

PARTIE I, TOUR BRITISH AIRWAYS i360 (D'APRES CSE MP 2026)

Présentation du contexte et objectifs de l'étude

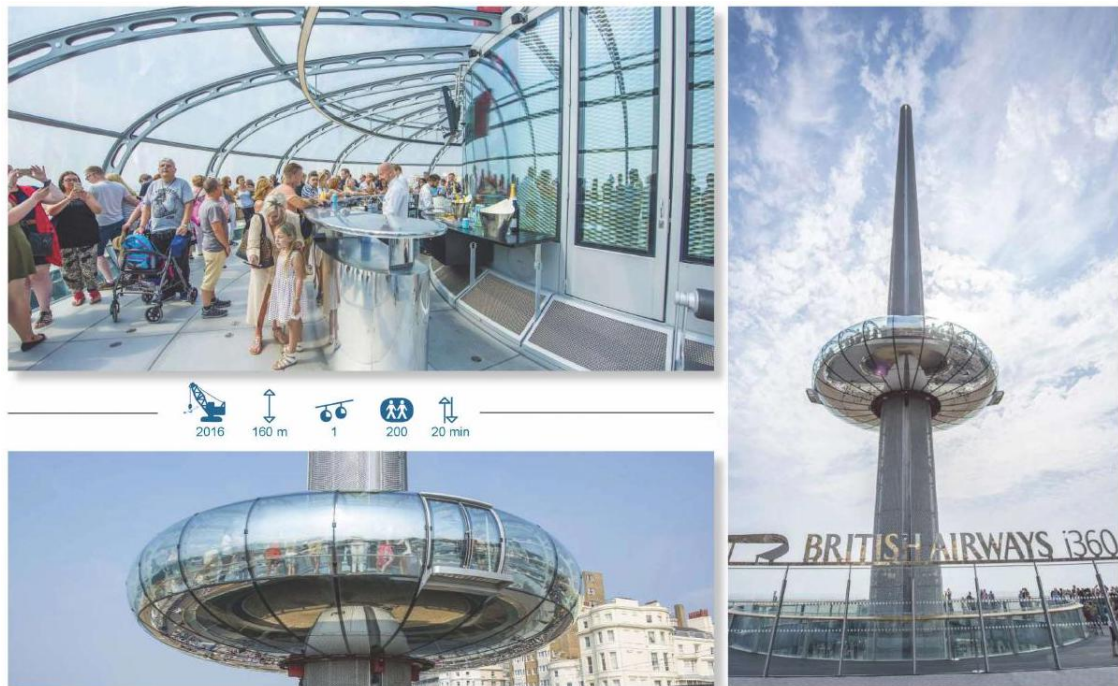


Figure 1 - Vues de la tour British Airways i360

Conçue par les architectes Marks &Barfield et réalisée en collaboration avec l'entreprise française POMA, la tour British Airways i360 (Figure 1) est une tour d'observation ascensionnelle installée à Brighton en Angleterre. La nacelle en forme de tore, dans laquelle embarquent jusqu'à 200 passagers, est uniquement animée d'un mouvement de translation verticale par rapport au mât encastré au sol. Cette nacelle, recouverte de verre, permet aux passagers de profiter d'une vue panoramique à 360° sur la ville balnéaire de Brighton, à une hauteur de 130 m au-dessus du niveau du sol. À ce titre, la tour British Airways i360 établit le record de l'ouvrage le plus élancé au monde grâce à son mât d'environ 160 m de haut et de 4 m de diamètre.

La tour s'inscrit dans une démarche de fonctionnement écologique visant à limiter sa consommation d'énergie. Seule l'énergie électrique consommée par le dispositif servant à mettre en mouvement la nacelle est étudiée dans ce sujet.

Le cahier des charges partiel du commanditaire de la tour British Airways i360 est décrit dans le Tableau 1.

Exigences	Descriptif
Id 1 - Accueillir les visiteurs	4000 visiteurs chaque jour doivent pouvoir bénéficier de la vue panoramique
Id 2 - Proposer une visite en toute sécurité et dans le confort	Les accélérations et vitesses linéaires de la nacelle doivent être limitées quel que soit le nombre de passagers dans la nacelle
Id 3 - Limiter la consommation d'énergie électrique	La récupération d'énergie électrique à la descente doit être supérieure à la moitié de l'énergie électrique consommée à la montée

Tableau 1 - Cahier des charges partiel du commanditaire de la tour British Airways i360

Certaines données et structures de l'ouvrage ont fait l'objet de modifications par rapport à la réalité pour des raisons de protection industrielle notamment.

Objectifs de l'étude

Déterminer une loi de commande permettant de satisfaire les exigences de sécurité et de confort des passagers tout en optimisant la consommation d'énergie.

Pour atteindre les objectifs fixés, la démarche retenue dans le sujet est la suivante :

- décrire le mouvement souhaité de la nacelle conformément aux exigences du commanditaire ;
- établir les modèles cinématique et dynamique du dispositif servant à mettre en mouvement la nacelle;
- synthétiser une loi de commande de l'actionneur mettant en mouvement la nacelle conformément aux exigences du commanditaire ;
- vérifier la performance liée à la consommation d'énergie électrique de l'actionneur.

Partie A - Étude du mouvement souhaité de la nacelle

Objectif

Décrire le mouvement souhaité de la nacelle conforme à la visite panoramique, aux exigences de sécurité et de confort des passagers.

I - Modélisation du mouvement souhaité de la nacelle

Notations

- le sol avec le mât, de repère associé $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, supposé galiléen dans tout le sujet, est repéré par le chiffre 0 ;
- la nacelle est repérée par la lettre N . Son centre de gravité G est supposé porté par l'axe $(O_0, \vec{z})$ au cours du mouvement de la nacelle ;
- la position linéaire souhaitée de la nacelle N par rapport au sol 0 est notée $\overrightarrow{O_0G} = z_s(t) \cdot \vec{z}$ exprimée en m;
- la vitesse linéaire souhaitée du centre de gravité G de la nacelle N par rapport au sol 0 est notée $\vec{v}_{G \in N/0} = v_s(t) \cdot \vec{z}$ exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- l'accélération linéaire souhaitée du centre de gravité G de la nacelle N par rapport au sol 0 est notée $\vec{a}_{G \in N/0} = a_s(t) \cdot \vec{z}$ exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le cycle souhaité de la nacelle suit les étapes suivantes :

- une phase ascensionnelle de la nacelle, d'une durée maximale de 6 minutes, décomposée en sous-phases dont la description est fournie ci-dessous,
 - les passagers ont fini d'embarquer dans la nacelle immobile à l'instant $t = t_0 = 0$, au niveau du sol ($z_s(t_0) = 0$ et $v_s(t_0) = 0$), appelé niveau inférieur ;
 - le début de l'ascension s'effectue à accélération linéaire constante, notée $a_1 > 0$, et dure t_1 secondes. La vitesse linéaire atteinte à l'instant t_1 est notée v_{nom} et vaut $0,5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - jusqu'à l'instant t_2 , la vitesse est constante et égale à v_{nom} ;
 - la fin de l'ascension, réalisée à accélération linéaire constante égale à $-a_1$, dure jusqu'à l'instant t_3 ;
- la nacelle est immobile au sommet de la tour, à une altitude souhaitée $z_s(t_3) = 130 \text{m}$, appelé niveau supérieur. Les passagers restent dans la nacelle et peuvent observer la vue panoramique de la ville de Brighton et ses environs, pendant 10 minutes;
- une phase de descente de la nacelle, d'une durée maximale de 6 minutes, qui suit le même cycle que le cycle ascensionnel, mais avec des vitesses linéaires et accélération linéaires souhaitées de signes

opposés à la phase ascensionnelle. Les instants sont notés chronologiquement t_4, t_5, t_6 et t_7 , avec $z_s(t_4) = 130\text{m}$ et $z_s(t_7) = 0\text{m}$.

