

Voile solaire de la Seine Musicale

I - Introduction

Question 1 À partir de la figure 3, déterminer la vitesse azimutale maximale du soleil en degrés par seconde, notée $\Omega_{a \max}$. En déduire le déplacement maximal du soleil pendant un intervalle de 15 min, noté $\varphi_{a \max}$ en degrés.

$\Omega_{a \max}$ correspond à la valeur maximale de la dérivé (pente de la tangente à la courbe), soit à 14h. La lecture graphique ne permet d'avoir une précision à ± 1 h en abscisse et $\pm 60^\circ$ en ordonnée.

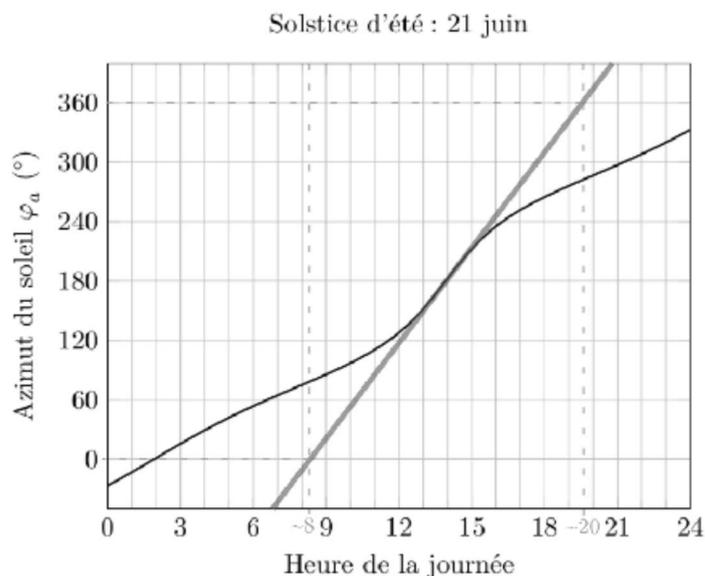


Figure 3 Évolution de l'azimut du soleil (φ_a en degrés) au solstice d'été

On a alors :

$$\Omega_{a \max} = \frac{360 - 0}{20 - 8} = 8 \cdot 10^{-2} / s$$

$$\varphi_{a \max} = \Omega_{a \max} \cdot \Delta t$$

$$\varphi_{a \max} = 15 \times 60 \times 8 \cdot 10^{-2} = 7^\circ$$

Question 2 Sachant que les phases d'accélération et de décélération durent chacune 3 s, déterminer la durée de déplacement d_{cst} à la vitesse maximale (de t_1 à t_2) pour suivre le soleil pendant l'intervalle de temps de 15 min. Exprimer d_{cst} en fonction de Ω_{\max} et de $\varphi_{a \max}$.

La distance parcourue est égale à l'aire sous la courbe :

