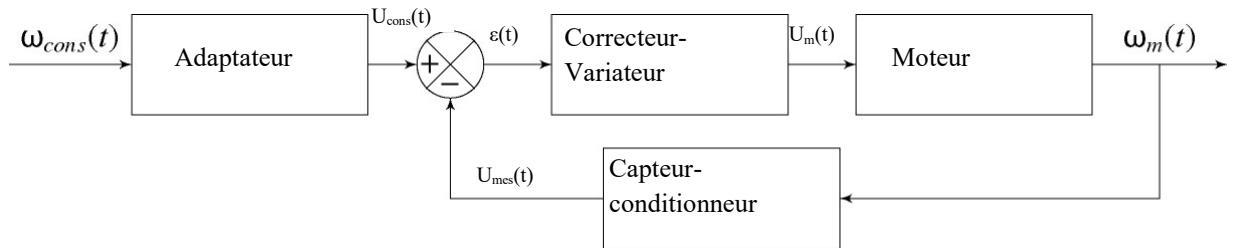


Q1. Compléter le schéma-bloc fonctionnel du document réponse DR1 en indiquant dans les blocs le nom des composants (moteur, adaptateur, correcteur-variateur, capteur-conditionneur) et les paramètres qui transitent entre les blocs.



Q2. Transformer les quatre équations dans le domaine de Laplace en supposant les conditions initiales nulles.

$$u_m(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \rightarrow U_m(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) + c_r(t) \rightarrow J \cdot p \cdot \Omega(p) = C_m(p) + C_r(p)$$

$$c_m(t) = k_c \cdot i(t) \rightarrow C_m(p) = k_c \cdot I(p)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega(t) \rightarrow E(p) = K_e \cdot \Omega(t)$$

Q3. En supposant le couple résistant nul,  $c_r(t) = 0$ , donner la forme canonique de la fonction de transfert  $H_m(p)$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $k_e$ ,  $k_c$  et  $J$ .

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{J \cdot p \cdot (R + L \cdot p)}{k_c k_e}}$$

On obtient une fonction de transfert du second ordre avec un gain statique de  $1/k_e$

Q4. Déterminer les valeurs numériques des durées  $T_1$  et  $T_2$  définies sur le document réponse DR2.

$$T_1 = \frac{1}{50.5000} = 4 \cdot 10^{-6} s \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{T_1}{4} = 10^{-6} s$$

Q4. Pour chaque courbe de la figure 4, préciser, en le justifiant, si la valeur de  $K_i$  est nulle ou non

Le correcteur  $H_{cor}(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$  est un correcteur proportionnel intégral