Compte-tenu des règles de sécurité, des conditions d'accessibilité à la nacelle et afin d'assurer un confort optimal des passagers de la tour British Airways i360 durant leur visite et leur découverte de la ville de Brighton, les exigences retenues sont décrites dans le Tableau 2.

Exigences	Critères	Niveaux
Sécurité	Vitesse linéaire maximale de la nacelle	$v_{\max} = 0,6\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Accessibilité	Précision de la position de la nacelle au niveau inférieur	$\Delta z \leq 5\text{mm}$
Panorama	Précision de la position de la nacelle au niveau supérieur	$\Delta z \leq 5\text{mm}$
Confort	Accélération linéaire maximale de la nacelle	$a_{\max} = 0,015\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Tableau 2 - Exigences relatives à la sécurité, à l'accessibilité, au panorama et au confort des passagers - Id 2

Les évolutions temporelles de l'accélération linéaire souhaitée $a_s(t)$ et de la vitesse linéaire souhaitée $v_s(t)$ de la nacelle sont représentées sur la Figure 2.

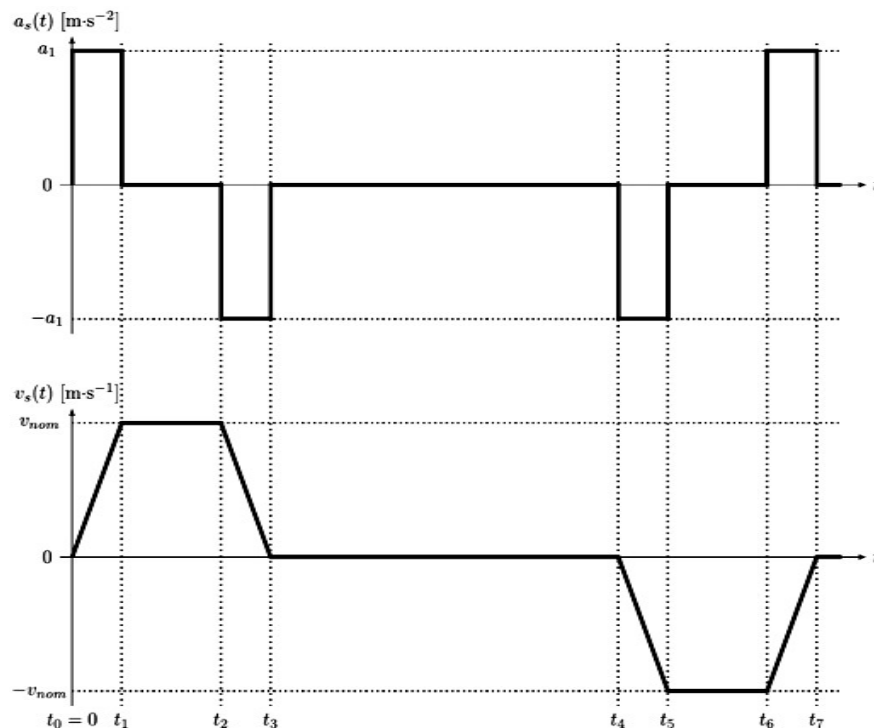


Figure 2 - Évolutions de l'accélération linéaire souhaitée $a_s(t)$ et de la vitesse linéaire souhaitée $v_s(t)$ de la nacelle N sur un cycle complet

Q1. Sur la copie, et pour le cycle souhaité de la nacelle entre t_0 et t_7 , tracer l'allure de l'évolution temporelle de la position linéaire souhaitée $z_s(t)$ de la nacelle N . Préciser les ordonnées caractéristiques $z_s(t_3)$ et $z_s(t_7)$.

Q2. Vérifier que, si $t_1 = 40\text{s}$, $t_3 - t_2 = 40\text{s}$ et $v_{\text{nom}} = 0,5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, il est possible d'atteindre une altitude de 130 m en une durée t_3 maximale de 6 minutes. Par ailleurs, vérifier le respect de l'exigence de confort du Tableau 2.

Afin de respecter les exigences de sécurité et de confort des passagers, le profil de vitesse établi dans cette partie sera la consigne de vitesse linéaire. Toutefois, un suivi particulier de la position de la nacelle sera nécessaire pour atteindre les niveaux inférieur et supérieur avec précision (critères d'accessibilité et de panorama du Tableau 2).

II - Présentation de la cinématique de mise en mouvement de la nacelle

L'élancement de l'ouvrage, la variation d'altitude nécessaire de la nacelle et le faible espace disponible dans le mât, ont conduit les ingénieurs à faire un choix de mise en mouvement de la nacelle par 2 types de câbles, dits tracteur et d'équilibrage, associés à un contrepoids (Figure 3).

La mise en mouvement de translation verticale de la nacelle N de direction $\vec{z}$ par rapport au sol 0 (Figure 3) est réalisée par :

- 4 câbles d'équilibrage qui connectent la nacelle au contrepoids. Placés dans des rainures verticales situées à l'extérieur du mât, aux quatre points cardinaux, ces câbles assurent la stabilité horizontale de la nacelle. Chacun d'eux s'enroule autour d'une poulie d'équilibrage positionnée dans la partie supérieure du mât, puis redescend à l'intérieur du mât pour être fixé à son autre extrémité au contrepoids;
- 1 câble tracteur, dont une de ses extrémités est fixée au sol (voir Ancrage au sol sur la Figure 3), s'enroule ou se déroule sur un tambour déporté du mât par l'intermédiaire de la poulie de renvoi. Le tambour est mis en rotation par un actionneur associé à un réducteur de vitesse.

