Nom :
Prénom :

PARTIE 1 AUTOMATIQUE (EXTRAIT D'UN SUJET CENTRALE SUPELEC TSI)

Le télésiège « Vologne Express »

La station de tourisme de montagne de La Bresse - Hohneck est située dans le département des Vosges.





Figure 1 - Vue du bas des pistes de la station de La Bresse - Hohneck en hiver et des pistes de VTT en été.

Outre les activités historiques de ski, tant alpin que nordique, la station a développé depuis de nombreuses années des circuits balisés pour les promenades en raquettes, vélos tout terrain et cyclotourisme, ainsi que la randonnée : les domaines pour ces différentes activités sont accessibles de fin décembre à fin mars puis de fin avril à fin septembre.

Particulièrement connue pour la qualité et la diversité de ses circuits de vélo sportif, cette station a notamment accueilli une manche de la coupe du monde de VTT de descente et cross country en 2018. Elle a été également centre de préparation des sportifs lors des jeux olympiques de Paris 2024.

Les remontées mécaniques permettant l'accès à la partie haute de la station doivent être choisies pour permettre à la fois le transport des skieurs pendant la saison d'hiver mais également des randonneurs ou des vététistes avec leurs vélos pendant la saison d'été avec le minimum d'adaptation des nacelles. Parmi celles-ci, le télésiège débrayable à six places « Vologne Express » étudié dans ce sujet a été installé dans la station à l'été 2011 par l'entreprise française Poma, leader mondial de l'installation d'équipements de transports par câbles.

Le télésiège est constitué d'un câble qui entraîne $N = 72$ nacelles et qui se déroule entre deux gares en étant supporté par 11 pylônes (P_i) quasiment équirépartis sur toute la longueur du trajet, la partie motorisation est située en gare haute et la partie de mise en tension du câble par un ressort réglable en gare basse : voir synoptique en fin d'énoncé (pour des raisons de clarté, les nacelles montantes et descendantes n'ont pas été dessinées).

Quelques exigences du client (la station de La Bresse - Hohneck) sont regroupées dans le diagramme de la figure 2, les durées d'accélération et de freinage de la sous-exigence Id = "1.1" étant définies vers et depuis la vitesse nominale.

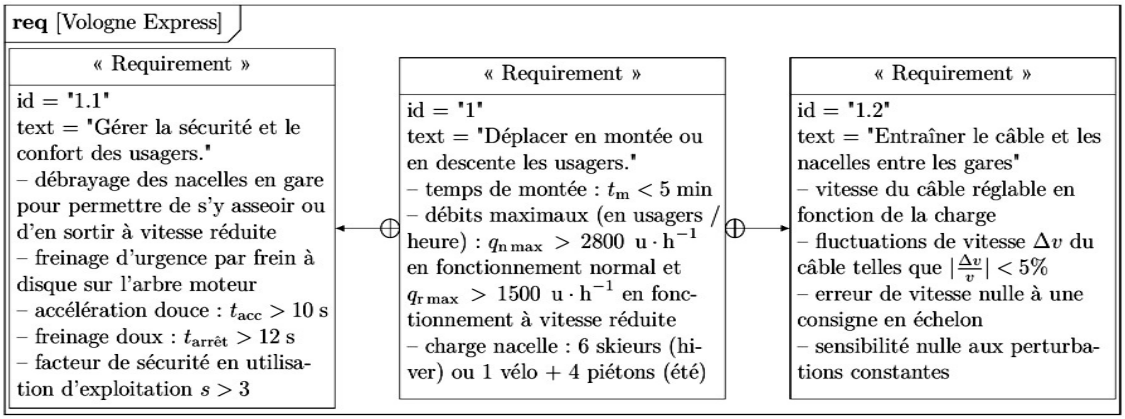


Figure 2 - Diagramme partiel des exigences (Requirement Diagram, identifiant req) du télésiège Vologne Express.

Les deux hypothèses suivantes sont faites pour tout le sujet :

- le câble ne glisse pas sur les poulies des deux gares grâce au système de mise en tension à ressort situé dans la gare basse, sa vitesse de déroulement, et donc celle des nacelles qui y sont accrochées, est alors proportionnelle aux vitesses de rotation des poulies ;
- et toutes les pertes sont négligées, en particulier celles induites par guidage du câble par les roues situées sur les onze pylônes répartis sur tout le trajet de montée ou de descente et dans les deux gares.

- Caractéristiques du télésiège « Vologne Express »

- Objectif

Afin de valider les exigences définies sur le diagramme de la figure 2 en termes de débit du télésiège afin que la montée soit suffisamment rapide tout en assurant la sécurité et le confort des passagers, il est nécessaire de vérifier certaines données techniques d'exploitation : c'est l'objet de cette partie.

- Validation de l'exigence de débit

- Objectif

Le but de cette partie est de valider les performances en débit de ce système pour l'objectif d'exploitation en hiver.

Le télésiège comporte 33 nacelles en montée à chaque instant, pouvant chacune transporter 6 skieurs.

La vitesse de déplacement des nacelles est de $v_{\mathrm{n}} = 5{,}08\ \mathrm{m}\cdot\ \mathrm{s}^{-1}$ (fonctionnement normal) ou de $v_{\mathrm{r}} = 3{,}52\ \mathrm{m\ s}^{-1}$ (fonctionnement à vitesse réduite) pour une longueur du trajet $L_{\mathrm{p}} = 1217\ \mathrm{m}$: voir le synoptique page 5.

Q1. Déterminer les valeurs du temps t_{m} que met un skieur pour rejoindre le sommet et les débits maximaux $q_{\mathrm{n\ max}}$ et $q_{\mathrm{r\ max}}$ en usagers par heure lors d'un fonctionnement normal ou à vitesse réduite et comparer ces valeurs aux exigences du client (exigence id = "1" figure 2).

Étude de la transmission cinématique

- Détermination du rapport de la chaîne cinématique

La valeur du rapport k_{tp} de la chaîne cinématique doit être précisément connu pour dimensionner le moteur d'une manière cohérente : pour la déterminer, deux méthodes sont proposées, l'une « externe » utilisant des mesures sur site, l'autre « interne » utilisant les données constructeurs disponibles dans la documentation technique.

Première méthode : détermination « externe » par les valeurs mesurées en situation

Q2. À partir des données fournies dans le tableau en fin d'énoncé, et sachant que le régime nominal du moteur correspond à la vitesse normale d'évolution, calculer la valeur numérique du rapport k_{tp} entre la vitesse v du câble qui entraîne les nacelles (en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) et la vitesse de rotation ω_{m} du moteur électrique (en $\mathrm{rad}.\mathrm{s}^{-1}$).

