



FIG. 1 : Transformateur idéal de tension.

On étudie un modèle simplifié de transformateur schématisé en **Figure 1**. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique illustrée pour un point M quelconque sur le schéma. Le bobinage dit « primaire » noté C_1 est enroulé en N_1 spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage dit « secondaire » noté C_2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 . On supposera que le tore constitué d'un matériau ferromagnétique se comporte de manière analogue au vide. De plus, on admet que les propriétés magnétiques du matériau garantissent que, du point de vue des symétries et invariances, tout se passe comme si chacun des deux enroulements faisaient tout le tour du tore. Les expressions utilisant μ_0 la perméabilité magnétique du vide seront identiques dans le matériau en utilisant μ sa perméabilité. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

1. Justifier soigneusement que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans C_1 s'écrit

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z) \vec{e}_\theta.$$

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie des courants. Il est donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}_1$. Le point M est contenu dans ce plan donc le champ $\vec{B}_1(M)$ est perpendiculaire à ce plan, porté par la direction $\vec{e}_\theta$. La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) donc B_1 ne dépend pas de θ . Finalement,

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z) \vec{e}_\theta$$

2. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour soigneusement précisé, déterminer le champ magnétique créé par le circuit C_1 en tout point à l'intérieur du tore.

Au vu de $\vec{B}_1$ on choisit comme contour d'Ampère le cercle C de rayon r intérieur au tore, orienté dans le même sens que $\vec{e}_\theta$. Le théorème d'Ampère s'écrit avec $I_{\text{enlacé}} = +N_1 i_1$

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_1(r, z) = \mu N_1 i_1.$$

On en déduit alors

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

3. Établir l'expression du flux magnétique ϕ_1 du champ magnétique à travers une spire du circuit C_1 .

Le flux s'écrit

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{r=R}^{r=R+a} \int_{z=0}^{z=a} \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot dr dz \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Finalement

$$\phi_1 = \frac{\mu N_1 i_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

4. En déduire le flux total Φ_1 au travers des N_1 spires du circuit C_1 .

Le flux total est la somme des flux sur chacune des N_1 spires

$$\Phi_1 = \frac{\mu N_1^2 i_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

5. Rappeler la définition de l'inductance propre (ou coefficient d'auto inductance).

L'inductance L_1 est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre Φ_1 et l'intensité du courant i_1

$$\Phi_1 = L_1 i_1.$$

6. En déduire que l'inductance propre du circuit C_1 est

$$L_1 = \frac{N_1^2 a \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

Par identification, l'inductance est bien l'expression proposée.

7. Quelle est alors l'expression de l'inductance propre du circuit L_2 ?

La géométrie est identique, le même raisonnement donne donc

$$L_2 = \frac{\mu N_2^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

8. Rappeler la définition du coefficient d'inductance mutuelle M . Démontrer que ce coefficient vaut

$$M = \frac{N_1 N_2 a \mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique créé par un circuit à travers un autre circuit et le courant responsable du champ magnétique $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$. Ici le flux du champ magnétique créé par l'enroulement 1 à travers l'enroulement 2 est la somme sur les N_2 spires du flux à travers une spire

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \phi_1 = \frac{\mu N_1 N_2 i_1 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

On identifie alors

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

9. La résistance des bobinages étant négligée, exprimer les tensions u_1 et u_2 aux bornes du primaire et du secondaire en fonction de di_1/dt , di_2/dt , L_1 , L_2 et M

La loi de Faraday pour chacune des bobines $-u = e = -\frac{d\Phi}{dt}$ s'écrit alors

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \text{ et } u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (1)$$

10. En déduire l'équation suivante pour u_1

$$u_1 = \frac{L}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}.$$

On cherche à éliminer di_1/dt . On soustrait donc M fois la première équation à L_1 fois la seconde équation

$$L_1 u_2 - M u_1 = M^2 \frac{di_2}{dt} - L_2 L_1 \frac{di_2}{dt}.$$

Cette équation se réécrit

$$u_1 = \frac{L}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt}.$$

11. Prouver que cette relation se simplifie en

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Le tore parfait permet un couplage parfait entre les enroulements, on remarque avec les expressions calculées précédemment que $M^2 = L_1 L_2$. On obtient alors $u_2 = L_1 u_2 / M$. Remarquons que $L_1 / M = N_1 / N_2$, il vient alors

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

12. Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier la réponse.

Pour des signaux continus, il n'y a pas de variation de flux de champ magnétique donc pas de force électromotrice induite par un bobinage sur l'autre par induction donc pas de couplage entre les enroulements. Le fonctionnement est impossible.

13. Pour des signaux périodiques, montrer que les puissances moyennes au primaire et au secondaire vérifient

$$\langle u_1 i_1 \rangle + \langle u_2 i_2 \rangle = 0.$$

On multiplie chaque équation par le courant correspondant et on les somme

$$\begin{aligned} i_1 u_1 + i_2 u_2 &= L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \\ &= \frac{L_1}{2} \frac{di_1^2}{dt} + \frac{L_2}{2} \frac{di_2^2}{dt} + M \frac{di_1 i_2}{dt}. \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'une dérivée d'une fonction périodique est nulle en tant que différence d'une fonction entre deux points séparés d'une période. Les grandeurs i_1^2 , i_2^2 et $i_1 i_2$ sont périodiques donc en prenant la valeur moyenne de l'équation précédente on obtient

$$\langle u_1 i_1 \rangle + \langle u_2 i_2 \rangle = 0.$$

14. Que peut-on dire du rendement en puissance entre primaire et secondaire ?

Toute la puissance reçue par l'enroulement 1 est fournie à l'enroulement 2. Dans ce modèle parfait le rendement en puissance vaut 1.

15. Quel peut être l'intérêt d'utiliser un transformateur si les circuits primaire et secondaire comportent le même nombre de spires ?

Avec le même nombre de spires ces dispositifs ne change pas la tension au secondaire mais permettent de s'affranchir de la masse dans le circuit secondaire.

16. Les matériaux magnétiques des transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quel type de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?

Sans feuillets le champ magnétique induit dans le matériau en acier, conducteur, un champ électrique qui induit une densité de courant tournant autour des lignes de champ magnétique. Les feuillets, perpendiculaires à ces boucles, limitent ces courants dits courants de Foucault.