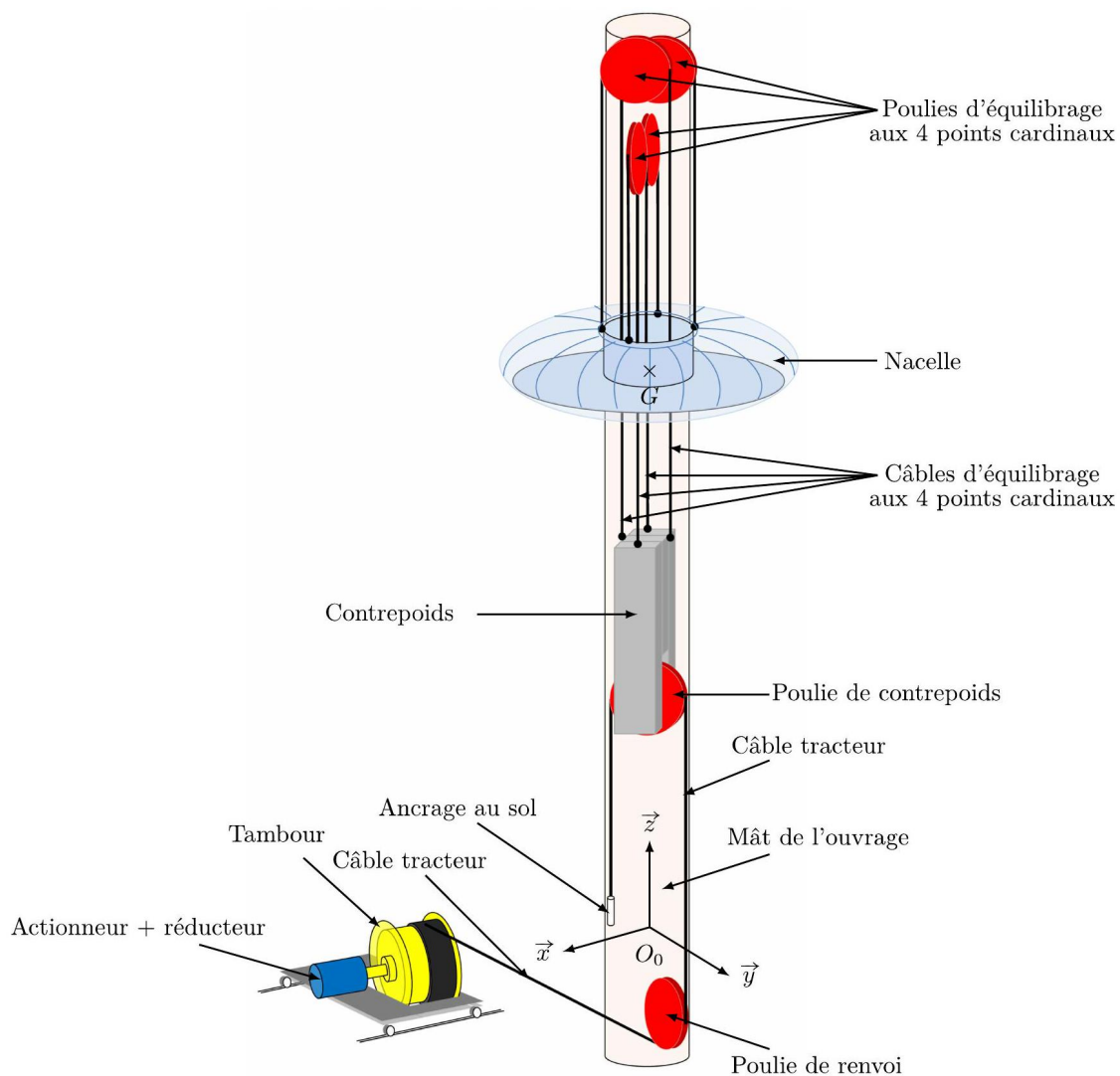


Figure 3 - Schéma technique de la tour British Airways i360

La structure de commande retenue pour la mise en mouvement de la nacelle N de la tour British Airways i360 est proposée sur la Figure 4.

La grandeur $\omega_{mc}(t)$ représente la vitesse angulaire de consigne de l'actionneur. Elle est générée à partir de la loi d'évolution de la vitesse linéaire souhaitée $v_s(t)$ de la nacelle.

La grandeur $c_{ref}(t)$ est la grandeur de commande de l'ensemble {Préactionneur + actionneur}. Cet actionneur délivre au réducteur de vitesse une action mécanique du type couple, notée $c_{em}(t)$.

Les grandeurs géométriques et cinématiques, notées $\theta_m(t)$ et $\omega_m(t)$ sont mesurées par des capteurs respectivement de position angulaire et de vitesse angulaire, situés au niveau de l'axe de rotation de l'actionneur.

Afin de valider les exigences du cahier des charges du commanditaire Tableau 1, il est nécessaire d'établir un modèle global de la tour British Airways i360. La partie B est consacrée à l'élaboration d'un modèle cinématique.

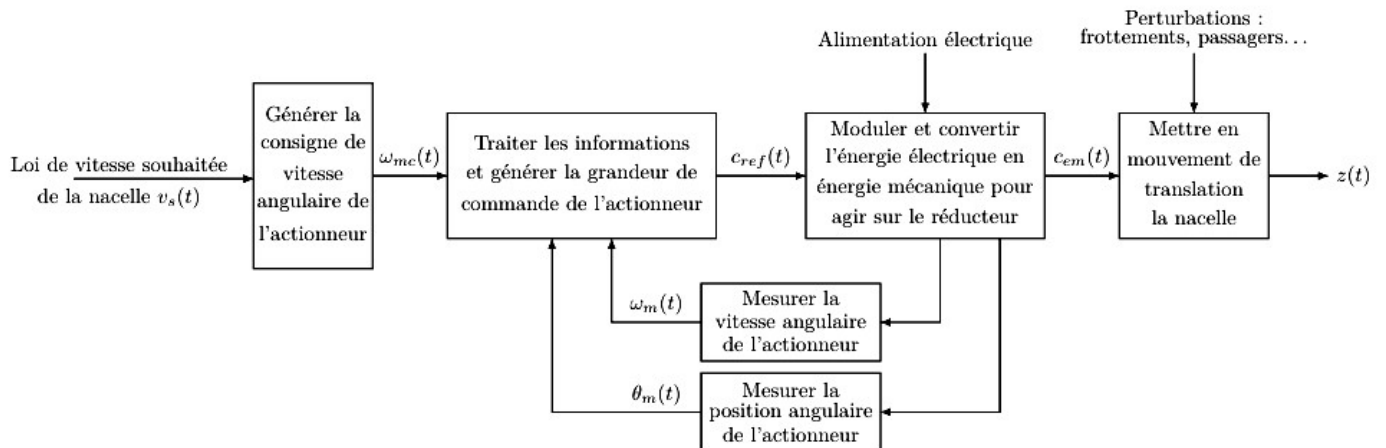


Figure 4 - Structure fonctionnelle de la commande de l'actionneur pour la mise en mouvement de la nacelle

Partie B - Modélisation du mécanisme de transmission du mouvement

Objectifs

Déterminer la loi entrée-sortie cinématique liant la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ de l'actionneur à la vitesse de translation $v(t)$ du centre de gravité de la nacelle et vérifier que l'actionneur est en capacité de satisfaire le critère de vitesse linéaire de la nacelle.

Dans la suite du sujet, les 4 câbles d'équilibrage et les 4 poulies d'équilibrage seront respectivement modélisés par un seul câble d'équilibrage équivalent, noté ceq , et une seule poulie d'équilibrage équivalente, notée peq (Figure 5).

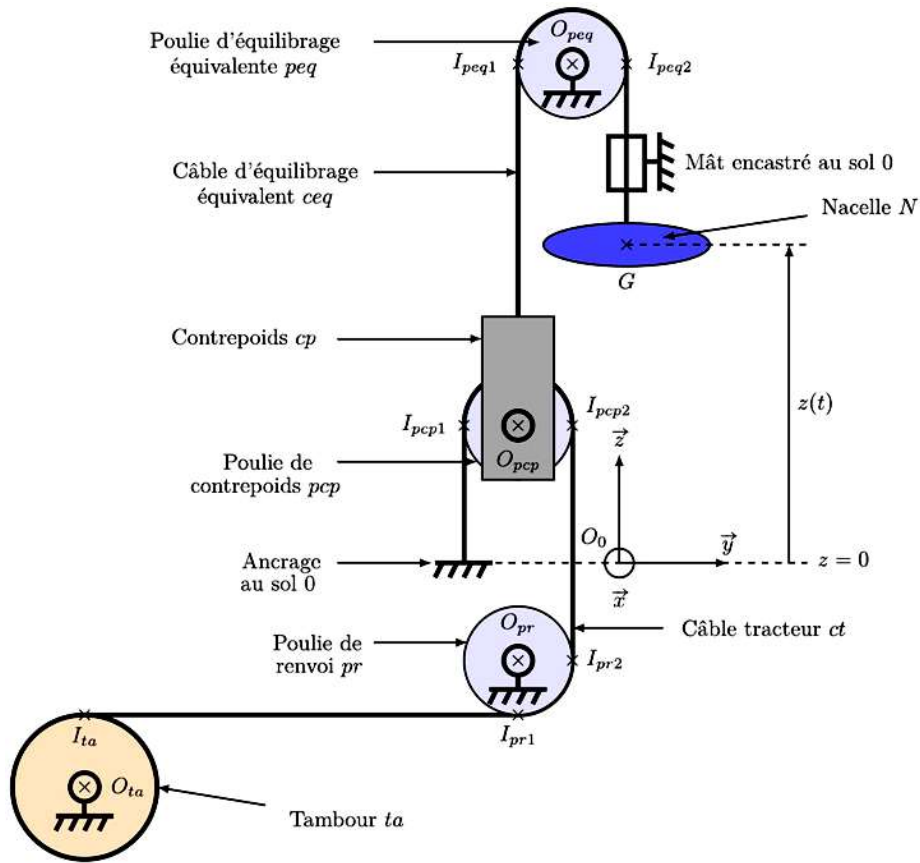


Figure 5 - Modélisation équivalente et paramétrage du mécanisme de mise en mouvement de la nacelle - Actionneur et réducteur non représentés