Courbes 1 et 2 :  $K_i$  nul car erreur statique non nulle

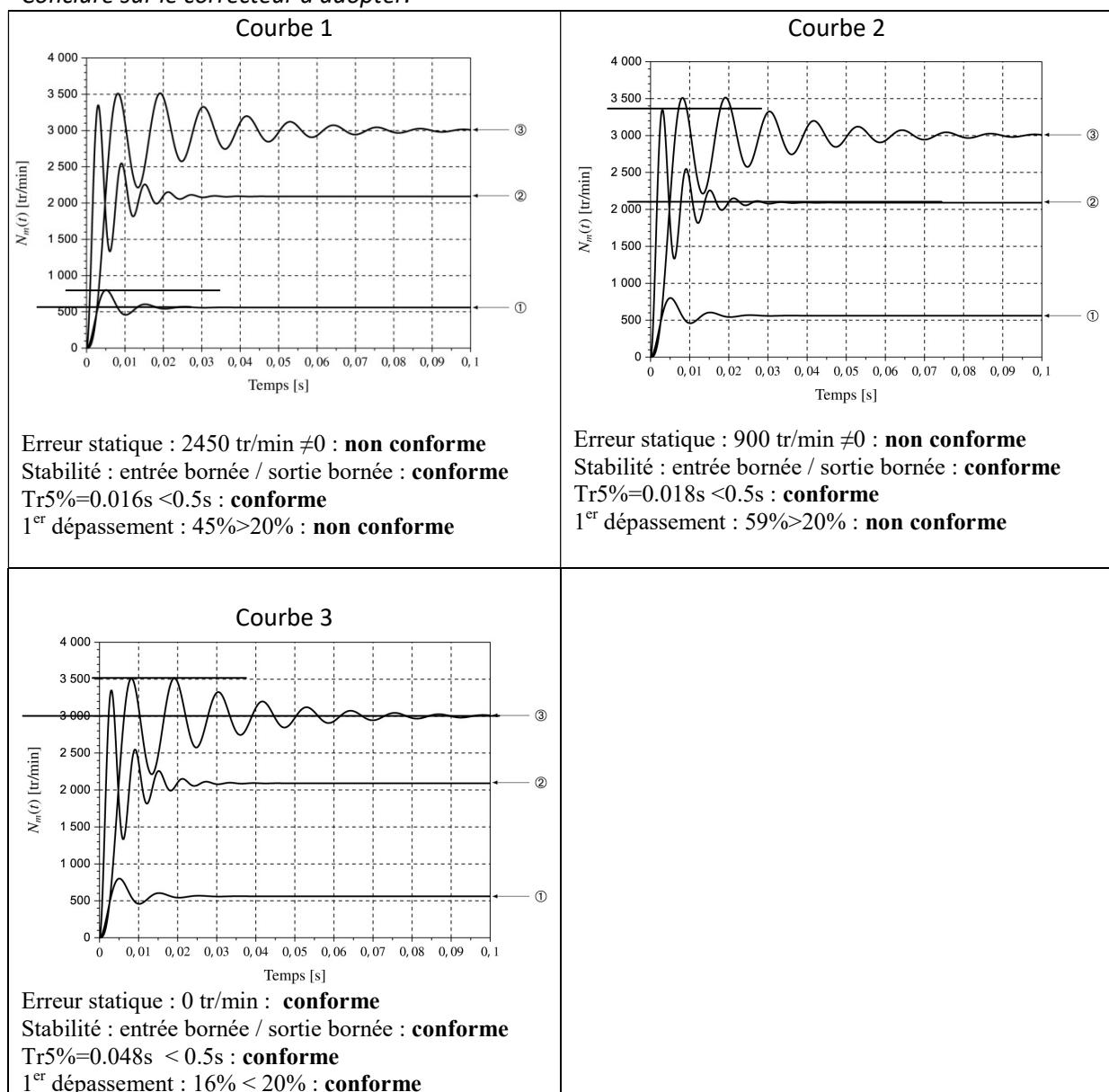
Courbe 3 :  $K_i$  non nul car erreur statique nulle

Q5. Pour les courbes (1) et (2), préciser, en le justifiant, la simulation qui est associée à la plus grande valeur de  $K_p$ .

L'augmentation du gain du correcteur proportionnel provoque la diminution de l'erreur statique. La courbe 2 est donc associée à une valeur de  $K_p$  plus grande que celle de la courbe 1.

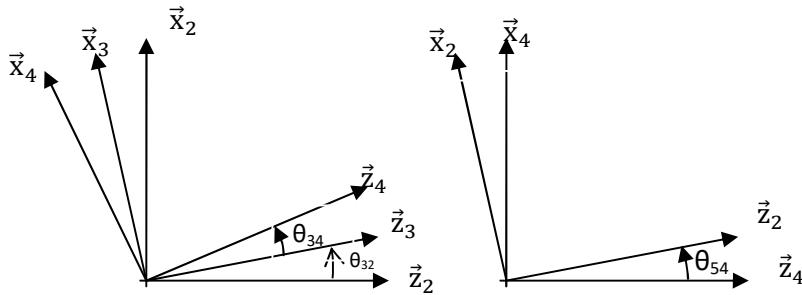
Q6. Déterminer les valeurs associées aux quatre critères de performances de l'exigence 1.2.2.1.

Conclure sur le correcteur à adopter.