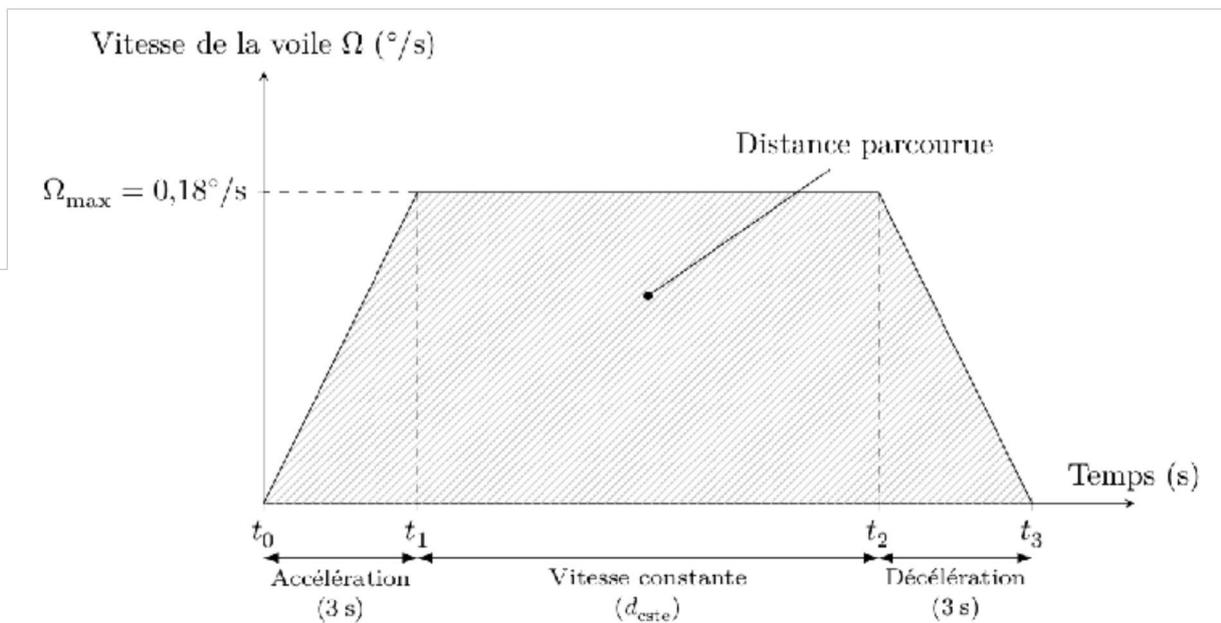


Figure 4 Profil de vitesse de la voile

On a alors :

$$\varphi_{a\ max} = \frac{1}{2}\Omega_{max}(t_1 - t_0) + \Omega_{max}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\Omega_{max}(t_3 - t_2)$$

Or $t_1 - t_0 = t_3 - t_2$ et $t_2 - t_1 = d_{cst}$

$$\Leftrightarrow \varphi_{a\ max} = \Omega_{max}(t_1 - t_0 + d_{cst})$$

$$\Leftrightarrow d_{cst} = \frac{\varphi_{a\ max}}{\Omega_{max}} + t_0 - t_1$$

Question 3 En déduire la durée totale du déplacement, d_{totale} (de t_0 à t_3), avec ce profil de vitesse. Conclure par rapport au cahier des charges.

$$d_{totale} = t_3 - t_0 = (t_1 - t_0) + d_{cst} + (t_3 - t_2)$$

$$d_{totale} = (t_1 - t_0) + \left(\frac{\varphi_{a\ max}}{\Omega_{max}} + t_0 - t_1\right) + (t_3 - t_2)$$

$$d_{totale} = 3 + \left(\frac{7}{0,18} - 3\right) + 3 = 42s$$

Le cahier des charges spécifie que le déplacement doit être inférieur à 1 min, il est donc respecté.

II - Analyse de la commande en boucle ouverte du déplacement de la voile solaire

Objectif : Analyser le déplacement des deux demi-voiles lors de l'utilisation d'une commande simple en boucle ouverte.

Question 4 À partir des courbes figure 9, conclure quant au respect des exigences Id 1.1 et Id 1.2.

Vérification de l'exigence 1.1 :

Le chariot se déplace de 3,651 mètres en 49 secondes, ce qui donne une vitesse de déplacement

$$v_{\text{déplacement}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

A.N. $v_{\text{déplacement}} = \frac{3,651}{49} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$

Soit une vitesse de déplacement angulaire $\omega_{\text{déplacement}} = \frac{v_{\text{déplacement}}}{R}$

A.N. $\omega_{\text{déplacement}} = \frac{7,5 \cdot 10^{-2}}{22,75} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} = 0,19^\circ/\text{s} (> 0,18^\circ/\text{s})$

Cette exigence n'est donc pas respectée.

Vérification de l'exigence 1.2 :

49 s < 1 min donc l'exigence 1.2 est bien respectée.

Question 5 Sur la figure A du document réponse, compléter les liens du modèle proposé pour prendre en compte les deux capteurs.