Notations

- le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au sol 0;
- le centre de gravité de la nacelle N est noté G tel que $\overrightarrow{O_0G} = z(t) \cdot \vec{z}$;
- la vitesse linéaire réelle du centre de gravité G de la nacelle N par rapport au sol 0 est notée $\vec{V}_{G \in N/0} = v(t) \cdot \vec{z}$;
- le câble tracteur est noté ct et le câble d'équilibrage équivalent est noté ceq ;
- le tambour, noté ta , de rayon $R_{ta} = 1,5m$, est en liaison pivot d'axe $(O_{ta}, \vec{x})$ avec le sol 0 ;
- la poulie de renvoi, notée pr , de rayon R_{pr} , est en liaison pivot d'axe $(O_{pr}, \vec{x})$ avec le sol 0 ;
- l'une des extrémités du câble d'équilibrage équivalent ceq est fixée au contrepoids cp . La poulie de contrepoids, notée pcp , de rayon R_{pcp} , est en liaison pivot d'axe $(O_{pcp}, \vec{x})$ avec le contrepoids cp ;
- la vitesse angulaire de la poulie de contrepoids pcp par rapport au sol 0 est notée $\vec{\Omega}_{pcp/0} = \omega_{pcp}(t) \cdot \vec{x}$;
- la vitesse angulaire du rotor de l'actionneur par rapport au sol 0 est notée $\vec{\Omega}_{m/0} = \omega_m(t) \cdot \vec{x}$;
- la vitesse angulaire du tambour ta par rapport au sol 0 est notée $\vec{\Omega}_{ta/0} = \omega_{ta}(t) \cdot \vec{x}$;
- le réducteur de vitesse situé entre l'actionneur et le tambour possède un rapport de transmission $k_{red} = \frac{\omega_{ta}(t)}{\omega_m(t)}$ avec $k_{red} = 1/153$;
- la poulie d'équilibrage équivalente, notée peq , de rayon R_{peq} , est en liaison pivot d'axe $(O_{peq}, \vec{x})$ avec le sol 0. Sa vitesse angulaire par rapport au sol 0 est notée $\vec{\Omega}_{peq/0} = \omega_{peq}(t) \cdot \vec{x}$;

- les points $I_{ta}, I_{pr1}, I_{pr2}, I_{pcp1}, I_{pcp2}, I_{peq}$ et I_{peq2} sont les points géométriques délimitant les zones de contact entre les câbles et le tambour ou les poulies.

Hypothèses

- les câbles sont supposés inextensibles et sont constamment tendus;
- les diamètres des câbles sont négligés par rapport aux dimensions des poulies et du tambour ;
- les contacts entre le câble tracteur ct et la poulie de renvoi pr , entre le câble tracteur ct et la poulie de contrepoids pcp ainsi qu'entre le câble d'équilibrage équivalent ceq et la poulie d'équilibrage équivalent peq sont supposés *sans glissement* relatif.

Les concepteurs ont fait le choix d'enrouler le câble tracteur ct en une seule couche sur le tambour d'enroulement ta afin d'éviter notamment les problèmes de glissement du câble tracteur sur lui-même et de bénéficier d'un diamètre d'enroulement constant. Un dispositif spécifique non étudié dans le sujet permet de garantir une répartition convenable du câble tracteur ct sur le tambour ta en une seule couche.

L'étude porte dans un premier temps sur la partie de la chaîne cinématique située entre le rotor de l'actionneur et la poulie de contrepoids (Figure 5).

Q3. En considérant le non-glissement du câble tracteur ct par rapport au tambour ta , calculer la vitesse $\vec{V}_{I_{ta} \in ct/0}$ en fonction de R_{ta}, k_{red} et $\omega_m(t)$.

Q4. Quelle(s) hypothèse(s) permet(tent) de justifier que $\vec{V}_{I_{ta} \in ct/0} \cdot \vec{y} = \vec{V}_{I_{pcp} \in ct/0} \cdot \vec{z}$?

Q5. En supposant le non-glissement entre le câble tracteur ct et la poulie de contrepoids pcp , déterminer la relation entre $\vec{V}_{I_{pcp2} \in pcp/0}$ et $\omega_m(t), k_{red}$ et R_{ta} .

L'étude porte à présent sur le mécanisme composé du contrepoids cp et de la poulie de contrepoids pcp . Sachant que l'une des extrémités du câble tracteur ct est fixée au sol (voir Ancrage au sol sur la Figure 5) et que, par hypothèse, il y a non-glissement entre la poulie de contrepoids pcp et le câble tracteur ct , alors $\vec{V}_{I_{pcp1}, pcp/0} = \vec{0}$.

Q6. Quelle relation lie $\vec{V}_{O_{pcp} \in pcp/0}$ et $\vec{V}_{O_{pcp} \in ceq/0}$? Justifier votre réponse.

Q7. Exprimer $\vec{V}_{O_{pcp} \in ceq/0}$ en fonction de $\vec{V}_{I_{pcp2} \in pcp/0}$, puis en fonction de $\omega_m(t)$ et des données géométriques utiles.

Pour finir, la relation recherchée s'obtient en effectuant l'étude du mécanisme composé du câble d'équilibrage équivalent ceq , de la poulie d'équilibrage équivalente peq et de la nacelle N .

Q8. Déterminer la relation liant $\vec{V}_{O_{pcp} \in ceq/0}$ et $\vec{V}_{G \in N/0}$. Présenter clairement la démarche mise en œuvre.

Q9. En déduire que la relation liant $v(t)$ et $\omega_m(t)$ s'écrit sous la forme $v(t) = k_{cin} \cdot \omega_m(t)$. Préciser l'expression de k_{cin} en fonction de k_{red} et R_{ta} .

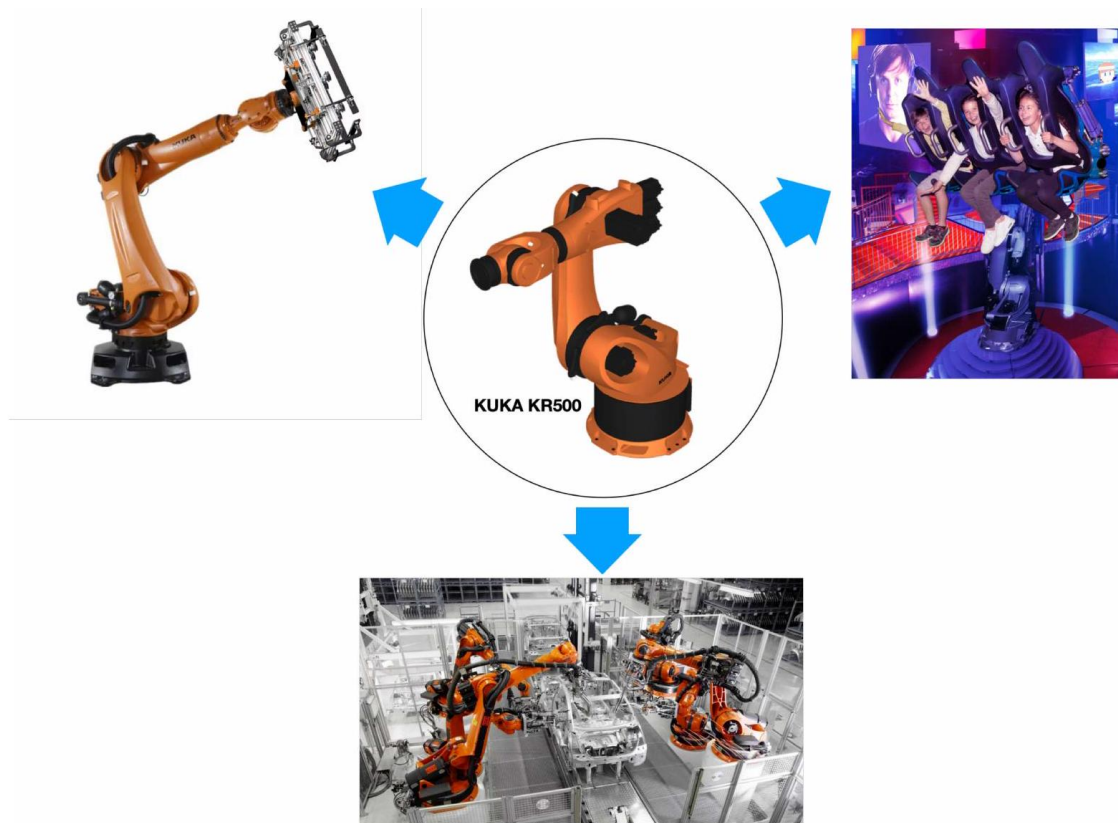
L'actionneur utilisé sur l'ouvrage possède une vitesse de rotation nominale $\omega_{m_{nom}}$ de $980 \text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Q10. Conclure quant à la capacité de l'actionneur à satisfaire le critère de vitesse nominale $v_{nom} = 0,5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ de la nacelle N .