Seconde méthode : détermination «interne » par l'analyse de la chaîne cinématique

Une description en chaînes fonctionnelles (chaîne d'information et chaîne de puissance inter-connectées) de la commande d'axe assurant l'asservissement en vitesse du câble porteur est fournie sur le document réponse DR1.

Q3. Répondre sur le document réponse DR1. En utilisant les informations fournies page 5 et le diagramme de définition de blocs page 6, compléter les éléments technologiques manquants (partie haute des blocs) dans la description en chaînes fonctionnelles de l'asservissement de vitesse du câble, ainsi que la fonction des blocs (partie basse des blocs).

Q4. Déterminer l'expression du coefficient k_{tp} défini question Q2 en fonction du diamètre D_{h} de la poulie de la gare haute et du rapport $k_{\text{réd}}$ du réducteur. Faire l'application numérique et valider la valeur trouvée précédemment.

- Configuration de secours

En configuration de secours, le câble est entraîné à la vitesse de $v_{\text{s}} = 1{,}25\ \text{m} \cdot\ \text{s}^{-1}$ par le moteur diesel associé à un réducteur dédié, un coupleur de gain unitaire puis le réducteur principal .

Q5. Déterminer la valeur de la vitesse de rotation N_{s} de ce moteur thermique, en tours$\cdot\ \text{min}^{-1}$, pour cette configuration de secours : est-elle compatible avec la valeur maximale possible ?

- Estimation des grandeurs de la machine à courant continu en charge

- Objectif

La motorisation à courant continu implantée étant d'une puissance conséquente, les valeurs des paramètres (résistance, constantes de couplage, etc.) évoluent d'une manière non négligeable en fonction de la charge : le but de cette partie est d'estimer les valeurs des grandeurs associées au modèle de la machine à courant continu assurant la motorisation du télésiège en fonctionnement normal.

- Mise en place du schéma-bloc

La motorisation du système est faite par un moteur électrique à courant continu dont le comportement est modélisé par les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} (E_1) & u_{\text{m}}(t) = L\dfrac{\text{d}i(t)}{\text{d}t} + Ri(t) + e(t) \\ (E_2) & J_{\text{éq}}\dfrac{\text{d}\omega_{\text{m}}(t)}{\text{d}t} = c_{\text{m}}(t) + c_{\text{r}}(t) - f_{\text{éq}}\,\omega_{\text{m}}(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (E_3) & e(t) = k\omega_{\text{m}}(t) \\ (E_4) & c_{\text{m}}(t) = ki(t) \end{cases}$$

Dans ces équations :

- les grandeurs constantes sont la résistance R (en Ω) et l'inductance L de l'induit (en H), la constante de couplage k (en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$) ainsi que l'inertie équivalente $J_{\text{éq}}$ (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) et le frottement visqueux $f_{\text{éq}}$ (en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$) équivalents rapportés à l'axe moteur ;
- et les grandeurs variables sont la tension d'alimentation $u_{\text{m}}(t)$ (en V), l'intensité $i(t)$ consommée dans l'induit (en A), la vitesse de rotation $\omega_{\text{m}}(t)$ de l'arbre moteur (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), la force contre-électromotrice $e(t)$ (en V) ainsi que le couple moteur $c_{\text{m}}(t)$ et le couple résistant équivalent rapporté à l'axe moteur $c_{\text{r}}(t)$ (en $\text{N} \cdot \text{m}$).

Des mesures sur site permettent de constater une faible influence de l'inductance L et du frottement visqueux équivalent rapporté à l'axe moteur $f_{\text{éq}}$: par conséquent, les équations (E_1) et (E_2) sont simplifiées en négligeant respectivement les termes $L\frac{\text{d}i(t)}{\text{d}t}$ et $f_{\text{éq}}\,\omega_{\text{m}}(t)$ devant les autres termes de chaque équation.

Q6. Faire les calculs sur la copie et compléter le schéma-bloc du document réponse DR2 dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices.

Q7. Déterminer les expressions canoniques et les unités des grandeurs associées pour les fonctions de transfert $H_{\text{m}}(p)$ et $H_{\text{r}}(p)$ telles que

$$\Omega_{\text{m}}(p) = H_{\text{m}}(p)U_{\text{m}}(p) + H_{\text{r}}(p)C_{\text{r}}(p)$$

Le schéma-bloc de l'asservissement de la vitesse de déplacement des nacelles est fourni figure 7 où le filtre numérique étudié précédemment est assimilé à un gain unitaire car sa constante de temps τ est très petite et a donc une influence négligeable sur les performances de l'asservissement.

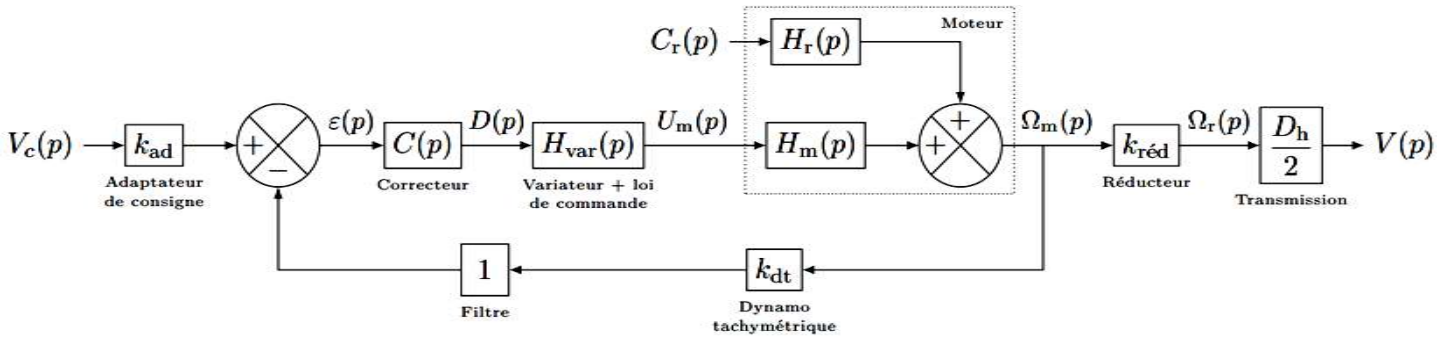


Figure 7 - Schéma-bloc de l'asservissement de la vitesse de déplacement $v(t)$ des nacelles.

Q8. Pour assurer le bon réglage de l'asservissement déterminer le gain k_{ad} de l'adaptateur de consigne.

Le comportement statique du variateur est modélisé par un gain pur.