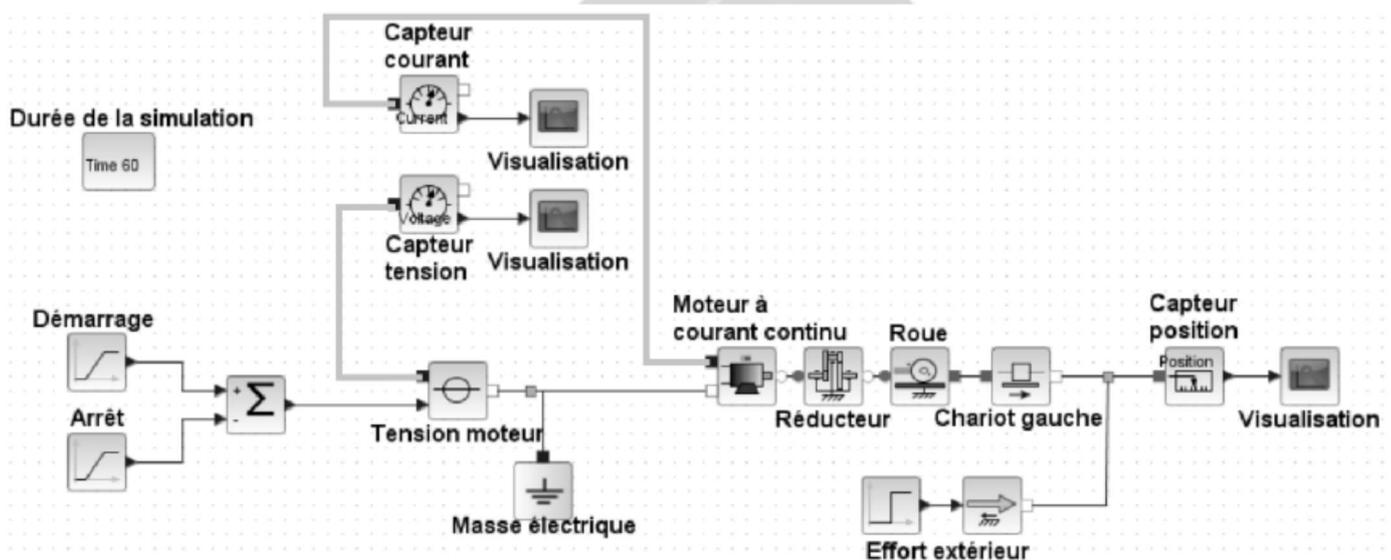


Figure A Modèle multiphysique enrichi (question 5)

Question 6 On suppose que les deux chariots centraux sont pilotés avec la même loi de commande, en déduire le défaut maximal de position relatif entre les deux chariots dans le cas réel présenté figure 10. Conclure quant au respect de l'exigence concernée.

L'écart de position entre les deux voiles sera de $3,651 - 3,633 = 0,018 \text{ m} > 0,015 \text{ m}$ donc l'exigence 1.5 n'est pas respectée. La perturbation du vent a donc une influence sur la précision du système.

III - Étude de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée

III.1 - Modélisation dynamique de la voile

Objectif : Dans cette sous-partie, il est proposé de s'intéresser à la modélisation de la chaîne d'énergie et des différentes perturbations à considérer dans l'asservissement permettant le déplacement d'un chariot central afin de déterminer l'équation dynamique du moteur.

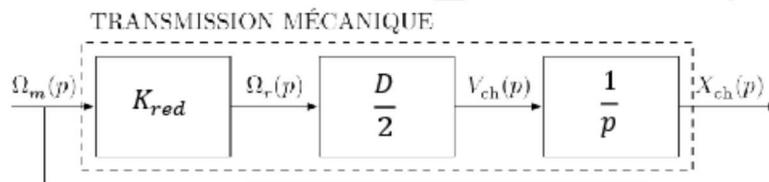
III.1.a - Modélisation de la transmission mécanique

Question 7 En précisant l'hypothèse utilisée, exprimer la vitesse de déplacement de la demi-voile V_{ch} en fonction de ω_m , de D et de K_{red} .

En supposant les liaisons sans jeux et les liaisons entre les galets et le rail circulaire sans glissement, on a alors :

$$V_{ch} = \omega_r \cdot \frac{D}{2} = K_{red} \cdot \omega_m \cdot \frac{D}{2}$$

Question 8 À partir des informations précédentes, compléter les fonctions de transfert de la zone « Transmission mécanique » du schéma-bloc sur la figure B du document réponse.



III.1.b - Modélisation des perturbations

III.1.b.i - Détermination de l'effort du vent sur la demi-voile

Question 9 Exprimer l'effort élémentaire du vent sur la demi-voile s'appliquant au point P sur la surface dS , noté $d\vec{F}_{vent}$.