PARTIE II, ETUDE DE LA PINCE D'UN ROBOT POLYARTICULE (D'APRES X-ENS PSI 2026)

Présentation

Les robots polyarticulés sont aujourd'hui utilisés dans divers systèmes mécaniques avancés et pour de multiples applications. Leur précision et efficacité, ainsi que leur grande flexibilité et polyvalence, les rendent idéaux pour réaliser des tâches variées, répétitives et complexes telles que l'assemblage précis de composants ou la manipulation de charges lourdes. On retrouve ainsi de tels systèmes dans différents secteurs industriels (construction automobile, spatial, agro-alimentaire, logistique, etc.).



Un système conçu à partir d'un robot polyarticulé consiste en une machine programmable et structurée en plusieurs sous-systèmes reliés par des joints rotatifs (articulations) qui permettent d'effectuer des mouvements dans plusieurs directions. Il est aussi doté de divers capteurs qui aident à effectuer les tâches, et d'un centre de contrôle qui traite les données des capteurs et pilote les mouvements de manière automatisée.

L'objectif global de l'étude est d'analyser et de valider certaines performances des systèmes à base de robots polyarticulés. On se concentre ici sur le robot polyarticulé de type KUKA KR 500 dont la hauteur peut atteindre presque 7 m. Le robot est constitué d'une embase mobile en rotation autour d'un axe vertical par rapport à un socle (bâti) encastré au sol, sur laquelle est monté un ensemble d'autres composants (épaule, bras, avant-bras, poignet, élément terminal recevant l'effecteur) reliés entre eux dans une chaîne ouverte. Cette architecture permet des rotations indépendantes autour de 6 axes. À l'extrémité du robot, sur l'élément terminal, plusieurs types d'effecteurs peuvent être fixés. L'étude est centrée sur les éléments et spécificités du système suivant : Effecteurs utilisés au bout du robot

Analyse de trois effecteurs

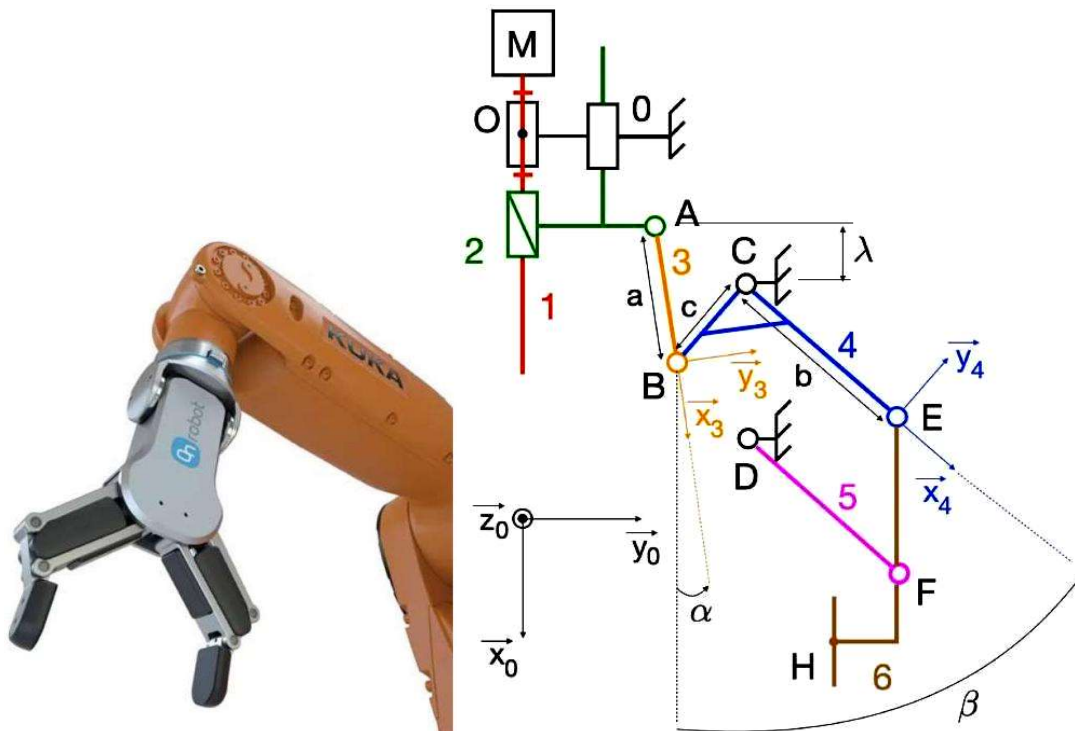
L'objectif de cette partie est de valider les exigences relatives à des familles d'effecteurs qui peuvent être installés à l'extrémité du robot, en fonction de l'utilisation globale du système polyarticulé.

1.1 Effecteur 1 : pince de préhension

De nombreux systèmes à base de robot polyarticulé sont utilisés pour la préhension et le déplacement d'objet. Pour cela, une pince de préhension permet de saisir l'objet entre deux mâchoires. On étudie ici un tel effecteur à partir de la modélisation cinématique donnée ci-dessous. Par symétrie par rapport à un plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$, *seule une moitié de pince* est étudiée, et le problème est considéré plan. Le modèle fait intervenir :

- L'élément terminal du robot, considéré comme le bâti 0, sur lequel la pince est fixée ;
- Une vis 1 en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti 0, entraînée en rotation par un motoréducteur ;
- Un écrou 2 en liaison glissière de direction $\vec{x}_0$ avec le bâti 0 et en liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec la vis 1 ;
- Une biellette 3 en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec l'écrou 2 ;
- Une équerre 4 (pièce de renvoi orthogonal) en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec la biellette 3 et en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$ avec le bâti 0 ;
- Une barre 5 en liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_0)$ avec le bâti 0 ;
- Une mâchoire 6 en liaison pivot d'axe $(E, \vec{z}_0)$ avec l'équerre 4 et en liaison pivot d'axe $(F, \vec{z}_0)$ avec la barre 5.

La rotation du motoréducteur entraîne en translation l'écrou qui, par l'intermédiaire de la biellette, transmet le mouvement à l'équerre puis à la mâchoire.



Dans le plan d'étude, on introduit les repères $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ et $(C, \vec{x}_4, \vec{y}_4)$ liés respectivement aux solides 0, 3 et 4, et on note :

$$\lambda = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{x}_0; \overrightarrow{AB} = a\vec{x}_3; \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF} = b\vec{x}_4; \overrightarrow{BC} = c\vec{y}_4; \overrightarrow{CD} = h\vec{x}_0; \overrightarrow{EH} = d\vec{x}_0 - e\vec{y}_0$$

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_3); \beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4)$$

On suppose de plus que les liaisons sont parfaites.

Q11. : Exprimer les vitesses $\vec{V}_{E \in 4/0}$ et $\vec{V}_{F \in 5/0}$ en fonction de $\dot{\beta}$ et des paramètres géométriques.