La courbe 3 permet de respecter l'exigence 1.2.2.1, il faut donc choisir un correcteur proportionnel intégral.

Q7. Déterminer la relation entre les paramètres angulaires  $\theta_{32}(t)$ ,  $\theta_{43}(t)$  et  $\theta_{54}(t)$ .



A partir des figures planes de calcul, on a directement :  $\boxed{\theta_{54}(t) + \theta_{43}(t) + \theta_{32}(t) = 0}$

Q8. À l'aide d'une fermeture géométrique, déterminer la relation entre le paramètre  $\lambda(t)$ , l'angle  $\theta_{32}(t)$  et les données géométriques du système.

On réalise une fermeture géométrique entre les points A, B et C.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \quad L_3 \vec{z}_3 + L_4 \vec{z}_4 - \lambda \vec{z}_2 = \vec{0}$$

En projection sur  $\vec{x}_2$  :

$$\begin{aligned} L_3 \sin \theta_{32} + L_4 \sin \theta_{43} &= 0 & L_3 \sin \theta_{32} &= -L_4 \sin \theta_{43} & \sin \theta_{43} &= -\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \\ \sin^2 \theta_{43} &= \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2 & \cos^2 \theta_{43} &= 1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2 \\ \cos \theta_{43} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2} \quad (\text{avec } L_3 < L_4) \end{aligned}$$

En projection sur  $\vec{z}_2$

$$L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{43} - \lambda = 0 \quad \lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{43}$$

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \lambda = L_3 \cos \theta_{32} - L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2}$$

D'après le schéma cinématique et le paramétrage  $\lambda$  doit être positif, on en déduit :

$$\boxed{\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}\right)^2}}$$

Q9. En déduire l'expression littérale de l'amplitude des oscillations de la lame, notée  $\Delta z$ . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 1.2.2.3.

$$\Delta z = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = L_3 + L_4 - (-L_3 + L_4) = 2L_3 \quad \boxed{\Delta z = 2L_3}$$

(Ce que l'on peut trouver directement par lecture du schéma cinématique)

Application numérique :  $\Delta z = 2.12,5 = 25 \text{ mm} > 20 \text{ mm}$

L'exigence 1.2.2.3 est respectée

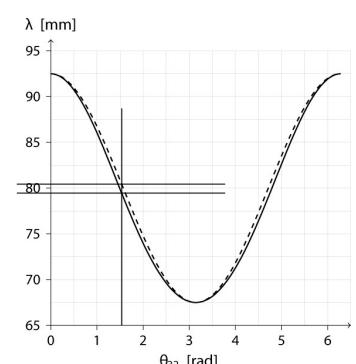
Q10. Calculer le rapport  $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$  et le comparer à la valeur 1. Montrer alors que la loi obtenue à la question Q17 peut se mettre sous la forme  $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4(t)$ .

$$\text{Numériquement le rapport } \left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2 = \left(\frac{80}{12,5}\right)^2 = 40,9 \gg 1.$$

L'expression de la question 17 peut donc s'écrire :  $\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4$

Q11. Conclure sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude

Les valeurs maximales et minimales sont identiques pour la position théorique et pour la position approximée.



L'écart maximal vaut environ 1/25 soit 4 %. On peut donc valider l'approximation pour la position

Q12. Déterminer l'expression littérale de  $\dot{\lambda}(t)$  à partir du modèle simplifié de  $\lambda(t)$ .

On a directement :  $\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_{32}L_3 \sin \theta_{32} = -\omega_{32}L_3 \sin \theta_{32}$

Q13. La simplification de la loi en vitesse permet-elle de valider l'exigence 1.2.2.4. ?