Pour le comportement dynamique, on constate qu'une variation de la commande se répercute sur la tension continue u_{m} seulement après un certain de temps de retard T_{v} qui peut, en première approximation, être modélisé par un premier ordre de constante de temps égale à la moitié du retard (approximation dite «de Padé»).

La fonction de transfert du variateur et de sa loi de commande est donc approchée par la forme suivante :

$$H_{\mathrm{var}}(p) \simeq \frac{K_{\mathrm{v}}}{1+\frac{T_{\mathrm{v}}}{2}p}$$

Q9. On suppose $\mathrm{C_r(p)=0}$ Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{\mathrm{bo}}(p)$ de l'asservissement de la figure 7 dans le cas d'une correction unitaire $(C(p)=1)$.

Q10. Préciser la classe de cette fonction de transfert. Que peut-on dire de la précision de cet asservissement en poursuite ?

On souhaite corriger le système pour le rendre précis et insensible aux perturbations :

$$C_1(p) = K_{\mathrm{p}} \qquad C_2(p) = K_{\mathrm{p}}\left(1+\frac{1}{T_{\mathrm{i}}p}\right)$$

avec le gain $K_{\mathrm{p}} > 0$ et la constante de temps $T_{\mathrm{i}} > 0$. On choisit le correcteur $C_2(p)$ précédemment proposé avec $T_{\mathrm{i}} = \frac{T_{\mathrm{v}}}{2} = 5$ s, valeur déterminée par une pré-étude. De même on prendra $H_{\mathrm{m}}(p) = \frac{K_{\mathrm{m}}}{1+T_{\mathrm{m}}p}$ et $H_{\mathrm{r}}(p) = \frac{K_{\mathrm{r}}}{1+T_{\mathrm{m}}p}$

Q11. Déterminer la fonction de transfert en régulation $H_2(p) = \frac{V(p)}{C_r(p)}\Big]_{V_c(p)=0}$, la mettre sous forme canonique.

Q12. Déterminer l'erreur en régulation du système. Conclure sur la sensibilité du système aux perturbations.

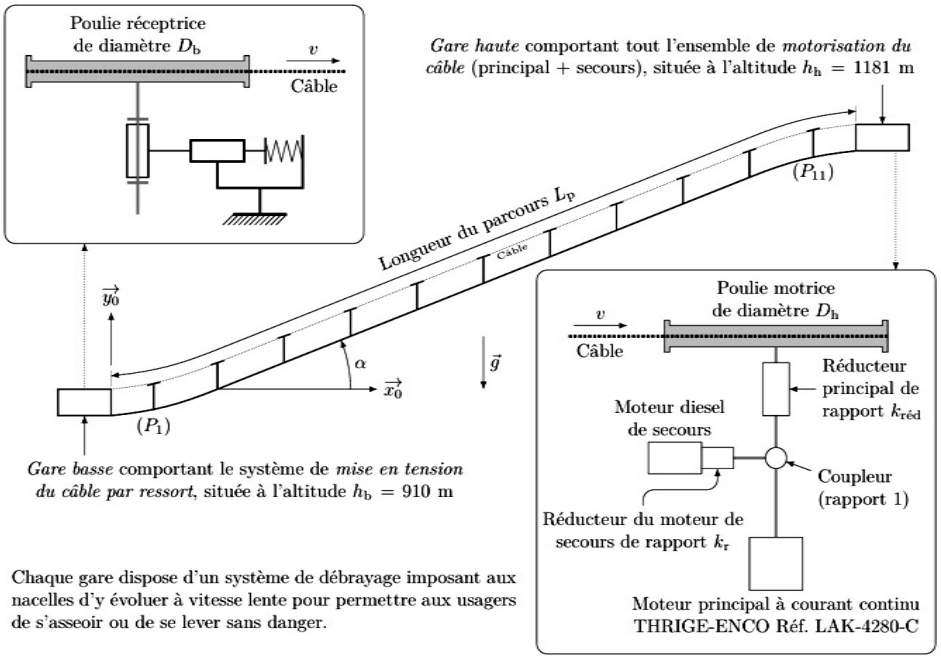
Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour la valeur $K_{\mathrm{p}} = 1$ est fourni dans le document réponse DR3.

Q13. Sur le document réponse DR3, tracer le comportement asymptotique pour le gain et la phase. En déduire la forme de la fonction de transfert, en particulier sa classe, son ordre et son gain statique. Sur la copie indiquer la démarche utilisée et les calculs.

On prend le correcteur $C_1(p) = K_\text{p}$. L'objectif est de régler la valeur du gain K_p afin d'avoir une marge de gain MG$\geqslant 12$ dB et une marge de phase M$\varphi = 60°$, valeurs qui assurent une absence totale d'oscillations transitoires.

Q14. Répondre sur le document réponse DR3. Sur la copie indiquer la démarche utilisée et le calcul de K_p.

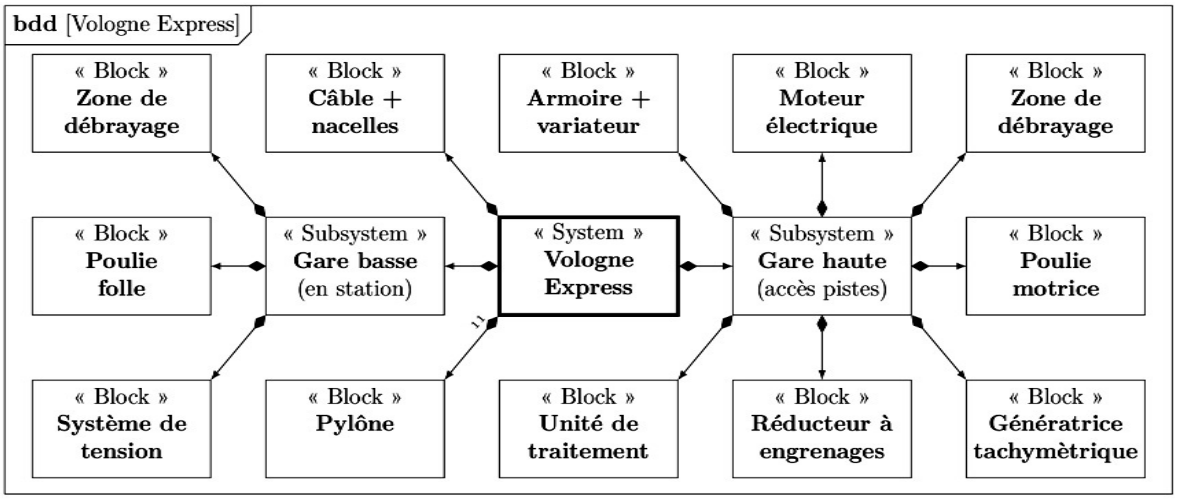
Synoptique du télésiège débrayable Vologne Express