Q12. : En déduire le torseur cinématique du mouvement de la mâchoire 6 par rapport au bâti 0 au point H, ainsi que la nature de ce mouvement.

On se place au voisinage de la position fermée de la pince, caractérisée par $\alpha = 0^\circ$, $\beta = \beta_0$ et $\lambda = \lambda_0$.

Q13. : Déterminer la relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\beta}$ au voisinage de cette position fermée.

La vitesse de rotation en sortie du motoréducteur est notée ω_m et le pas de la vis est noté p_v . Une contrainte du cahier des charges fonctionnel est que la vitesse de fermeture horizontale V_f de la pince au point de contact H doit à tout instant rester inférieure à une valeur V_{f0} (de l'ordre de quelques cm/s en pratique).

Q14. : En linéarisant autour de la position fermée précédente, déterminer la loi entrée-sortie reliant ω_m et V_f . En déduire l'expression de la vitesse de rotation limite en sortie du motoréducteur pour satisfaire la contrainte précédente.

Hypothèses du calcul

- Les mouvements de déplacements de la pince sont suffisamment lent pour considérer le système comme quasi statique, on pourra donc appliquer le principe fondamental de la statique ?
- On négligera la masse de tous les solides et on ne tiendra compte que de la masse m (de l'ordre de quelques kg) de l'objet que la pince doit soulever.
- On note f le coefficient de frottement à l'interface entre cet objet et la mâchoire de la pince (6).
- Soit $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{x}_0$ le poids de l'objet à soulever.
- On note également $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{x}_0$ le couple à la sortie du motoréducteur.

Q15. : Tracer le graphe des liaisons de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en ajoutant les couples et efforts appliqués.

On suppose que l'action de l'objet sur 6 est de la forme $\vec{F}_{\text{Objet}/6} = N \cdot \vec{y}_0 + T \cdot \vec{x}_0$.

Q16. : En appliquant un théorème issu du PFS à l'objet déterminer N et T en fonction de m, g et f .

Q17. : Justifier que les efforts transmis par les bielles 3 et 5 sont dirigés respectivement selon $\vec{x}_3$ et $\vec{x}_4$.

Q18. : Isoler le solide 6, et utiliser la projection sur $\vec{y}_4$ du théorème de la résultante statique pour déterminer la composante Y_{46} de l'effort de 4 sur 6, $\vec{F}_{4/6} = X_{46} \cdot \vec{x}_4 + Y_{46} \cdot \vec{y}_4$.

Q19. : Isoler le solide 4, et utiliser la projection sur $\vec{z}_0$ du théorème du moment statique en C pour déterminer l'effort de 3 sur 4, $\vec{F}_{3/4} = F_{34} \cdot \vec{x}_4$.

Q20. : Isoler le solide 2, et utiliser la projection sur $\vec{x}_0$ du théorème de la résultante statique pour déterminer X_{12} l'effort de 1 sur 2, $\vec{F}_{1/2} = X_{12} \cdot \vec{x}_0 + Y_{12} \cdot \vec{y}_0$.

Q21. : Donner les composantes de la liaison hélicoïdale entre 1 et 2.

Q22. : En isolant la vis 1 liée à la sortie du moto-réducteur, déterminer le couple total C_m pour maintenir en équilibre l'objet de masse m , en fonction de du paramétrage du système.

PARTIE III, VEHICULE A DEUX ROUES, GYROSTABILISE (D'APRES CSE PSI 2026)

Les pays en voie de développement, où la densité de population est très élevée dans les villes, sont confrontés depuis des décennies à une équation délicate à résoudre : permettre une grande mobilité de la population et limiter le nombre de décès sur les routes.

Selon les données de l'OMS (chiffres de l'année 2021¹), le taux de mortalité moyen lié aux accidents de la route s'établit en moyenne à 15 décès pour 100000 habitants. Cependant, ce taux moyen masque des disparités et le niveau de décès peut atteindre des valeurs plus élevées selon les régions dans le monde, comme par exemple dans la région de l'Asie du Sud-Est qui regroupe 28 % des décès.

Dans certains pays les déplacements se font souvent en deux roues motorisés. Aussi, des constructeurs, tels que Liger Mobility en Inde et Lit Motors aux États Unis, réfléchissent à équiper leurs véhicules à deux roues de dispositifs antichute. Le point commun entre ces différents projets est l'utilisation de gyroscopes permettant de contrôler l'inclinaison latérale du deux-roues, appelée roulis, et donc d'éviter la chute.



Figure 1 - Le Liger X à l'équilibre, sans béquille



Figure 2 - Le Lit Motors AEV

La vitesse de rotation d'une roue engendre un effet gyroscopique qui permet de la maintenir en équilibre, ce qui influe sur le pilotage du véhicule. En effet, au-dessus de $35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, un deux-roues est en équilibre grâce à l'effet gyroscopique de ses roues. Le contrôle de la trajectoire se fait alors en inclinant le deux-roues.

Lors d'une quantification des causes d'accidents de deux-roues motorisés faite en 2019, il a été démontré qu'un facteur aggravant est le défaut de maîtrise lors du freinage. En effet, les scooters de petite cylindrée utilisés majoritairement en milieu urbain ne sont que rarement équipés d'un système antiblocage des roues (ABS) et tout aussi rarement d'un système de couplage entre les actions des freins avant et arrière. C'est le mauvais dosage de ces actions qui conduit le plus souvent à la chute lors d'un évitement.

Dans ce contexte, il est nécessaire d'imaginer un système anti-chute pour éviter la perte d'équilibre. Le système, étudié ici, doit maintenir l'équilibre du scooter à basse vitesse en dépit des perturbations éventuelles et ne pas gêner la conduite quelle que soit la vitesse.

Stabiliser un véhicule à deux roues lors d'un trajet urbain, sans perturber la conduite sur route.

Afin de répondre à cet objectif, l'étude s'appuie sur le cahier des charges représenté par les contraintes exprimées au moyen du diagramme des exigences partiel de la figure 3.

La solution retenue en vue de stabiliser le véhicule à deux roues fait appel à un actionneur gyroscopique piloté, fixé sur le cadre du véhicule. L'objectif de cette étude est alors d'imaginer une loi de commande stabilisante répondant aux contraintes exprimées par le diagramme des exigences partiel de la figure 3. En exploitant les mesures disponibles, cette loi de commande doit permettre de calculer le signal de pilotage de l'actionneur gyroscopique en vue de maintenir l'équilibre du véhicule.

La démarche de conception de la loi de commande nécessite de définir les modèles représentant le comportement du système, mais aussi de déterminer le temps de stabilisation maximal lors d'un freinage d'urgence en vue de vérifier la condition de réactivité pour cette phase de fonctionnement. Le calcul de ce temps maximal est une donnée importante car elle conditionne le temps de réponse à imposer aux chaînes d'asservissement de ce système.

