_f \cos \theta_b \omega_f^2\end{aligned}$$

en simplifiant de chaque côté de l'égalité par ω_f
on obtient

$$(A_{eq} + B_{eq} \sin \theta_b) \dot{\omega}_f + \frac{P k_{cc} \cos \theta_b}{4\pi} \omega_f^2 = C_f + \frac{L_3 k_{cc} F_{air} P}{4\pi} - \frac{P F_{air} \sin \theta_b}{2\pi} - \frac{M_3 g L_3 P k_{cc} \cos \theta_b}{4\pi}$$

FIN