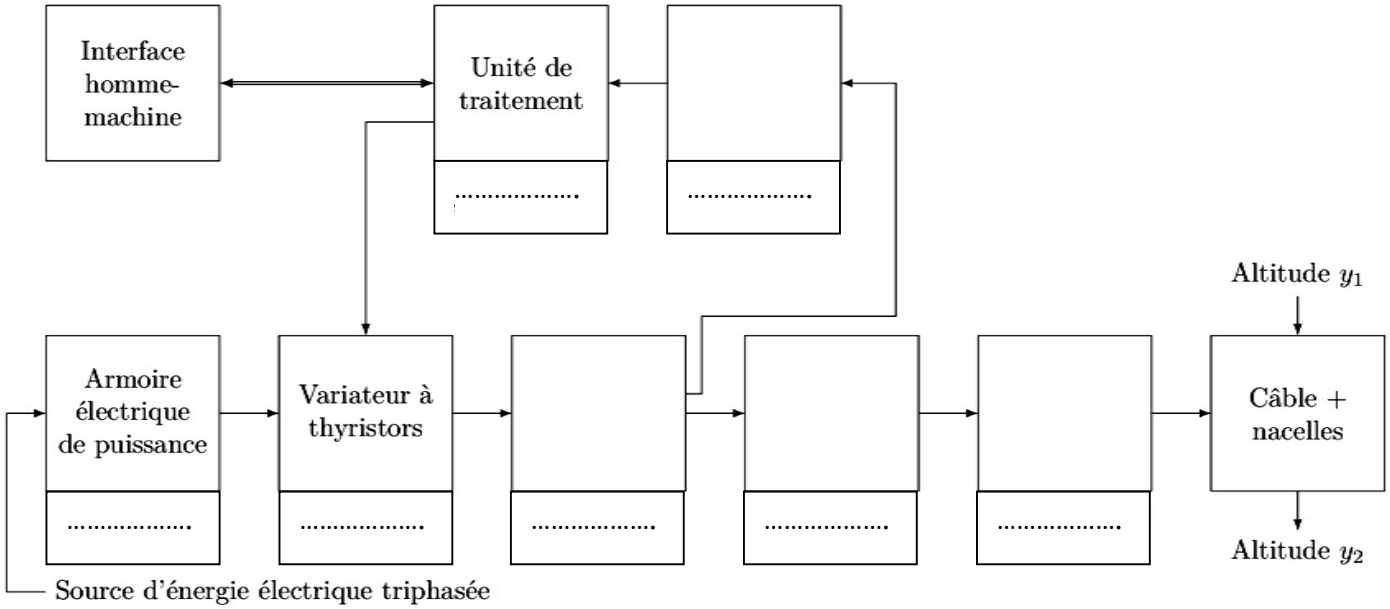
Notations et données numériques des grandeurs utilisées dans le sujet

Grandeur	Notation	Valeur
Environnement du télésiège		
- longueur du parcours entre gares	L_p	1217 m
Vitesses des nacelles fixées au câble		
- fonctionnement normal (référence d'utilisation)	v_n	5,08 m · s^{-1}
- fonctionnement à vitesse réduite (vent trop fort, etc.)	v_r	3,52 m · s^{-1}
- fonctionnement de secours avec le moteur thermique	v_s	1,25 m · s^{-1}
Poulies		
- diamètre de la poulie en gare basse	D_b	4,1 m
- diamètre de la poulie en gare haute	D_h	4,6 m
Moteur à courant continu + réducteur (motorisation principale)		
- vitesse nominale	$N_\text{m nom}$	1267 tours·min $^{-1}$
- réducteur à engrenages principal	$k_\text{réd}$	1 / 60,07
Moteur diesel + réducteur (motorisation de secours)		
- vitesse maximale du moteur	$N_\text{s max}$	3000 tours · min^{-1}
- réducteur à engrenages du moteur	k_r	1 / 7,04

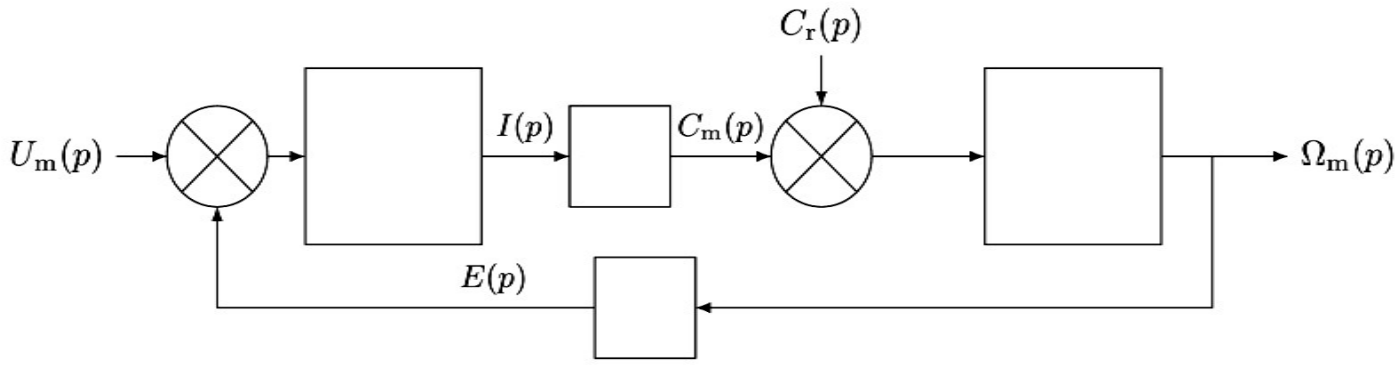
Diagramme de définitions de blocs (Block Definition Diagram, identifiant bdd) partiel du télésiège.