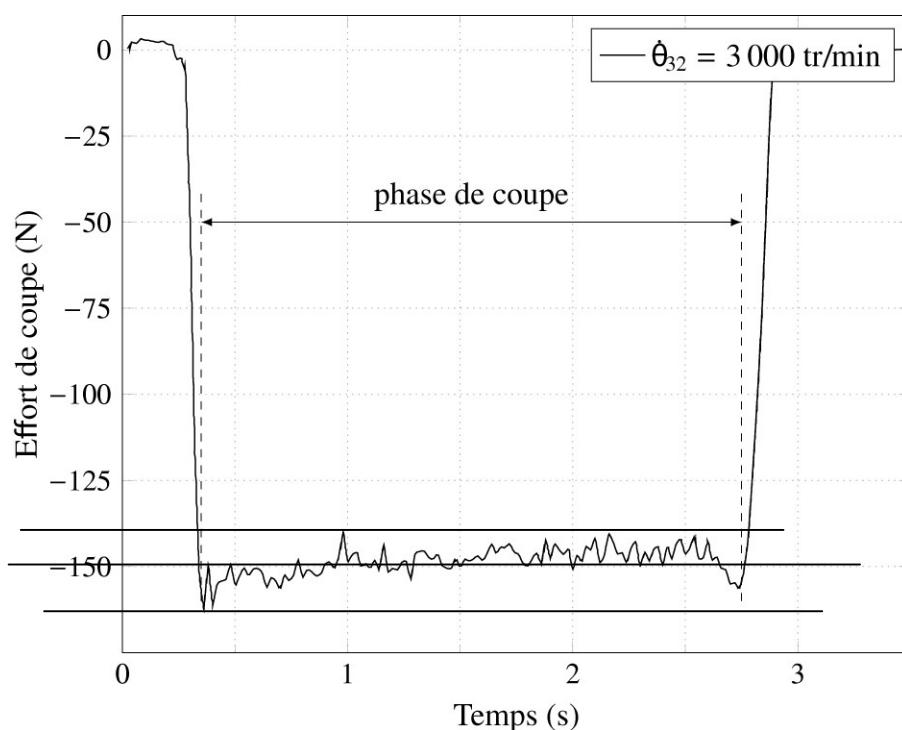
La valeur maximale théorique est de 4m/s.

La valeur maximale du système simplifié est de 3.9m/s.

L'exigence 1.2.2.4 impose  $4\text{m/s} \pm 5\%$  soit  $3.8\text{m/s} < \dot{\lambda} < 4.2\text{m/s}$

L'exigence 1.2.2.4 est donc respectée avec le modèle simplifié.

Q14. Durant la phase de coupe, déterminer les valeurs moyenne, maximale et minimale de l'effort de coupe



Si on raisonne en norme :

Valeur maximale: 162.5N

Valeur minimale : 140N

Valeur moyenne : 150 N

Q15. Conclure sur la validation de l'exigence 1.2.1.1. Justifier

$$\frac{\max - \min}{\text{moy}} = \frac{162.5 - 140}{150} = 15\%$$

L'effort de coupe varie donc de  $\pm 7.5\% < \pm 10\%$  par rapport à la valeur moyenne, l'exigence 1.2.1.1 est respectée.

Q16. Déterminer l'énergie cinétique  $T_{i/R_0}$  par rapport au bâti 0 pour chaque solide  $i \in [3, 4, 5]$ .

$T_{4/R_0} = 0$  (Masse et inertie du solide 4 négligées)

$T_{5/R_0} = \frac{1}{2} M_5 (V_a^2 + \dot{\lambda}^2)$  (5 à un mouvement de translation rectiligne)

$T_{3/R_0} = \frac{1}{2} M_3 V_a^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_{32}^2$

Q17. En déduire l'énergie cinétique de l'ensemble  $S = \{3, 4, 5\}$  par rapport au bâti 0, que vous mettrez sous la forme  $T_{S/R_0} = \frac{1}{2}J_{eq}(\theta_{32})\omega_{32}^2 + \frac{1}{2}M_{eq}V_a^2$ . Préciser les expressions littérales de  $J_{eq}(\theta_{32})$  et  $M_{eq}$ .

