Activité expérimentale - Étude d'un phénomène de diffusion dans une ligne RC - Effet de peau

Capacités développées ou évaluées lors de ce TP

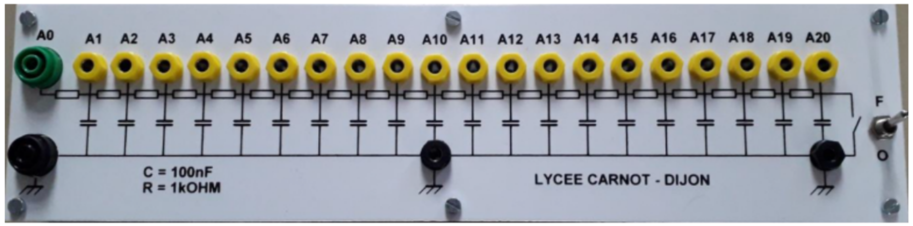
- Étudier un phénomène de diffusion dans le domaine électrique.
- Utiliser une analogie pour différents phénomènes de diffusion.

Le but de ce TP est d'étudier un phénomène de diffusion sur un montage électrique, et d'en déduire par analogie le comportement de systèmes particuliers en conduction thermique.

I) Détermination des paramètres du montage

1) Présentation du montage

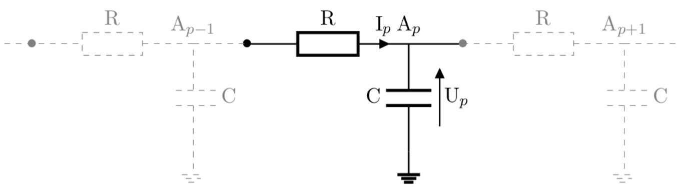
Ce TP utilise une platine composée d'une succession de résistances et condensateurs munies de bornes permettant de mesurant la tension en différents points du montage.



L'alimentation sera effectuée par un GBF et la mesure des différentes tensions par, soit l'oscilloscope soit par un multimètre numérique suivant les cas.

2) Analyse en régime stationnaire

Le schéma électrique de ce montage correspond à la mise en parallèle de 20 cellules RC identiques, selon le schéma de la figure suivante.



Une cellule est repérée par son indice p ($p \in [1, 20]$). On note A_0 le point correspondant à l'entrée de la ligne.

Manipulons...

- Connecter la ligne à une source de tension **continue**. On choisira de façon raisonnée une tension sur l'intervalle [1 V, 10 V].
- Fermer l'interrupteur à droite de la platine.
- Relever rapidement les valeurs de U_1 à U_{19}. Représenter U_p en fonction de p.
- Mesurer l'intensité du courant fournit par la source de tension à l'aide d'un ampèremètre entre la source de tension U_0 et l'entrée de la ligne.

Les premières questions suivantes visent à déduire des mesures précédentes les premier paramètres du modèle.

1. Que peut on dire du comportement d'un condensateur en régime permanent ? Justifier.
2. En utilisant les lois de l'électricité, en déduire que :

$$U_p = \left(\frac{20 - p}{20}\right) U_0$$

   Confronter l'expression obtenue au graphe tracé précédemment.
3. A l'aide de la mesure de l'intensité, déterminer la valeur d'une résistance R de la ligne avec son incertitude.

3) Analogie avec la conduction thermique

Les questions suivantes ont pour but de dresser une liste des analogies entre le circuit précédent et l'équation de diffusion thermique vue en cours.
On suppose que les signaux électriques qui circulent dans la ligne varient peu en passant d'une cellule à une autre (approximation de la chaîne continue). Cela signifie qu'un signal X_p (tension ou courant) observé au voisinage du point A_p sera tel que :

$$\forall p \in [1, 19] \qquad |X_{p+1} - X_p| \ll |X_p|$$

On se propose d'utiliser cette approximation en définissant les fonctions $u : (x,t) \rightarrow u(x,t)$ et $i : (x,t) \rightarrow i(x,t)$ telles que :

$$u(x = p\Delta x, t) = U_p(t) \text{ et } i(x = p\Delta x, t) = I_p(t)$$

4. Préciser quel est l'équivalent en thermodynamique d'une tension, d'une intensité, de la charge portée par l'armature d'un condensateur, et d'une résistance.

On admet pour la suite [1] que U_p et I_p vérifient dans ce circuit une équation approchée de type diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ avec } D = \frac{(\Delta x)^2}{RC}$$