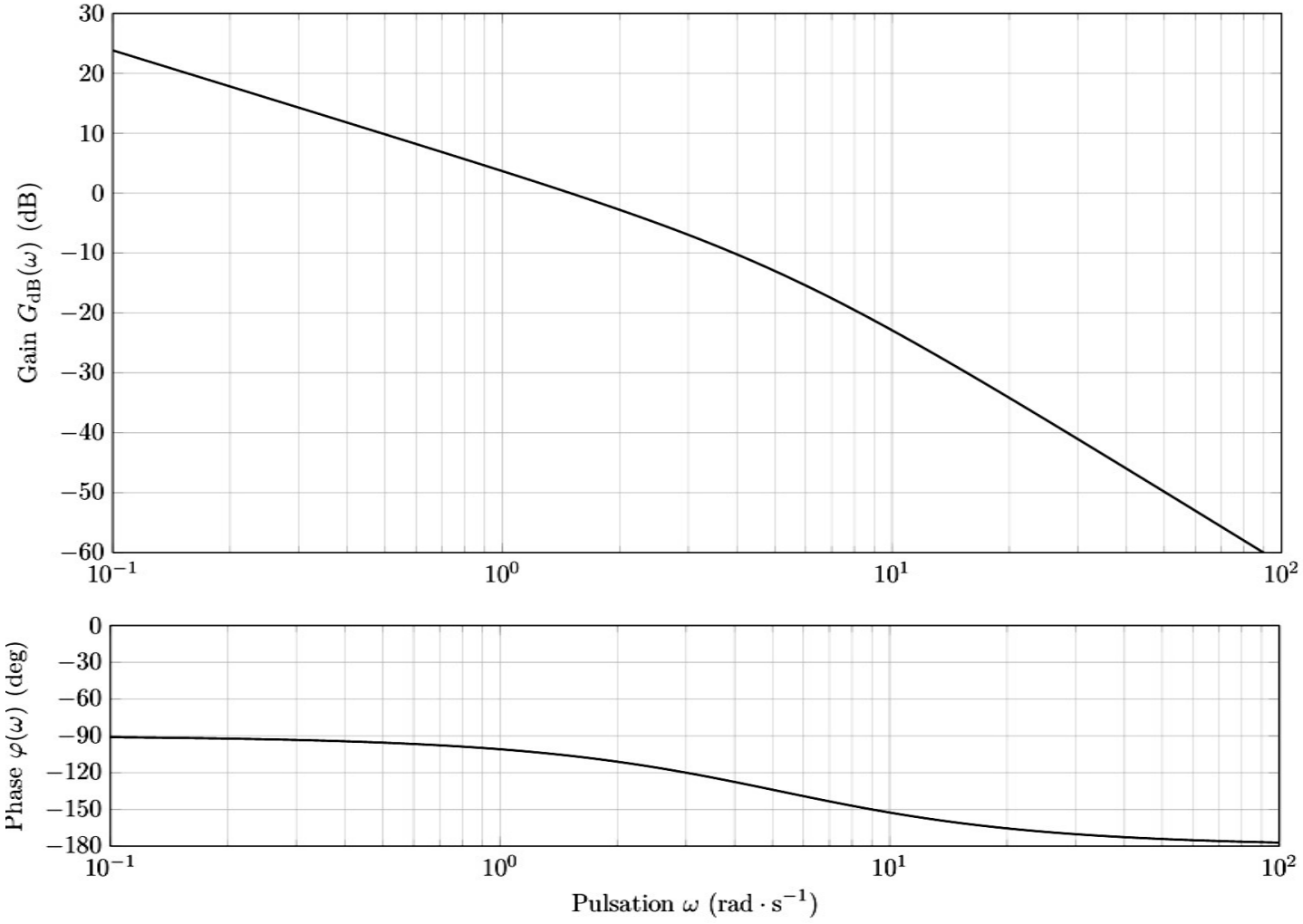
DR1 - Description en chaînes fonctionnelles de l'asservissement de vitesse du câble tracteur par le système de motorisation implanté dans la gare haute.



DR2 - Schéma-bloc à compléter (fonctions de transfert + opérations dans les sommateurs).



DR3 - Réglage du correcteur de l'asservissement de vitesse des nacelles.



PARTIE 2 MECANIQUE (EXTRAIT D'UN SUJET CCINP MP)

Bering, le robot de marquage intelligent

Présentation

La société française Conscience Robotics est spécialisée dans le développement d'un moteur d'intelligence artificielle universelle pouvant être intégré à tout type de robot. Elle développe donc également des robots utilisant ce moteur dont le robot Bering fait partie.

Bering (figure 1) est un robot de traçage autonome pour les travaux publics, le sport et de nombreux autres domaines. Grâce à ses trois modules de peinture interchangeables (figure 3), Bering est capable de tracer sur de nombreux sols. Connecté à l'application Conscience Connect (figure 2), il est capable de tracer tout type de motifs.



Figure 1 - Robot Bering en situation



Figure 2 - Interface de programmation des tracés de peinture et de gestion du robot



(a) Système de pré-marquage



(b) Système aérosol



(c) Système haute pression

Figure 3 - Robot Bering équipé de chacun des systèmes de projection de peinture

Structure du robot

Le robot Bering est constitué d'un châssis permettant la mise en place d'un module de peinture. Il est équipé d'une ou deux roues folles à l'avant et de deux roues motrices à l'arrière, toutes deux étant actionnées par un servomoteur permettant leur asservissement en vitesse de rotation.

Il est également équipé d'une antenne GPS associée à un système de correction lui permettant d'avoir une précision centimétrique dans son positionnement. Enfin, une centrale d'inertie est installée sur le robot afin d'assurer un asservissement du mouvement.

Description de l'étude

L'étude porte sur la validation de certaines des exigences référencées dans l'extrait du diagramme des exigences du robot Bering donné figure 18. Les parties indépendantes de ce sujet portent ainsi sur l'étude des consignes de vitesse à imposer aux roues motrices, l'étude de la dynamique du robot en virage, la régulation en lacet du robot, l'étude du tracé d'un coin et, enfin, l'étude du choix du parcours.

- Étude du déplacement de Bering

Objectifs : déterminer les consignes de vitesse à imposer aux moteurs pour un déplacement du robot suivant des trajectoires particulières.

- Modélisation

Paramétrage

La figure 4 présente le paramétrage retenu pour l'étude.