Les hypothèses suivantes sont faites (en référence au paramétrage fourni en figure 4)

- la masse de l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ est $M = 280$ kg avec comme poids de l'ensemble $P = Mg$ ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur);
- le scooter et son pilote se déplacent en ligne droite à une vitesse initiale de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (dans ce cas, la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est confondue avec la base $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$);
- le risque de chute n'est possible qu'à une vitesse inférieure à $35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, vitesse à partir de laquelle l'effet gyroscopique des roues ne maintient plus naturellement l'ensemble à l'équilibre ;
- le freinage n'est effectué que sur la roue avant (3), et le scooter est équipé de l'ABS assurant un roulement sans glissement (RSG) entre la roue avant et le sol;
- le moteur ne fournit aucun couple sur la roue arrière ;
- les contacts des roues avec le sol sont modélisés par des liaisons sphère-plan avec frottement (de normale $\vec{x}_0$ pour la roue arrière (4) et pour la roue avant (3)). Chaque roue roule sans glisser sur la route au niveau de son point de contact. Les actions mécaniques exercées par le sol sur les roues sont modélisées (en modélisation plane) par :

$$\{\tau_{\text{Sol} \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c} N_A \vec{x}_0 - T_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\tau_{\text{Sol} \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{c} N_B \vec{x}_0 - T_B \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

- l'ensemble (1) {cadre du scooter + pilote (considéré comme infiniment rigide sur le scooter)} est lié par le biais d'une liaison pivot d'axe ($O_2, \vec{x}_2$) avec la fourche (2) ; le moteur ne fournit aucun couple sur la roue arrière;
- les deux roues du scooter (de centres O_3 et O_4) sont guidées en rotation par rapport à la fourche (2) à l'avant et à l'ensemble (1) à l'arrière du scooter ;
- le scooter se déplace en translation rectiligne à la vitesse $\vec{V}_{G \in 1/0} = v(t) \vec{y}_0$ et l'accélération γ est telle que $\vec{\Gamma}_{G \in 1/0} = -\gamma \vec{y}_0$ (avec G centre de gravité de l'ensemble Σ);
- le coefficient de frottement roue/sol est noté f avec $f = 0,6$ (cas défavorable d'une route dégradée) ;
- pour cette étude, les masses et les inerties des roues sont négligées ;
- le scooter étant en ligne droite, le paramétrage géométrique est le suivant :

$$\vec{O_4 O_3} = L \vec{y}_0 \quad \vec{A O_3} = \vec{B O_4} = R \vec{x}_0 \quad \vec{O_4 G} = h \vec{x}_0 + a_4 \vec{y}_0 \quad \vec{O_3 G} = h \vec{x}_0 - a_3 \vec{y}_0$$

avec $L = 1350 \text{ mm}$ $R = 240 \text{ mm}$ $h = 570 \text{ mm}$ $a_4 = 405 \text{ mm}$ $a_3 = 945 \text{ mm}$.

Le paramétrage retenu pour l'étude du scooter et la modélisation à l'aide d'un graphe de liaisons sont fournis respectivement sur les figures 4 et 5.

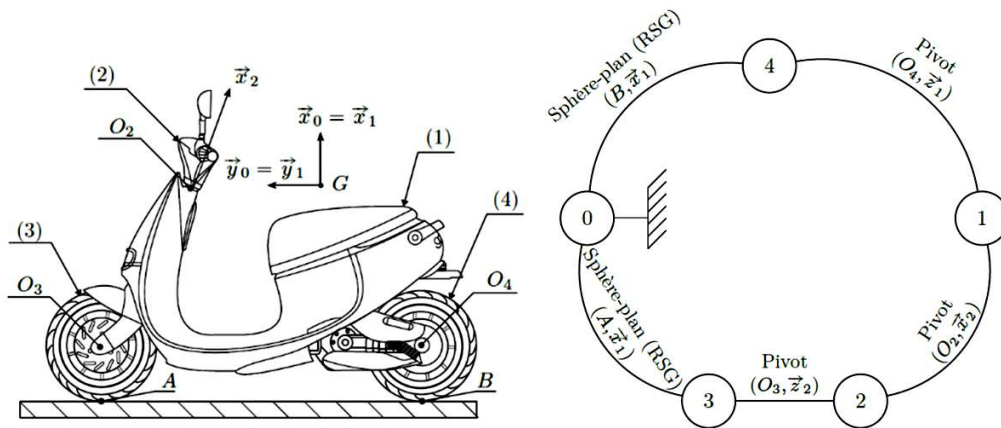


Figure 4 - Paramétrage dimensionnel du scooter étudié en ligne droite

Figure 5 - Graphe de liaisons d'un scooter classique, sans dispositif de stabilisation

Q23. En isolant la roue arrière (4), démontrer que $T_B = 0$.

Q24. En appliquant le principe fondamental de la statique à l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$, exprimer, sous forme littérale, N_A , N_B et T_A en fonction de g , de la masse M et des données géométriques.

Afin de faire face au risque de chute, une solution est d'implanter un système de gyrostabilisation se mettant en action dans le temps de freinage minimal. La conception et le réglage de ce système nécessitent, entre autres, de disposer d'un modèle de l'ensemble {pilote + scooter} valide à basse vitesse.

Le scooter suit initialement une trajectoire rectiligne et le paramétrage retenu est fourni figure 6.

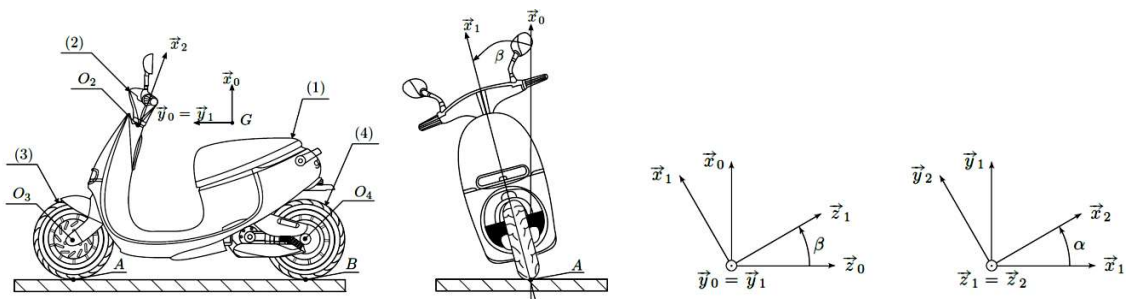


Figure 6 - Paramétrage du scooter

Avec :

- le repère R_0 lié au sol (0) ($O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) avec $\vec{x}_0$ vertical ascendant ;
- le repère R_1 lié à l'ensemble {cadre + pilote} (1) ($G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) avec $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. L'angle de roulis du cadre par rapport au sol (0) est noté $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. La matrice d'inertie est notée
- l'angle dans le plan horizontal entre la fourche (2) de ($O_2, \vec{x}_2$) par rapport au cadre (1) ($O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) est supposé nul au cours de cette partie de l'étude ;
- l'angle de chasse $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ avec $\alpha = -20^\circ$ représente l'angle entre l'axe de la colonne de direction et le vecteur $\vec{x}_1$. La masse de la fourche (2) est négligée ;
- le repère R_3 lié à la roue avant (3) ($O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$) avec $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$. L'angle de rotation θ_3 de la roue avant (3) par rapport à la fourche (2) est paramétré tel que $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$. En considérant
 - R le rayon de la roue ;

- A le point de contact entre la roue et le sol. L'hypothèse de roulement sans glissement en A est appliquée et $\overrightarrow{AO_3} = R\vec{x}_1$;
- d, h_3 et a_3 tels que $\overrightarrow{O_3G} = -d\vec{y}_2 + h_3\vec{x}_1 - a_3\vec{y}_1$ (d est appelé le déport de la fourche);
- la masse et l'inertie de la roue sont négligées.
- le repère R_4 lié à la roue arrière (4) ($O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4$) avec $\vec{z}_4 = \vec{z}_2$. L'angle de rotation θ_4 de la roue arrière (4) par rapport au cadre (1) est paramétré tel que $\theta_4 = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$. En considérant
 - R le rayon de la roue ;
 - B le point de contact entre la roue et le sol. L'hypothèse de roulement sans glissement en B est appliquée et $\overrightarrow{BO_4} = R\vec{x}_1$;
 - h et a_4 tels que $\overrightarrow{O_4G} = h\vec{x}_1 + a_4\vec{y}_1$;
 - la masse et l'inertie de la roue sont négligées.

Q25. Réaliser le bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant à l'ensemble $\Sigma = \{1 + 2 + 3 + 4\}$ et exprimer les torseurs des actions mécaniques correspondants.

Q26. On notera $\overrightarrow{O_0A} = y(t)\vec{y}_0$. En appliquant les dérivations vectorielles nécessaires de $\overrightarrow{O_0G}$ par rapport à la base B_0 , calculer la vitesse au point G de (1) par rapport à (0), notée $\vec{V}_{G \in 1/0}$ et l'exprimer dans la base B_1 en fonction de $\dot{\beta}, v$ et des paramètres géométriques nécessaires.