Par définition $d\vec{F}_{vent} = f dS \vec{u} = f R^2 \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{u}$

Question 10 Déterminer par intégration l'expression du moment de l'action mécanique du vent selon l'axe (O, \vec{z}) , $\vec{M}_{O_{vent}} \cdot \vec{z}$ s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe (O, \vec{z}) en fonction de R , f et α .

$$\vec{M}_{O_{vent}} \cdot \vec{z} = \int d\vec{m}_{O_{vent}} \cdot \vec{z} \quad (\text{car } \vec{z} \text{ est fixe})$$

Avec

$$\begin{aligned} d\vec{m}_{O_{vent}} \cdot \vec{z} &= (\vec{OP} \wedge d\vec{F}_{vent}) \cdot \vec{z} = (R\vec{e}_r \wedge f dS \vec{u}) \cdot \vec{z} = (R(\cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{t}) \wedge f dS \vec{u}) \cdot \vec{z} \\ &= \left(R(\cos \theta \vec{z} + \sin \theta (\cos \varphi \vec{x}_v + \sin \varphi \vec{y}_v)) \wedge f dS (\cos \alpha \vec{x}_v + \sin \alpha \vec{y}_v) \right) \cdot \vec{z} \\ &= (Rf \sin \theta (\cos \varphi \sin \alpha - \sin \varphi \cos \alpha)) dS = (R^3 f \sin^2 \theta (\cos \varphi \sin \alpha - \sin \varphi \cos \alpha)) d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O_{vent}} \cdot \vec{z} &= \iint (R^3 f \sin^2 \theta (\cos \varphi \sin \alpha - \sin \varphi \cos \alpha)) d\theta d\varphi \\ &= R^3 f \sin \alpha \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos \varphi d\varphi = R^3 f \sin \alpha \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin \varphi \right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \quad \left(\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{O_{\text{vent}}} \cdot \vec{z} = R^3 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

Question 11 On définit F_{vent} tel que $(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{\text{vent}} \overrightarrow{x_{C_G}}) \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O_{\text{vent}}} \cdot \vec{z}$. En déduire l'expression de F_{vent} l'effort du vent au point C_G s'opposant au déplacement du chariot central.

$$(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{\text{vent}} \overrightarrow{x_{C_G}}) \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O_{\text{vent}}} \cdot \vec{z} \Leftrightarrow (R \overrightarrow{y_{C_G}} \wedge F_{\text{vent}} \overrightarrow{x_{C_G}}) \cdot \vec{z} = R^3 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow -R F_{\text{vent}} = R^3 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow F_{\text{vent}} = -R^2 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

Question 12 Pour quelle valeur de α cet effort est-il maximal ? Déterminer la valeur maximale de $|F_{\text{vent}}|$.

Cet effort est maximal pour $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, on alors $|F_{\text{vent}}| = R^2 f \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$

$$\text{A.N. } |F_{\text{vent}}| = 22,750^2 \cdot 54,7 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} = 17018 \text{ N}$$

III.1.b.ii - Détermination du moment de résistance au roulement des galets sur le rail

Question 13 En isolant l'ensemble $cc = \{\text{chariot central} + \text{galets de roulement}\}$ et en précisant le théorème utilisé déterminer $F_I + F_J$.

J'isole $cc = \{\text{chariot central} + \text{galets de roulement}\}$

BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures) :

$$\{\tau_{pes \rightarrow cc}^I\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_{cc} \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\{\tau_{r \rightarrow cc}^I\} = \left\{ \begin{array}{c} F_I \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

$$\{\tau_{r \rightarrow cc}^J\} = \left\{ \begin{array}{c} F_J \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J$$

$$\{\tau_{v \rightarrow cc}\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{m_v}{2} \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_F$$

L'ensemble est en mouvement rectiligne uniforme, on peut alors lui appliquer le théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{z} :

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow cc} \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m_v}{2} \cdot g - m_{cc} \cdot g + F_I + F_J = 0 \Leftrightarrow F_I + F_J = \left(\frac{m_v}{2} + m_{cc}\right) g$$

Question 14 Exprimer le moment de résistance au roulement en C, noté \vec{M}_C , en fonction de F_I et δ .

$$\vec{M}_C = \vec{M}_I + \vec{CI} \wedge F_I \vec{z} = -\delta F_I \overrightarrow{y_{C_G}}$$

Question 15 Par analogie, exprimer \vec{M}_D en fonction de F_J et δ , puis exprimer le moment de résistance au roulement du chariot central $\vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D$ en fonction de δ , m_v , m_{cc} et g .

$$\text{Par analogie } \vec{M}_D = -\delta F_J \overrightarrow{y_{C_G}}$$

$$\text{Et } \vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D = -\delta(F_I + F_J)\vec{y}_{CG} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cc} \right) \vec{y}_{CG}$$

Question 16 Par analogie, déterminer le moment de résistance au roulement des galets de roulement du chariot latéral, noté \vec{M}_{cl} . En déduire le moment de résistance au roulement total des galets de roulement, \vec{M}_{glob} . Effectuer l'application numérique.