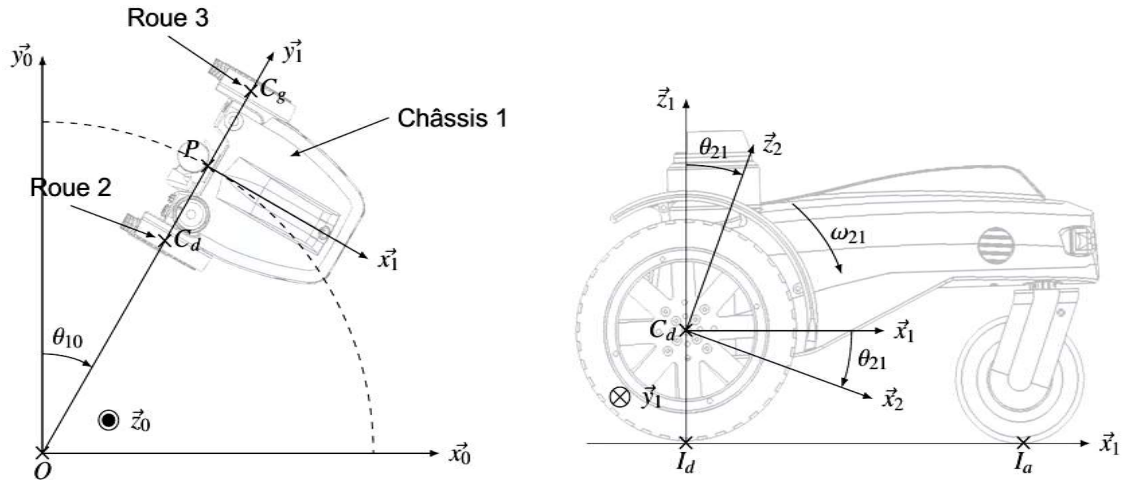


Figure 4 - Paramétrage du Bering en mouvement

Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$ de base $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est associé au sol et considéré comme étant le référentiel terrestre galiléen.
Le repère $\mathcal{R}_1 = (P, \mathcal{B}_1)$ de base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est associé au châssis 1 . Le point P correspond à la position du centre du jet de peinture tel que $\overrightarrow{OP} = R\vec{y}_1$ où R est le rayon du virage. Les points C_g et C_d sont respectivement les centres de roues gauche et droite tels que $\overrightarrow{PC_g} = a\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{PC_d} = -a\vec{y}_1$ avec a la demi-voie [1] du robot Bering. Le châssis 1 se déplace à une vitesse V par rapport au sol telle que $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = V\vec{x}_1$. On note $\vec{\Omega}_{10} = \omega_{10}\vec{z}_0 = \dot{\theta}_{10}\vec{z}_0$ le vecteur taux de rotation du châssis 1 par rapport au sol 0 avec $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

[1] La voie d'un véhicule est la distance entre roues gauche et droite d'un même essieu.

Les repères $\mathcal{R}_2 = (C_d, \mathcal{B}_2)$ et $\mathcal{R}_3 = (C_g, \mathcal{B}_3)$ sont associés respectivement aux roues 2 (droite) et 3 (gauche) de bases respectives $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ et $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_1, \vec{z}_3)$. Chacune des roues est en liaison pivot d'axe $(P, \vec{y}_1)$ avec le châssis 1 et de paramètres angulaires respectifs $\theta_{21} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\theta_{31} = (\vec{z}_1, \vec{z}_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$. On notera $\omega_{21} = \dot{\theta}_{21}$ et $\omega_{31} = \dot{\theta}_{31}$ les vitesses de rotation de chacune des roues. I_d et I_g sont les points de contact entre le sol et les roues respectives 2 et 3 tels que $\overrightarrow{I_dC_d} = \overrightarrow{I_gC_g} = r\overrightarrow{z_1}$ où r est le rayon des roues.

Notations

On note $\{\mathcal{V}_{i/j}\}_{\mathrm{M}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ \overrightarrow{V_{M\in i/j}} \end{Bmatrix}_M$ le torseur cinématique du mouvement du solide i par rapport au solide j au point M.

Ainsi, $\{\mathcal{V}_{1/0}\}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} \omega_{10}\vec{z}_0 \\ V\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_P$.

Hypothèses

On considère que les roues 2 et 3 roulent sans glisser sur le sol 0 aux points de contact respectifs I_d et I_g.

- Consigne de vitesse des moteurs

Q15. Préciser l'expression des torseurs cinématiques du mouvement des roues 2 et 3 par rapport au châssis 1 aux points respectifs C_d et C_g.

Q16. En déduire l'expression littérale du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{I_d \in 2/0}}$ en fonction de $\omega_{10}, \omega_{21}, V, a$ et de r.

Q17. D'après les conditions d'étude, justifier la valeur à retenir pour $\overrightarrow{V_{I_d \in 2/0}}$ et en déduire la relation $\omega_{21} = \frac{V + a\omega_{10}}{r}$.

Q18. De manière analogue, déterminer l'expression de ω_{31} en fonction de V, ω_{10}, a et de r.

- Trajectoires particulières

Dans l'application de tracés de terrains sportifs ou de tracés de signalisation au sol des routes, les trajectoires à suivre par le robot sont généralement des lignes droites ou des arcs de cercle.

Tracés en ligne droite

Q19. Quel est le mouvement suivi par le robot dans le cas d'un tracé de peinture en ligne droite? Que devient alors le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$?

Q20. En déduire l'expression des consignes de vitesse à imposer aux roues, ω_{21} et ω_{31}, en fonction, entre autres, de la vitesse V imposée au robot.

Tracés en arc de cercle

Soit la trajectoire définie sur la figure 4 par les traits en pointillés. Celle-ci a pour paramètres le centre du virage, le point O et le rayon du virage R tel que $\overrightarrow{OP} = R\vec{y}_1$.

Q21. Déterminer la relation entre V et ω_{10}.

Q22. À partir du résultat des questions Q17. et Q18., déterminer les consignes de vitesse à imposer aux roues, ω_{21} et ω_{31}, en fonction de la vitesse imposée au robot V, du rayon de virage R et du rayon des roues r et de la demi-voie a.

Cas particulier d'un changement de direction, rotation autour du point P

Durant son parcours, le robot sera amené à changer de direction sans changer de place, c'est-à-dire, sans modification de la position du point P, centre du jet de peinture.

Q23. Dans ces conditions, déterminer les consignes de vitesse ω_{21} et ω_{31} à imposer aux roues en fonction de ω_{10} et en déduire le rapport $\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}}$.

- Étude du basculement du robot dans un virage

Objectifs : écrire un modèle dynamique du robot dans un virage afin de vérifier l'exigence 1.1.1 pour un robot équipé d'une ou deux roues folles.

- Modélisation des caractéristiques inertielles du robot

Afin de modéliser le comportement dynamique du robot, un modèle des caractéristiques inertielles du robot est nécessaire. Un modèle simplifié est proposé sur la figure 5.