Une application du théorème du moment dynamique (non étudié dans ce sujet) sur le scooter complet permet d'aboutir à un modèle dynamique de l'ensemble {pilote + scooter + gyroscope} dont la grandeur de commande est le couple de la machine électrique C_m . Ce modèle est exploité dans la suite pour étudier une loi de commande stabilisante du système.

En faisant l'hypothèse que l'ensemble {pilote + scooter + gyroscope} se déplace à basse vitesse et en ligne droite ($\beta \approx 0$ et $\psi \approx 0$), l'équation comportementale utilisée est :

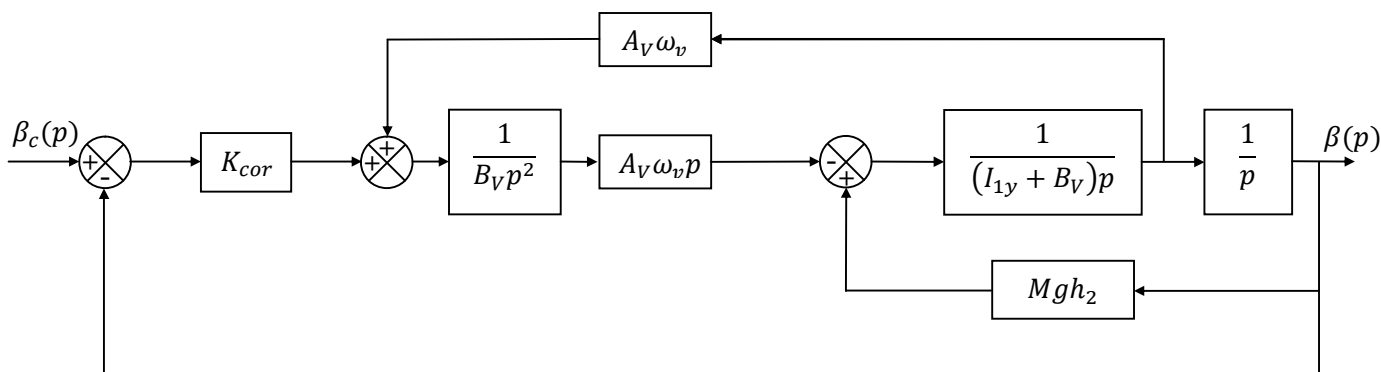
$$(I_{1y} + B_V)\ddot{\beta}(t) = -A_V\omega_v\dot{\psi}(t) + Mgh_2\beta(t) \quad (1)$$

avec I_{1y} le moment d'inertie de l'ensemble (1) autour de $\vec{y}_1$.

L'étude du gyroscope conduit à l'équation (2) reliant le couple C_m à l'angle β :

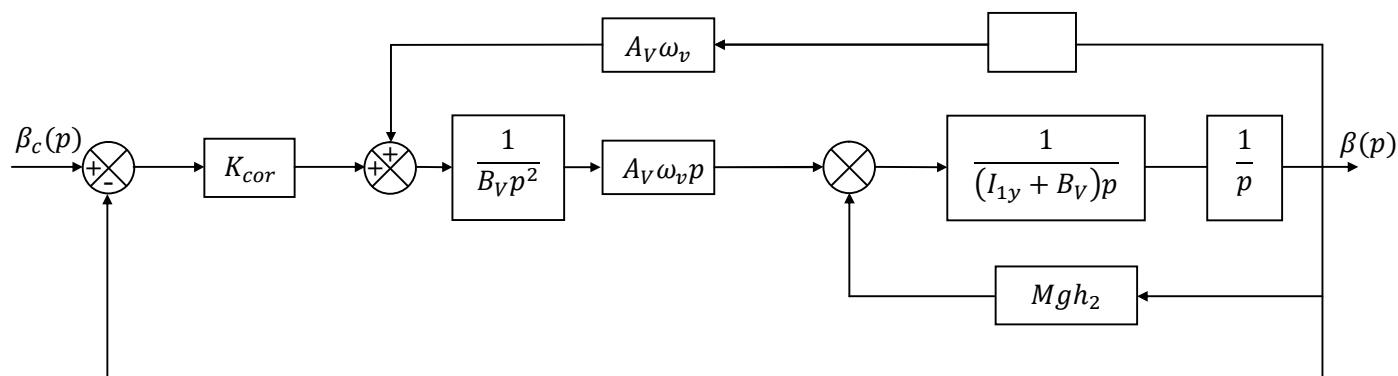
$$C_m(t) + A_V\omega_v\dot{\beta}(t) = B_V\ddot{\psi}(t) \quad (2)$$

L'ensemble des équations et l'utilisation d'un correcteur proportionnel noté K_{cor} conduisent au schéma bloc de la structure asservie représentée figure 9.

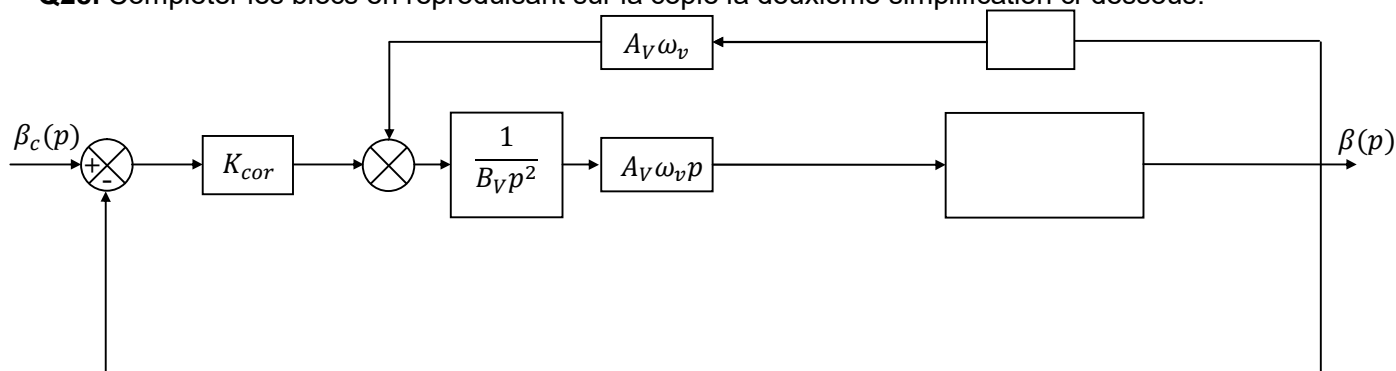


Don propose de faire plusieurs modification du schéma bloc en manipulant les blocs.

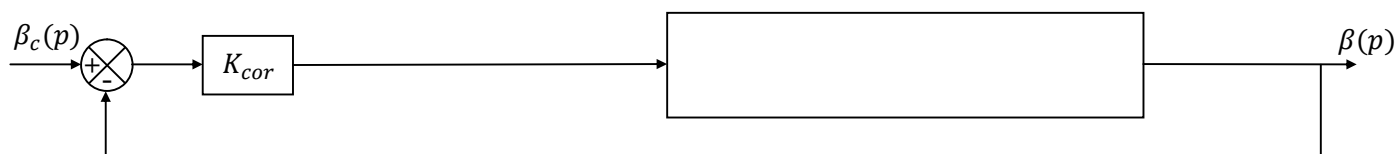
Q27. Compléter le bloc en reproduisant sur la copie la première simplification ci-dessous



Q28. Compléter les blocs en reproduisant sur la copie la deuxième simplification ci-dessous.



Q29. Compléter les blocs en reproduisant sur la copie la troisième simplification ci-dessous.



Q30. Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert en boucle fermée $\frac{\beta(p)}{\beta_c(p)}$

Q31. Conclure sur le comportement du scooter gyrostabilisé avec une correction proportionnelle seule et sur la capacité de ce système à assurer une robustesse vis-à-vis de la stabilité au variation d'angle de roulis (β).

FIN