Le chariot latéral a exactement la même géométrie et les mêmes actions mécaniques, seul le poids du chariot change donc $\vec{M}_{cl} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cl} \right) \vec{y}_{CG}$

$$\text{On en déduit } \vec{M}_{glob} = \vec{M}_{cc} + \vec{M}_{cl} = -\delta g (m_v + m_{cc} + m_{cl}) \vec{y}_{CG}$$

$$\text{AN : } |\vec{M}_{glob}| = 0,005 \times 9,81(120\,000 + 15\,000 + 8\,000) = 7014 \text{ N.m}$$

III.1.c - Détermination de l'inertie équivalente de la partie mobile

Question 17 Déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente, J_{eq} , de l'ensemble mobile E rapporté sur l'arbre moteur telle que :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$$

Les transformations de mouvements nous donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_{ch} = \frac{D}{2} \omega_r \\ \omega_r = K_{red} \omega_m \end{cases}$$

On a alors :

$$E_c = \frac{1}{2} (m_v + m_{cc} + m_{cl}) V_{ch}^2 + J_g \omega_r^2 + J_{mr} \omega_m^2 = \frac{1}{2} \left((m_v + m_{cc} + m_{cl}) \frac{D^2}{4} K_{red}^2 + 2J_g K_{red}^2 + 2J_{mr} \right) \omega_m^2$$

$$\text{Donc } J_{eq} = (m_v + m_{cc} + m_{cl}) \frac{D^2}{4} K_{red}^2 + 2J_g K_{red}^2 + 2J_{mr}$$

III.1.d - Détermination de l'équation dynamique de la voile

Question 18 Après avoir effectué l'inventaire exhaustif des puissances mécaniques extérieures, déterminer en le justifiant l'expression de l'ensemble des puissances extérieures s'exerçant sur E dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , noté $P_{ext \rightarrow E/\mathcal{R}_g}$.

Liste des puissances extérieures :

- Puissance due à la gravité : nulle car déplacement horizontal
- Puissance due au vent : $F_{vent} V_{ch}$
- Puissance due à la résistance au roulement : $M_{glob} \omega_r$

$$P_{ext \rightarrow E/\mathcal{R}_g} = F_{vent} V_{ch} + M_{glob} \omega_r$$

Question 19 Après avoir effectué l'inventaire exhaustif des puissances mécaniques intérieures, déterminer en le justifiant l'expression de l'ensemble des puissances intérieures s'exerçant sur E , noté P_{int} .

Liste des puissances intérieures :

- Puissance due aux liaisons : nulle car les liaisons sont parfaites
- Puissance due au moteur : $C_m \omega_m$

$$P_{int} = C_m \omega_m$$

Question 20 Montrer en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E que l'équation dynamique du comportement d'une demi-voile peut se mettre sous la forme suivante :

$$C_m(t) + AF_{vent}(t) + BM_{glob}(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

Exprimer A et B.

D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble E :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{int} + P_{ext \rightarrow E/\mathcal{R}_s}$$

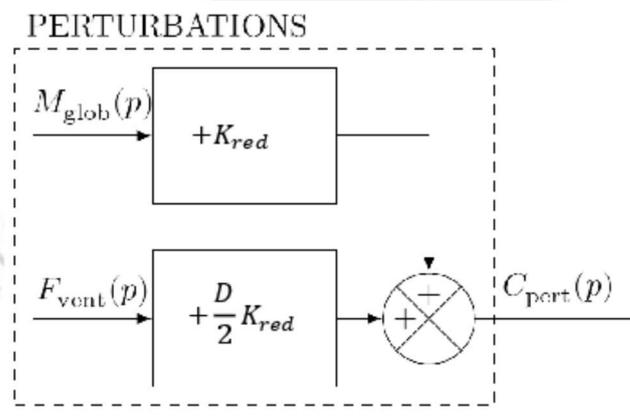
Soit :

$$J_{eq} \omega_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m \omega_m + F_{vent} V_{ch} + M_{glob} \omega_r \Leftrightarrow J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m + F_{vent} \frac{D}{2} K_{red} + M_{glob} K_{red}$$