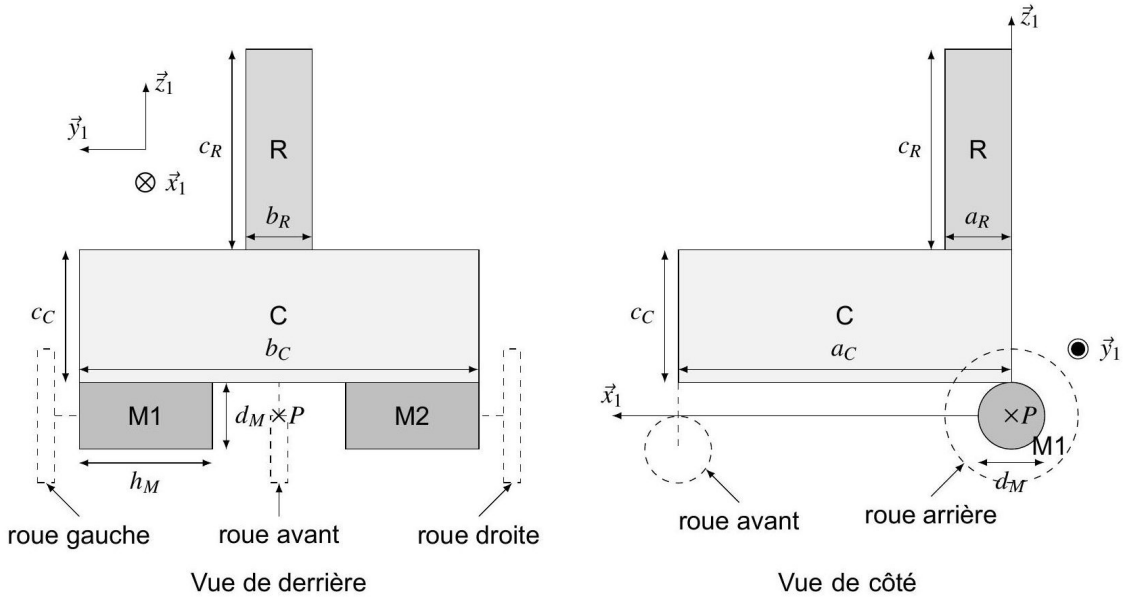


Figure 5 - Modélisation géométrique et inertielle du robot

Notations et hypothèses

Les seules inerties prises en compte dans ce modèle sont celles des stators des moteurs (notés M1 et M2), du châssis (noté C) et du réservoir (noté R). Les inerties des autres pièces du robot (notamment des roues) seront négligées. Les stators sont modélisés comme des cylindres homogènes d'axe ($P, \vec{y}_1$), symétriques par rapport au plan ($P, \vec{x}_1, \vec{z}_1$), de diamètre d_M, de hauteur h_M et de masse m_M. Le châssis est modélisé comme un parallélépipède homogène, symétrique par rapport au plan $(P, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$, de côtés $a_C \times b_C \times c_C$ et de masse m_C. Comme indiqué sur la figure 5, les plans du châssis de normale $\vec{y}_1$ sont les mêmes que les sections extrêmes des stators. De plus, le châssis est "posé" sur les stators. Le réservoir est modélisé comme un parallélépipède homogène, symétrique par rapport au plan $(P, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$, de côtés $a_R \times b_R \times c_R$ et de masse m_R. Comme indiqué sur la figure 5, on considère que le réservoir est simplement posé sur le châssis.

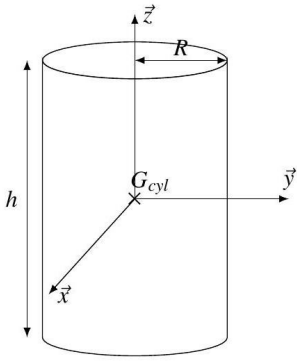
On note G le centre d'inertie du robot, tel que $\overrightarrow{PG} = x_G\vec{x}_1 + y_G\vec{y}_1 + z_G\vec{z}_1$.

Q24. Expliquer pourquoi $y_G = 0$.

Q25. Déterminer x_G et z_G en fonction des données.

Ci-après, on donne la matrice d'inertie en son centre d'inertie G_{cyl} d'un cylindre homogène d'axe $(G_{cyl}, \vec{z})$ de rayon R, de hauteur h et de masse m :

$$I(G_{cyl},\text{cylindre}) = \begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Q26. Donner la matrice d'inertie du stator M1 en son centre d'inertie noté G_{M1} en fonction de m_M, d_M et de h_M dans la base $\mathcal{B}_1$.

Q27. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GG_{M1}}$ en fonction de x_G, z_G, b_C et de h_M dans la base $\mathcal{B}_1$.

Q28. Déduire, des deux questions précédentes, le moment d'inertie I_{Gx_1} suivant l'axe $(G, \vec{x}_1)$ du stator M1.

- Modélisation du comportement dynamique du robot en virage

Torseur dynamique

On suppose que le torseur dynamique du robot ne dépend pas du nombre de roues folles.

Le modèle et les notations proposés sur la figure 4 seront utilisés pour cette partie.

Notations et hypothèses supplémentaires

Comme l'inertie des roues du robot est négligée, l'ensemble du robot est assimilé au châssis 1 pour son comportement dynamique. Sa matrice d'inertie est :

$$I(G, \text{robot}) = I(G,1) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} .$$

On note le torseur dynamique du robot 1 par rapport au sol 0 au point G :

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{d_{G\in 1/0}} \\ \vec{\delta}_{G\in 1/0} \end{Bmatrix}_G .$$

On note m_1 la masse du robot et on suppose que la vitesse de rotation de 1 par rapport à $0, \omega_{10}$, et le rayon du virage, R, sont constants.

Q29. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_1$, la résultante dynamique du robot par rapport au sol $0, \vec{R}_d(1/0)$, en fonction de R, x_G, ω_{10} et de m_1.

Q30. Justifier la forme de la matrice d'inertie du robot.

Q31. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_1$, le moment dynamique du robot en G par rapport au sol $0, \vec{\delta}(G, 1/0)$, en fonction de E et de ω_{10}.

Robot avec une roue folle

Le paramétrage du robot Bering avec une roue folle est donné sur la figure 6.

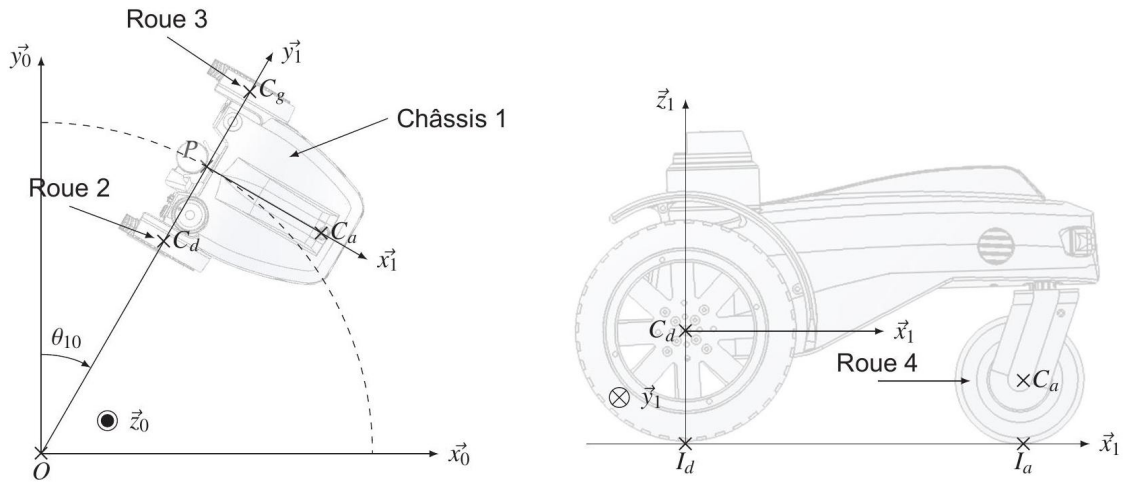


Figure 6 - Paramétrage du Bering avec une roue folle

Notations et hypothèses

On note $\overrightarrow{C_dC_g} = 2a\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{I_dI_a} = a\vec{y}_1 + b\vec{x}_1$.