L'énergie de l'ensemble est la somme des énergies cinétiques

$$T_{S/R_0} = T_{3/R_0} + T_{4/R_0} + T_{5/R_0}$$

$$T_{S/R_0} = \frac{1}{2}M_3V_a^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_{32}^2 + \frac{1}{2}M_5(V_a^2 + \dot{\lambda}^2) \quad \text{avec } \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32}L_3\sin\theta_{32}$$

$$T_{S/R_0} = \frac{1}{2}M_3V_a^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_{32}^2 + \frac{1}{2}M_5(V_a^2 + (\omega_{32}L_3\sin\theta_{32})^2)$$

$$T_{S/R_0} = \frac{1}{2}(M_3 + M_5)V_a^2 + \frac{1}{2}(J_3 + M_5(L_3\sin\theta_{32})^2)\omega_{32}^2 = \frac{1}{2}M_{eq}V_a^2 + \frac{1}{2}J_{eq}(\theta_{32})\omega_{32}^2$$

Avec  $J_{eq} = J_3 + M_5(L_3\sin\theta_{32})^2$  (attention  $J_{eq}$  n'est pas une constante) et  $M_{eq} = (M_3 + M_5)$

Q18. Déterminer les expressions littérales des puissances intérieures  $P_{int}$  et extérieures au système  $S$  par rapport au bâti 0,  $P_{ext \rightarrow S/R_0}$ .

Puissances intérieures

Les liaisons sont supposées parfaites :  $P_{int}(S) = 0$

Puissances extérieures

Liaisons avec le bâti supposées parfaites :  $P_{0 \rightarrow S/R_0} = 0$

$$P_{moteur \rightarrow S/R_0} = C_m \omega_{32}$$

$$P_{pesanteur \rightarrow S/R_0} = 0 \quad (\text{action de la pesanteur négligée})$$

$$P_{matelas \rightarrow lame/R_0} = \{T_{matelas \rightarrow lame}\} \otimes \{V_{lame/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{l} F_a \cdot \vec{y_0} + F_c \cdot \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ V_a \cdot \vec{y_0} + \dot{\lambda}(t) \vec{z_0} \end{array} \right\} = F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c$$

On en déduit :  $P_{ext \rightarrow S/R_0} = C_m \omega_{32} + F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c = C_m \omega_{32} + F_a V_a - \omega_{32} L_3 \sin\theta_{32} F_c$

Q19. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer l'expression littérale du couple moteur  $C_m(t)$ .

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $S$  s'écrit :  $\frac{dE_c(S/R_0)}{dt} = P_{int}(S) + P_{ext \rightarrow S/R_0}$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}M_3V_a^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_{32}^2 + \frac{1}{2}M_5(V_a^2 + \dot{\lambda}^2) \right] = C_m \omega_{32} + F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c$$

$$J_3 \ddot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} = C_m \omega_{32} + F_a V_a + \dot{\lambda}(t) F_c \quad \boxed{C_m = \frac{J_3 \ddot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - F_a V_a - \dot{\lambda} F_c}{\omega_{32}}}$$

avec  $\dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin\theta_{32}$  et  $\ddot{\lambda}(t) = -\dot{\omega}_{32} L_3 \sin\theta_{32} - \omega_{32}^2 L_3 \cos\theta_{32}$

Q20. Montrer qu'en régime permanent ( $\dot{\theta}_{32} = cte$ ), l'expression du couple moteur est :

$$C_m = [F_c + M_5 L_3 \dot{\theta}_{32}^2 \cos\theta_{32}] L_3 \sin\theta_{32} - \frac{F_a V_a}{\dot{\theta}_{32}}$$

En régime permanent :  $\dot{\theta}_{32} = cte$ , et  $\dot{\omega}_{32} = 0$

$$C_m = \frac{M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - F_a V_a - \dot{\lambda} F_c}{\omega_{32}} \quad \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin\theta_{32} \quad \ddot{\lambda}(t) = -\omega_{32}^2 L_3 \cos\theta_{32}$$

$$C_m = \frac{M_5 (-\omega_{32} L_3 \sin\theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos\theta_{32}) - F_a V_a + \omega_{32} L_3 \sin\theta_{32} F_c}{\omega_{32}}$$

$$C_m = M_5 (-L_3 \sin\theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos\theta_{32}) - \frac{F_a V_a}{\omega_{32}} + L_3 \sin\theta_{32} F_c$$

$$\boxed{C_m = (M_5 \omega_{32}^2 L_3 \cos\theta_{32} + F_c) L_3 \sin\theta_{32} - \frac{F_a V_a}{\omega_{32}}}$$

Q21. Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent ? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système ?