Donc

$$\begin{cases} A = +\frac{D}{2} K_{red} \\ B = +K_{red} \end{cases}$$

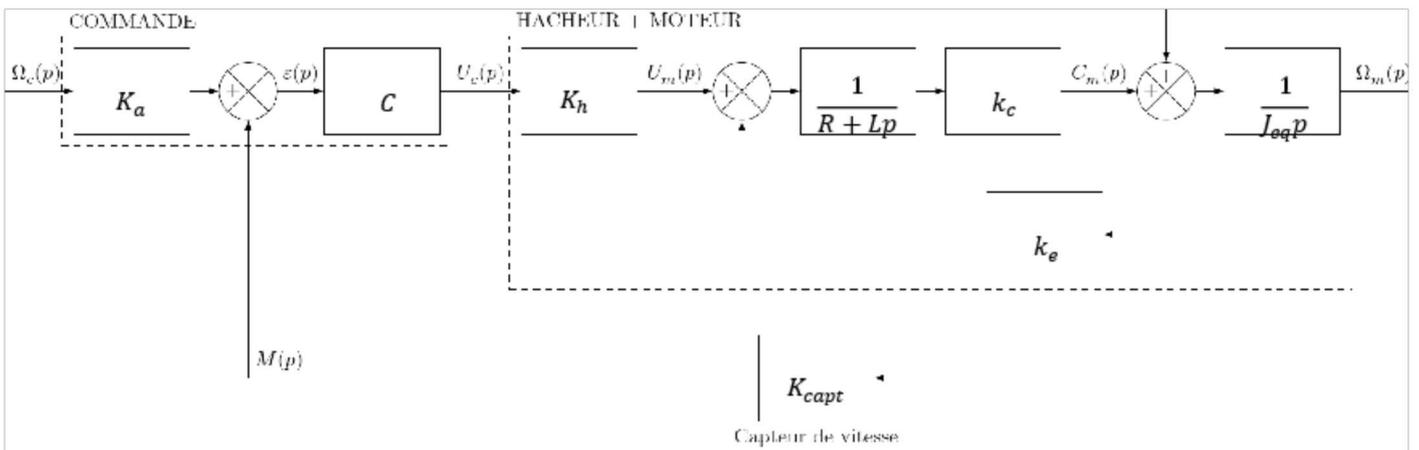
Question 21 À partir des informations précédentes, compléter les fonctions de transfert de la zone « Perturbations » du schéma-bloc sur la figure B du document réponse.



III.2 - Modélisation de la commande en vitesse d'un chariot central en boucle fermée

Objectif : Une fois la modélisation de l'asservissement mise en place, il est proposé de valider une solution de correction permettant de répondre aux caractéristiques imposées par le constructeur.

Question 22 À partir des informations précédentes, compléter les fonctions de transfert manquantes du schéma-bloc sur la figure B du document réponse.



Question 23 Déterminer l'expression de K_a qui assure que l'écart $\varepsilon(t)$ soit une image pertinente de l'erreur, c'est-à-dire que l'écart soit nul si la consigne de vitesse du moteur, $\omega_c(t)$, est égale à la grandeur mesurée, $\omega_m(t)$.

On veut que $\varepsilon(t) = 0$ donc $\varepsilon(p) = 0 \Leftrightarrow \Omega_c(p) \cdot K_a - \Omega_m(p) \cdot K_{capt} = 0$

Or $\omega_c(t) = \omega_m(t)$ donc $\Omega_c(p) = \Omega_m(p)$ d'où $\Omega_c(p) \cdot (K_a - K_{capt}) = 0$

Ceci est vrai pour toute entrée $\Omega_c(p)$ d'où $(K_a - K_{capt}) = 0$

Finalement, on obtient : $K_a = K_{capt}$

III.3 - Étude des performances de la boucle de vitesse non corrigée

Question 24 Exprimer la fonction de transfert $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ en la mettant sous la forme :

$$H_r(p) = \frac{\alpha(1 + \tau p)}{1 + \gamma p + \delta p^2}$$

Exprimer α, τ, γ et δ en fonction des différents paramètres de l'étude.

