ELECTROMAG5 - Ondes électromagnétique en interaction avec la matière

Travaux dirigés

Exercice 1: Cavité électromagnétique ⋆

Une cavité vide sans pertes d'axe (Ox), de section S et de longueur L, est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité, le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon $\vec{e}_z$ a pour représentation complexe :

$$\vec{\underline{E}}(x,t) = \underline{E}_1 \exp\left[i(\omega t - kx)\right] \vec{e}_z + \underline{E}_2 \exp\left[i(\omega t + kx)\right] \vec{e}_z$$

On rappelle que la composante tangentielle du champ électrique doit obligatoirement être nul sur une surface parfaitement conductrice.

1. Déterminer $\underline{E}_2$ en fonction de $\underline{E}_1$, ainsi que l'expression k_n des vecteurs d'onde possibles. En déduire l'expression f_n des fréquences autorisées pour l'onde totale dans la cavité en fonction de L, c et de $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Établir l'expression du champ électrique total complexe $\vec{\underline{E}}_n$ relatif à la fréquence f_n en fonction de $\underline{E}_1$, n, x, t, L et c. De quel type d'onde s'agit-il ?
3. Montrer que le champ précédent présente des annulations permanentes en des abscisses x_p fixées. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de x_p en fonction de L et n.
4. Obtenir le champ magnétique $\vec{\underline{B}}_n$ relatif à la fréquence f_n. Que peut-on en dire pour les positions x_p précédentes ?
5. Calculer l'énergie électrique $\mathcal{E}_e$ et l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ emmagasinées pour un seul mode dans la cavité, en fonction du temps. Montrer qu'il y a échange périodique entre énergie électrique et énergie magnétique d'un mode de cavité. Déterminer la période T de ces échanges.

Exercice 2: Dispersion dans un monocristal de chlorure de sodium ⋆

La dispersion des ondes électromagnétiques dans un monocristal de NaCl est caractérisée par la relation de dispersion : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{el}\dfrac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$ où ε_{el} est une constante positive sans dimension, et $\omega_L = 4{,}4 \times 10^{13}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_T = 2{,}8 \times 10^{13}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Discuter, en fonction de la fréquence, la possibilité qu'a une onde électromagnétique de se propager. Préciser pour chaque domaine de fréquences la forme de l'onde.
2. On envoie sur le monocristal de NaCl une onde sous incidence normale. Que lui arrive-t-il selon la valeur de sa fréquence ?
3. Tracer l'allure de la courbe $k(\omega)$ dans les domaines où k est réel.
4. Dans le domaine optique, $\omega^2 \gg \omega_L^2$. Y a-t-il dispersion dans ce domaine ? Que vaut la vitesse de phase de l'onde ? Une mesure expérimentale donne un indice de réfraction $n = 1,55$ pour $\lambda = 600\,\text{nm}$. Que vaut la constante ε_{el} ?

Exercice 3: Onde électromagnétique dans un câble coaxial ⋆⋆

On étudie un guide d'onde constitué de deux armatures métalliques cylindriques coaxiales, d'axe O_z et de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. Les régions $r < R_1$ et $r > R_2$ sont remplies de métal parfait (conductivité infinie). La région $R_1 < r < R_2$ est occupée par du vide. Dans cette zone vide, on peut propager une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(r,\theta,z,t) = f(r)\cos(\omega t - kz)\vec{e}_r \text{ avec } f(R_1) = E_0 > 0$$

On utilisera au besoin un formulaire d'analyse vectorielle

1. A l'aide des équations de Maxwell, déterminer le champ électrique $\vec{E}$ dans la région $R_1 < r < R_2$.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde.
3. Établir la relation de dispersion pour l'onde envisagée. Commenter.
4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting. En déduire le flux d'énergie moyenné dans le temps à travers une section transversale du câble.
5. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde, puis la moyenner dans le temps.
6. En déduire la vitesse moyenne v_e de propagation de l'énergie dans le câble.

Exercice 4: Effet de peau dans un conducteur réel ⋆⋆

Exercice donné à l'oral de CCINP, proche du cours, avec un bilan énergétique plus original à la fin

On étudie la propagation d'une onde plane monochromatique dont le champ électrique s'écrit, en complexes :

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z))\vec{e}_x$$

où E_0 est une constante réelle positive. Le domaine spectrale envisagé correspond à des ondes centimétriques. Pour les applications numériques, on se placera dans le cas du cuivre de conductivité $\gamma = 6{,}0 \times 10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ en régime indépendant du temps.

1. Caractériser cette onde avec des termes adaptés.
2. Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes étudiées ? Comparer les amplitudes des vecteurs densité de courant électrique de conduction et de déplacement. Écrire la forme approchée des équations de Maxwell dans le milieu métallique pour le cadre de notre étude.
3. Le métal occupe la zone $z > 0$. Établir la relation de dispersion en faisant intervenir une distance caractéristique notée δ (épaisseur de peau). Donner l'expression du champ électrique. Quelle est la signification de δ ?
4. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont-ils en phase ?
5. Déterminer l'expression de la puissance, moyennée en temps, cédée au métal par l'onde dans un volume cylindrique élémentaire, de section S perpendiculaire à (Oz), dont les faces planes sont situées en z et $z + dz$.
6. La comparer au flux du vecteur moyen de Poynting à travers la surface délimitant ce volume et vérifier le bilan énergétique local attendu.