Le coulisseau a un mouvement de va et vient donc même en régime permanent (vitesse de rotation constante du moteur) l'accélération du coulisseau n'est pas constante.

De plus la pesanteur sur le coulisseau est motrice durant la phase de descente et résistante durant la phase de montée.

Ces 2 phénomènes sont à l'origine du couple moteur variable en régime permanent et vont provoquer des vibrations.

Q22. Déterminer l'expression des vecteurs vitesses  $\vec{V}(G_3 \in 3/2)$  et  $\vec{V}(G_5 \in 5/2)$  en fonction de  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\theta}_{32}$  et des données géométriques.

$$\vec{V}(G_3 \in 3/2) = \vec{V}(A \in 3/2) + \overrightarrow{G_3 A} \wedge \vec{\Omega} (3/2 = -a_3 \vec{z}_3 \wedge \omega_{32} \vec{y}_3)$$

$$\boxed{\vec{V}(G_3 \in 3/2) = a_3 \omega_{32} \vec{x}_3}$$

$$\boxed{\vec{V}(G_5 \in 5/2) = \dot{\lambda} \vec{z}_2}$$

Q23. En déduire l'expression, dans la base  $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , de la résultante dynamique de l'ensemble  $S = \{3, 4, 5\}$  dans le référentiel lié à la table, notée  $\vec{R}_d(S/0)$ .

La résultante dynamique de l'ensemble est la somme des résultantes dynamiques :

$$\vec{R}_d(S/0) = \vec{R}_d(3/0) + \vec{R}_d(4/0) + \vec{R}_d(5/0)$$

$$\vec{R}_d(4/0) = \vec{0} \quad (\text{masse et inertie de 4 négligée})$$

$$\vec{R}_d(5/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2$$

$$\vec{R}_d(3/0) = M_3 \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = M_3 \left( a_3 \dot{\omega}_{32} \vec{x}_3 + a_3 \omega_{32} \left[ \frac{d \vec{x}_3}{dt} \right]_0 \right) = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \vec{z}_3$$

$$\boxed{\vec{R}_d(S/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 a_3 \omega_{32}^2 (\cos \theta_{32} \vec{z}_2 + \sin \theta_{32} \vec{x}_2)}$$

Q24. Déterminer l'expression du maximum de chacune des composantes de la résultante dynamique  $\vec{R}_d(S/0)$  sur  $\vec{x}_2$  et  $\vec{z}_2$ . Faire l'application numérique.

$$\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2 = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \sin \theta_{32} \quad \text{la valeur maximale est donnée pour } \sin \theta_{32} = -1$$

$$\boxed{(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} = M_3 a_3 \omega_{32}^2}$$

$$\text{Application numérique : } (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{\max} = 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{3000 \cdot 2,3,14}{60} \right)^2 = 17N$$

$$\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2 = M_5 \ddot{\lambda} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} = -M_5 L_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32}$$