On a : $C_m(p) + C_{pert}(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$

Calcul de $C_m(p)$

avec $C_m(p) = \left(\frac{k_c}{(R+Lp)}\right) \cdot (U_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p))$

$U_m(p) = K_h \cdot C \cdot \varepsilon(p)$

et $\varepsilon(p) = K_a \cdot \Omega_c(p) - K_{capt} \cdot \Omega_m(p)$

soit $C_m(p) = \left(\frac{k_c}{(R+Lp)}\right) [K_m \cdot C \cdot (K_a \cdot \Omega_c(p) - K_{capt} \cdot \Omega_m(p)) - k_e \cdot \Omega_m(p)]$

or $C = 1$ et $\Omega_c(p) = 0$, donc finalement :

$$C_m(p) = \left(\frac{k_c}{(R + L \cdot p)}\right) [-K_m \cdot K_{capt} \cdot \Omega_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p)]$$

Calcul de $\frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$

$$\Omega_m(p) = \left(\frac{1}{J_{eq} \cdot p}\right) \cdot (C_{pert}(p) + C_m(p))$$

$$\Omega_m(p) = \left(\frac{1}{J_{eq} \cdot p}\right) \cdot (C_{pert}(p) + \left(\frac{k_c}{(R + L \cdot p)}\right) [-K_m \cdot K_{capt} \cdot \Omega_m(p) - k_e \cdot \Omega_m(p)])$$

$$\Omega_m(p) \left[1 + \left(\frac{K_{capt} \cdot K_h \cdot k_c}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}\right) + \left(\frac{k_e \cdot k_c}{R + L \cdot p} \cdot J_{eq} \cdot p\right) \right] = (C_{pert}(p) / (J_{eq} \cdot p))$$

$$H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)} = \frac{\frac{1}{J_{eq} p}}{1 + \left(\frac{K_{capt} \cdot K_h \cdot k_c}{(R + L \cdot p) \cdot J_{eq} \cdot p}\right) + \left(\frac{k_e \cdot k_c}{R + L \cdot p} \cdot J_{eq} \cdot p\right)} = \frac{R + Lp}{J_{eq} p(R + Lp) + k_c(k_e + k_{capt} k_h)}$$

$$= \frac{-R}{k_c(k_{capt} k_h + k_e)} \frac{1 + \frac{L}{R} p}{1 + \frac{J_{eq} R}{k_c(k_e + k_{capt} k_h)} p + \frac{J_{eq} L}{k_c(k_e + k_{capt} k_h)} p^2}$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{-R}{k_c(k_{capt} k_h + k_e)} \\ \tau = \frac{L}{R} \\ \gamma = \frac{J_{eq} R}{k_c(k_e + k_{capt} k_h)} \\ \delta = \frac{J_{eq} L}{k_c(k_e + k_{capt} k_h)} \end{array} \right.$$

Question 25 Déterminer la variation de vitesse du moteur, en régime permanent, sous l'effet d'un couple de perturbation $C_{pert}(t) = C_0 u(t)$ avec $u(t)$ l'échelon de Heaviside. Conclure quant à la satisfaction de l'exigence Id 1.4.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_m(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p H_r(p) C_{pert}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\alpha(1 + \tau p) - C_0}{1 + \gamma p + \delta p^2} = \alpha C_0 \neq 0$$

La valeur finale de la vitesse n'est pas nulle, le système est donc sensible à la perturbation. L'exigence 1.4 n'est pas satisfaite.