On note l'accélération de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{z_1}$.

Les torseurs des actions mécaniques du sol sur les différentes roues sont :

$$\{\mathcal{T}_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_2\vec{x}_1 + Y_2\vec{y}_1 + Z_2\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_d} \quad \{\mathcal{T}_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_3\vec{x}_1 + Y_3\vec{y}_1 + Z_3\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_g} \quad \{\mathcal{T}_{0\to4}\} = \begin{Bmatrix} X_4\vec{x}_1 + Y_4\vec{y}_1 + Z_4\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_a}$$

Q32. Écrire, dans la base $\mathcal{B}_1$, les trois équations scalaires du théorème de la résultante dynamique appliqué au robot.

En résolvant le système des 6 équations du principe fondamental de la dynamique appliqué au robot, il est possible de déterminer les expressions de Z_2, Z_3 et de Z_4 :

$$\begin{cases} Z_2 = \dfrac{-m_1\omega_{10}^2(z_G + r)(x_G a + Rb) + am_1 g(b - x_G) - aE\omega_{10}^2}{2ab} \\ Z_3 = \dfrac{-m_1\omega_{10}^2(z_G + r)(x_G a - Rb) + am_1 g(b - x_G) - aE\omega_{10}^2}{2ab} \\ Z_4 = \dfrac{E\omega_{10}^2 + x_G m_1 g + m_1\omega_{10}^2 x_G(z_G + r)}{b} \end{cases}$$

On donne : $|V| = R|\omega_{10}|$.

Q33. Lorsque le robot atteindra la vitesse limite de basculement (exigence 1.1.1), quelle roue (roue 2, roue 3 ou roue 4) ne touchera plus le sol ? En déduire V_{lim} cette vitesse limite (on supposera un virage à droite).

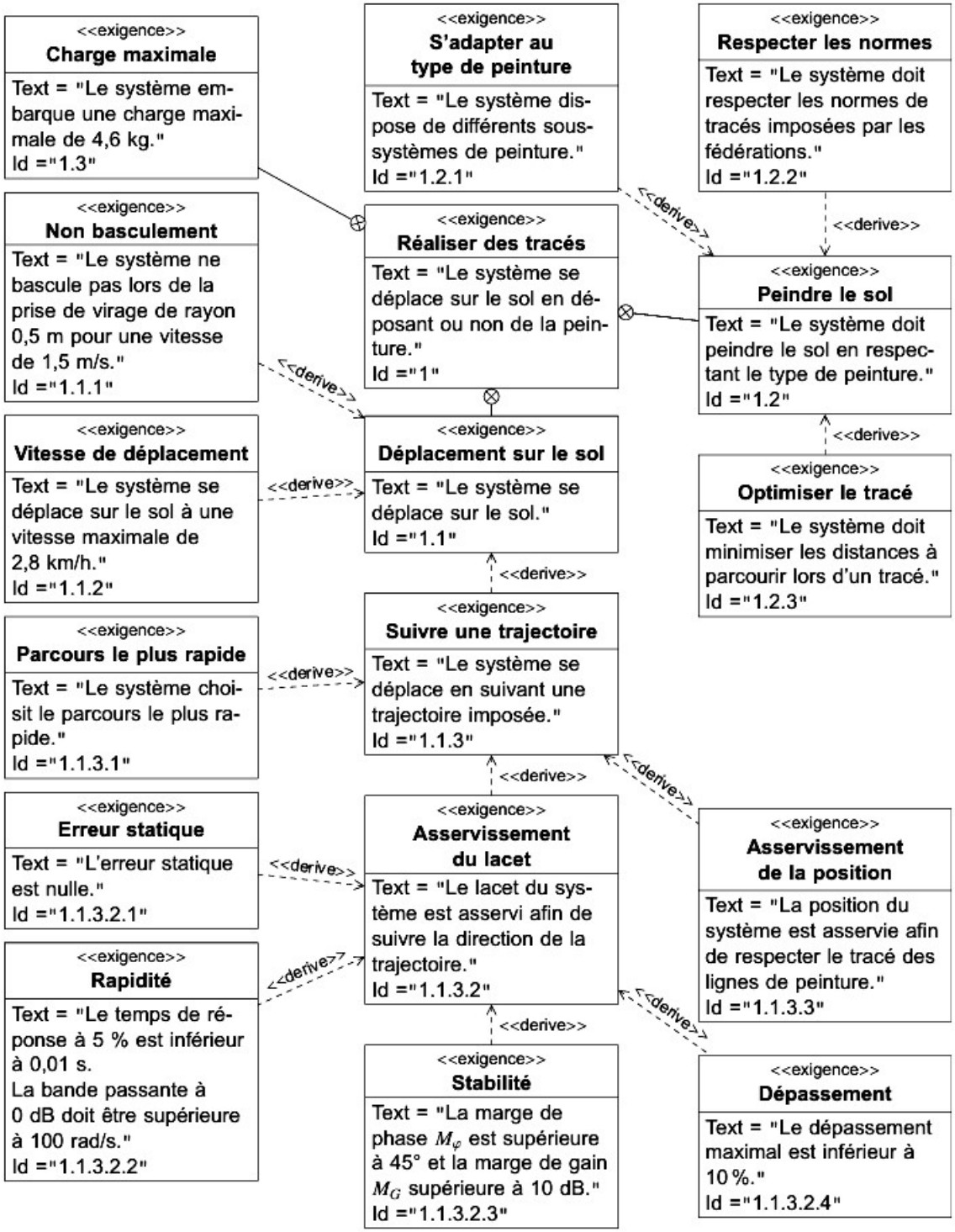


Figure 18 - Extrait du diagramme des exigences du robot Bering

FIN