la valeur maximale est donnée pour  $\cos \theta_{32} = -1$

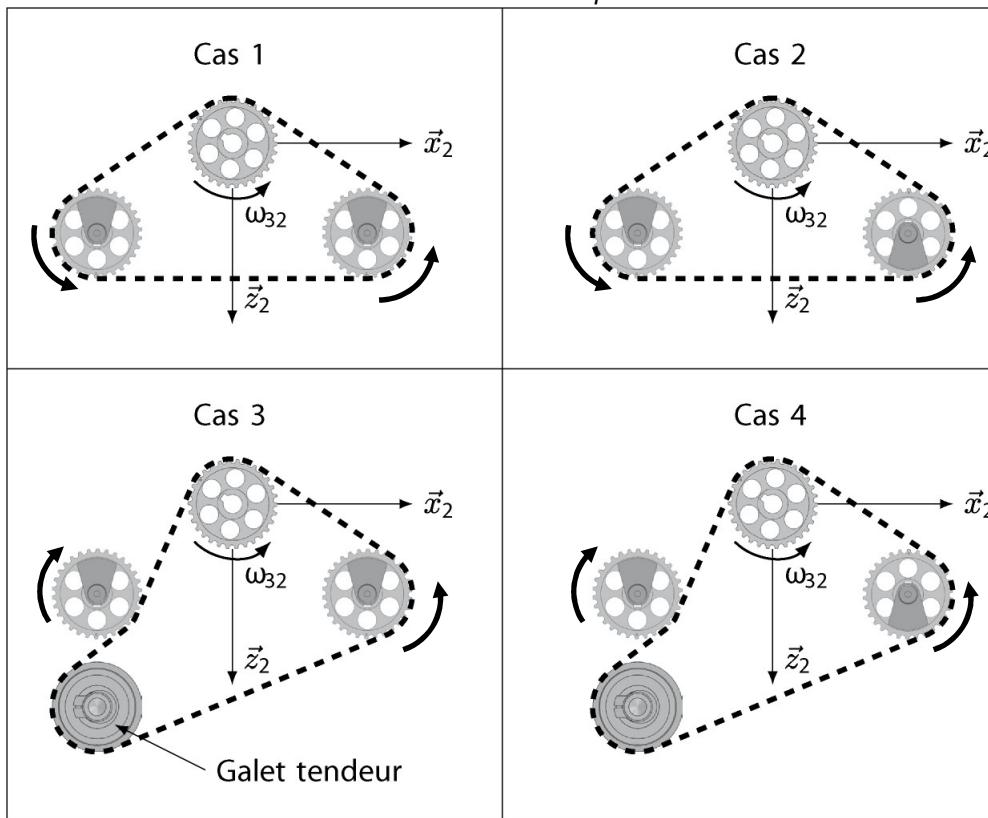
$$\boxed{(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = (M_5 L_3 + M_3 a_3) \omega_{32}^2}$$

$$\text{Application numérique : } (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = (0,1 \cdot 0,0125 + 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}) \cdot \left( \frac{3000 \cdot 2,3,14}{60} \right)^2 = 140N$$

Q25. En comparant l'expression des deux maxima, identifier la pièce qui semble être à l'origine des vibrations.

L'origine des vibrations est la pièce 5

Q26. Pour chacune des configurations et pour le sens de rotation du moteur donné, préciser le sens de rotation de la masse excentrée sur le document réponse DR5.



Q27. Pour chacune des configurations, préciser si les vibrations verticales peuvent être supprimées. Justifier

Pour supprimer les vibrations verticales il faut que les 2 masselottes soient en position haute ou basse en même temps.

Les cas 1 et 3 permettent de supprimer les vibrations verticales

Les cas 2 et 4 ne permettent pas de supprimer les vibrations verticales

Q28. Quelle configuration faut-il retenir pour assurer le moins de vibrations dans le système de coupe ? Justifier.

D'après la question précédente il faut choisir entre le cas 1 et le cas 3 pour supprimer les vibrations verticales. Dans le cas 1 les masselottes sont du même côté (suivant  $\vec{x}_0$ ) en même temps ce qui va provoquer des vibrations horizontales.

Seul le cas 3 permet de limiter les vibrations horizontales et verticales

Q29. Déterminer les composantes suivant  $\vec{x}_2$  et  $\vec{z}_2$  de la résultante dynamique des masses excentrées dans le référentiel lié à la table.