II) Diffusion en régime sinusoïdal forcé

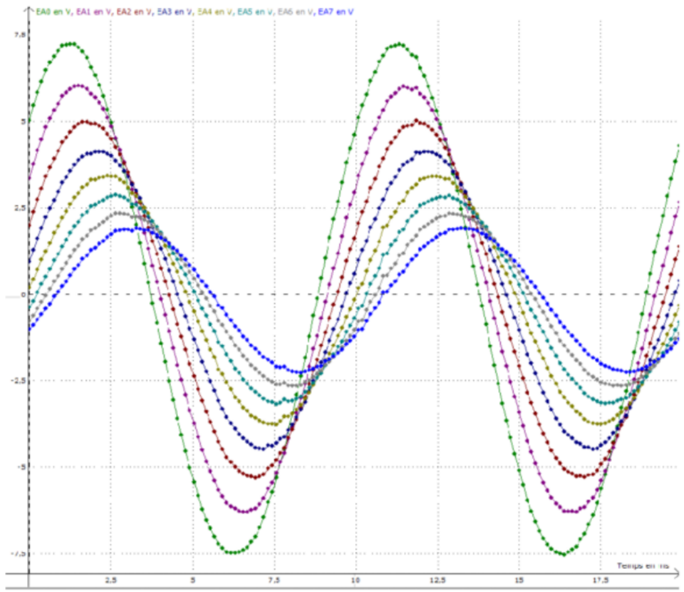
1) Affichage des tensions

Dans cette partie, l'extrémité de la ligne n'est pas court-circuitée (elle n'est plus reliée à la masse mais laissée libre). On suppose que la tension en entrée de la ligne est du type $e_0(t) = U_0 \cos \omega t$. On se place en régime forcé en restant dans l'approximation de la chaîne continue.

Manipulons...

- Connecter la ligne à une source de tension sinusoïdale de fréquence $f = 100\,\text{Hz}$ et d'amplitude comprise en 1 V et 10 V.
- Afficher sur LatisPro, les tensions U_1 à U_8.
- Mesurer les valeurs des amplitudes $U_{p,0}$ des tensions $U_p(t)$.
- Représenter $\ln U_{p,0}$ en fonction de p.

On doit obtenir une courbe d'allure similaire à :



1. Montrer que d'après vos données expérimentales, $U_{p,0}$ obéit à une loi de type :

$$U_{p,0} = U_0 \exp(-p/p_0)$$

Déterminer numériquement la valeur de p_0 pour $f = 100\,\text{Hz}$.

2. Quelle est la signification physique de p_0 ? Étudier qualitativement l'influence de f sur ce paramètre.

2) Effet de cave thermique

L'habitat troglodytique est, depuis la Préhistoire, une architecture, rudimentaire ou somptueuse, présente dans différentes traditions consistant à aménager des habitats souterrains ou creusés dans le rocher à flanc de montagne.

Les différentes pièces des maisons sont creusées dans la roche, parfois à plusieurs dizaines de mètres en profondeur.

1. Mais cela constitue un très bon exercice que de le démontrer...

La ligne RC utilisée ici permet de comprendre pourquoi ces habitations bénéficient d'une température constante quelque soit le moment de la journée.

3. À l'aide de l'étude précédente, et de l'analogie entre cette ligne et un milieu conducteur thermique, proposer une explication pour justifier que la température fluctue beaucoup moins dans les maisons troglodytiques que les habitations usuelles.

3) Étude théorique

D'après ce que l'on a précédemment admis, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension est donc de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Une condition aux limites est données par le GBF fournissant une tension sinusoïdale :

$$U(x=0,t) = U_0 \cos \omega t$$

En utilisant la notation complexe, on cherche alors une solution sous forme d'une pseudo-onde plane progressive, du type :

$$\underline{u}(x,t) = U_0 \exp j[\omega t - \underline{k}x]$$

où $\underline{k}$ est nommé *vecteur d'onde complexe* : $\underline{k} = k' + jk''$.

4. En reportant la solution dans l'équation de diffusion, montrer que $\underline{k}$, ω et D vérifient la *relation de dispersion* :

$$\underline{k}^2 = \frac{-j\omega}{D}$$

5. En déduire que $\underline{k}$ est une grandeur complexe pouvant se mettre sous la forme :

$$\underline{k} = \frac{1-j}{\delta}$$

où δ est une grandeur que l'on exprimera en fonction de ω et D. On pourra avantageusement utiliser le fait que $-j = e^{-j\pi/2} = (e^{-j\pi/4})^2$.

6. En déduire que l'amplitude de U_p décroît exponentiellement avec p. Justifier l'allure de la courbe de $\ln U_{p,0}$ en fonction de p et l'influence de la fréquence sur δ. Confronter ces explications à l'étude expérimentale.

Compétences évaluées

Noms et prénoms du binôme :

—

—

Cette grille d'évaluation sert à vérifier que savez faire les étapes expérimentales importantes. Les compétences en **gras** sont évaluées pendant le TP : faites appel à votre professeur lorsque vous êtes prêts/prêtes à les valider.

Compétence travaillée	Points
Mener l'étude en régime permanent	/2
Confronter théorie et expérience de manière convaincante pour le régime stationnaire	/2
Obtenir les courbes en régime sinusoïdal	/2
Mettre en évidence la décroissance expoentielle de l'amplitude et la profondeur de peau	/3
Interpréter correctement l'effet de peau thermique	/1
Note finale	/10

Remarques :

Matériel

MP/MPI Vendredi 8h/12h Pascal Bertin

- GBF
- Interface d'acquisition SYSAM + Ordinateur et Latis Pro
- Lignes RC prémontées
- Multimètre, alimentation stabilisée.