Exercice 5: Réflexion sur un plan conducteur en mouvement ⋆⋆

Une plaque métallique parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox), se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ dans un référentiel R galiléen ($v > 0$). Elle coïncide à l'instant t avec le plan d'équation $x = vt$. Une onde électromagnétique de champ électrique $\vec{E_i}$ se réfléchit sur cette surface, le champ électrique de l'onde réfléchie étant $\vec{E_r}$. On suppose que :

$$\vec{E_i} = E_0 \cos\left[\omega_i\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_z \text{ et } \vec{E_r} = E_r \cos\left[\omega_r\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]\vec{e}_z$$

Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel R' dans lequel la plaque est immobile. On indique que, dans la limite de la physique non relativiste ($v \ll c$) admise pour la suite, la transformation du champ électromagnétique par changement de référentiel galiléen est :

$$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} \text{ et } \vec{B'} = \vec{B}$$

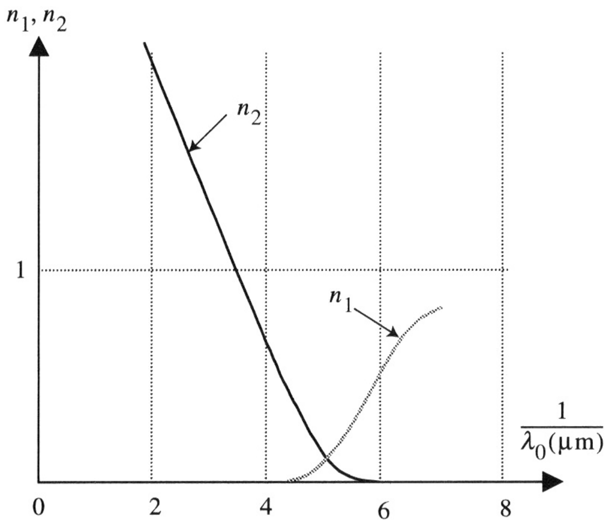
en notant $(\vec{E}, \vec{B})$ un champ électromagnétique dans le référentiel R et $(\vec{E'}, \vec{B'})$ celui correspondant dans le référentiel R' de vitesse $\vec{v_e}$ de translation par rapport à R.

1. Exprimer $\vec{B_i}$ en fonction de E_0, c, ω_i, t et x, puis exprimer $\vec{E_i}'$ en fonction de E_0, c, ω_i, t, x et v
2. Exprimer $\vec{E_r}'$ en fonction E_r, c, ω_r, t, x et v.
3. À la surface de la plaque, le champ électrique total doit être orthogonal à la plaque. En déduire l'expression de E_r en fonction de E_0, v, c, et celle de ω_r en fonction de ω_i, v et c.
4. Soit $R = \dfrac{\langle\vec{\Pi_r}\rangle \cdot (-\vec{e}_x)}{\langle\vec{\Pi_i}\rangle \cdot \vec{e}_x}$ où $\langle\vec{\Pi_i}\rangle$ et $\langle\vec{\Pi_r}\rangle$ sont les valeurs moyennes respectives des vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchie. Donner la signification physique de R. Exprimer R en fonction de v et c. Comment expliquez-vous le fait que $R \neq 1$?

Exercice 6: Transparence d'un conducteur dans l'ultra-violet ⋆⋆⋆

Pour étudier la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur, on adopte un modèle de fluide d'électrons libres, de masse m, charge $-e$ et densité particulaire N_0, pouvant se mouvoir sous l'effet du champ électromagnétique de l'onde électromagnétique. Le comportement du fluide de charges de conduction est modélisé par l'équation du mouvement : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{m}{\tau}\vec{v} = -e\vec{E}$

1. Montrer qu'en régime permanent on peut écrire $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ en exprimant γ en fonction de m, e, N_0 et τ.
2. Estimer l'ordre de grandeur de τ pour un conducteur métallique. Évaluer la pulsation $\omega_p = \sqrt{\dfrac{N_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$ pour un métal et la situer dans le spectre électromagnétique (on prendra $N_0 \approx 10^{29}\mathrm{m}^{-3}$).
3. Montrer qu'en régime sinusoïdal l'on peut définir, pour le milieu conducteur, une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ qui dépend de la pulsation ω du régime sinusoïdal envisagé.
4. Préciser la relation de dispersion des ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans le milieu conducteur localement neutre avec un vecteur d'onde complexe $\underline{k}\,\vec{e}_z$. Définir un indice complexe $\underline{n}$ associé. On pose pour la suite $\underline{n} = n_1 - in_2$ avec n_1 et n_2 des réels positifs.
5. On s'intéresse maintenant à la propagation des ondes de fréquences pour lesquelles le terme dissipatif de l'équation du mouvement est négligeable.
   (a) Préciser l'expression simplifiée de l'indice $\underline{n}$ du milieu. Tracer les allures de n_1 et n_2 en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_p}$.
   (b) On indique, pour le sodium, les courbes expérimentales fournies sur la figure ci-dessous. Les commenter par comparaison à la théorie précédente. Quel est le comportement du sodium dans l'U.V. lointain ?



(c) Évaluer la pulsation plasma ω_p, puis la densité numérique d'électrons libres N_0 du sodium. Commenter cette valeur sachant que la masse volumique μ du sodium métallique, de masse molaire $M = 23\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, est $\mu = 0{,}97 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.