On pose  $\vec{OG_i} = r\vec{z}_g$

$\vec{V}(G_i \in roue/0) = r\dot{\theta}_i \vec{x}_i$       et  $\vec{\Gamma}(G_i \in roue/0) = -r\dot{\theta}_i^2 \vec{z}_i$       (rappel  $\ddot{\theta}_i = 0$ )

On en déduit pour la masse g :  $\vec{R_d}(m_g/0) = -m r\dot{\theta}_i^2 \vec{z}_g = -mr\dot{\theta}_g^2 (\cos\theta_g \vec{z}_2 + \sin\theta_g \vec{x}_2)$

On en déduit pour la masse d :  $\vec{R_d}(m_d/0) = -mr\dot{\theta}_i^2 \vec{z}_d = -mr\dot{\theta}_d^2 (\cos\theta_d \vec{z}_2 + \sin\theta_d \vec{x}_2)$

Sur  $\vec{x}_2$  :  $\boxed{\vec{R_d}(m_d + m_g/0) \cdot \vec{x}_2 = -mr\dot{\theta}_g^2 \sin\theta_g - m r\dot{\theta}_d^2 \sin\theta_d}$

Sur  $\vec{z}_2$  :  $\boxed{\vec{R_d}(m_d + m_g/0) \cdot \vec{z}_2 = -mr\dot{\theta}_g^2 \cos\theta_g - m r\dot{\theta}_d^2 \cos\theta_d}$

Q30. En déduire la relation entre  $\theta_d$  et  $\theta_g$  pour que les masses excentrées ne génèrent pas de vibration suivant  $\vec{x}_2$ .

Pour ne pas générer de vibration suivant  $\vec{x}_2$ , on doit avoir

$$\vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{x}_2 = -mr\dot{\theta}_g^2 \sin\theta_g - m r\dot{\theta}_d^2 \sin\theta_d = 0 \quad \sin\theta_g + \sin\theta_d = 0$$

Mais on doit aussi avoir :  $\cos\theta_g = \cos\theta_d$

On en déduit :  $\boxed{\theta_g = -\theta_d}$

Q31. En déduire l'expression de la masse  $m$  pour respecter l'exigence 1.2.2.2. Faire l'application numérique

Sur  $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$ , d'après la question précédente quelle que soit la valeur de  $m$ , à condition de choisir correctement les angles  $\theta_d$  et  $\theta_g$ . La résultante dynamique est nulle

Mais il y a certainement une coquille dans l'énoncé, l'exigence 1.2.2.2 doit plutôt s'écrire : « La résultante dynamique de l'ensemble de la tête de coupe doit être au maximum de 40N sur l'axe  $\vec{z}_0$  »

Dans ce cas :

$$-mr\dot{\theta}_g^2 \cos\theta_g - m r\dot{\theta}_d^2 \cos\theta_d + 140 = 0 \text{ (rappel } (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{\max} = 140N \text{ (question 34)})$$

$$2mr\dot{\theta}_g^2 \cos\theta_g = 140$$

$$\boxed{m = \frac{140}{2.r\dot{\theta}_g^2}}$$

$$\text{Application numérique : } m = \frac{140}{2.008.(\frac{3000.2.3,14}{60})^2} = 0.089 \text{ kg} = 89g$$

Q32. D'après l'expression de la résultante dynamique de la question Q33, comment devrait évoluer l'effort de coupe en régime permanent en fonction de la vitesse de rotation du moteur ?

Si on double la vitesse de rotation du moteur l'effort de coupe devrait être multiplié par 4 (la vitesse de rotation du moteur  $\omega_{32}$  apparaît au carré)

Q33. Conclure sur l'utilité des masses excentrées mises en place sur la tête de coupe en version améliorée.

D'après la figure 16 de l'énoncé l'effort de coupe moyen en norme pour le système amélioré est de 80 N alors que la vitesse de rotation est de 6000 tr/min.

Les masselottes d'équilibrage permettent donc de diviser par 8 l'effort de coupe sur la version améliorée par rapport à la version initiale.

Q34. Réaliser la synthèse de la démarche d'identification du phénomène vibratoire et la validation de la solution retenue en regard du cahier des charges.