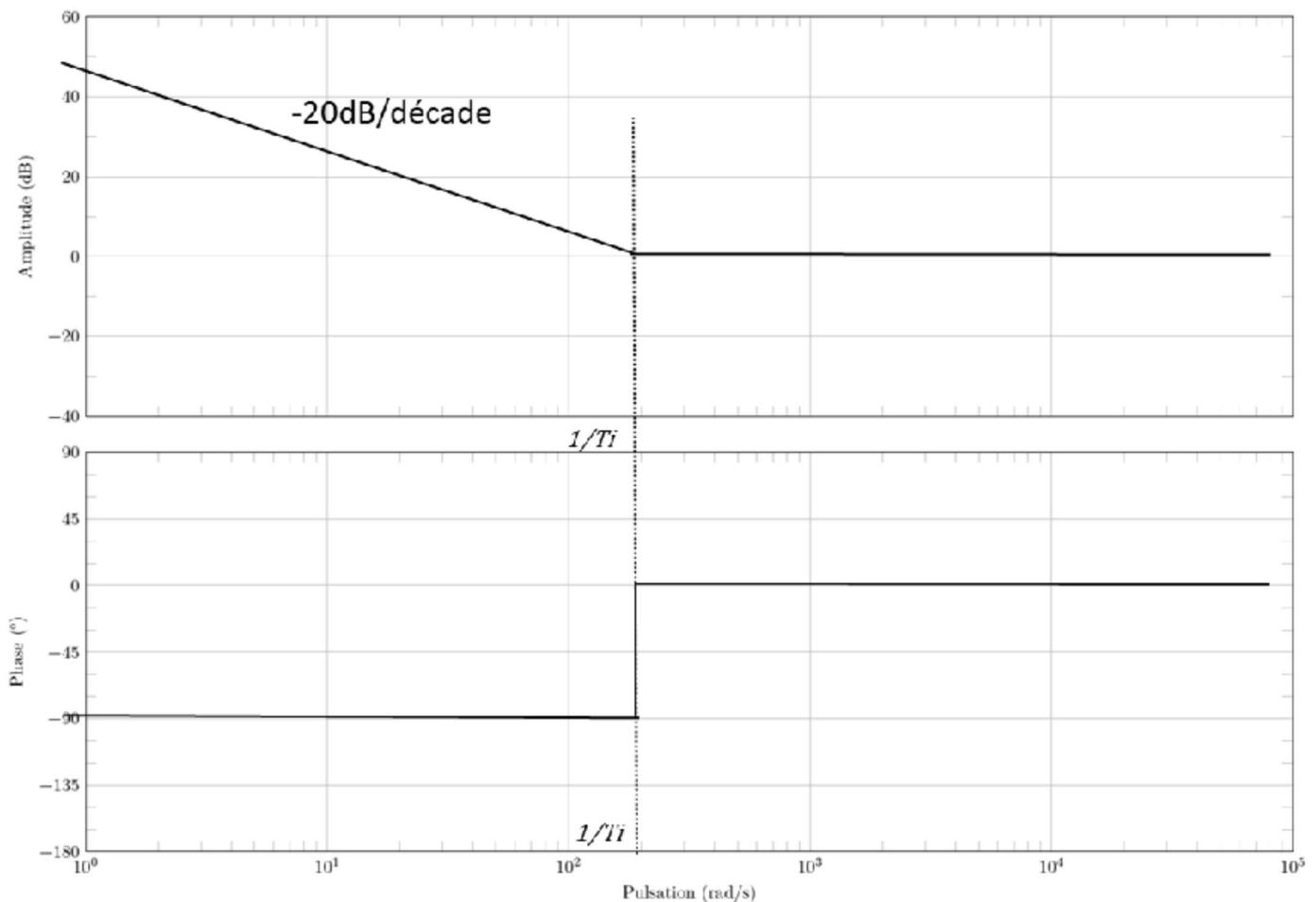
III.3.a - Asservissement avec prise en compte des perturbations

Objectif : Les sous-parties précédentes ont permis d'analyser les perturbations s'exerçant sur un chariot ainsi que leur influence sur une commande non corrigée. Il est proposé dans cette section d'appliquer une action correctrice à la commande afin de respecter le cahier des charges.

L'ajout d'un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert $C(p) = C \cdot \frac{1+T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$ est envisagé.

Pour régler le correcteur, on choisit $\frac{1}{T_i} = \omega_0$ avec ω_0 : pulsation propre de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée.

Question 26 Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en gain et en phase du correcteur $C(p)$, avec $C = 1$, sur la figure C du document réponse.



Question 27 À partir du tracé du diagramme précédent conclure sur l'intérêt de choisir $\frac{1}{T_i} = \omega_0$.

Le correcteur PI permet d'améliorer aussi bien :

- le comportement statique : par la présence de l'intégrateur dans la FTBO, l'erreur statique indicielle est nulle ;
- le comportement dynamique : le numérateur $(1 + T_i \cdot p)$ apporte une phase positive dans la zone critique, celle-ci permet d'améliorer la marge de phase en pondérant l'effet négatif de l'intégration.