

QUANTIQUE1 - Principes de la mécanique quantique

Travaux dirigés

Exercice 1: Classique ou quantique ★

Dites si l'étude des systèmes suivants vous semble relever du domaine de la physique quantique ou de la physique classique. Pour cela on calculera une grandeur typique du problème homogène à h qui est, rappelons-le, le produit d'une énergie par un temps ou le produit d'une quantité de mouvement par une longueur ; puis on la comparera à h pour conclure.

1. Un pendule évoluant dans le champ de pesanteur de longueur $\ell = 20$ cm, de masse $m = 10$ g.
2. Un oscillateur électrique LC portant une charge $q = 5,0 \cdot 10^{-7}$ C avec $L = 40$ mH et $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$ F.
3. Une personne de masse $m = 70$ kg faisant une chute d'un mètre dans le champ de pesanteur terrestre.
4. Même question pour un neutron de masse $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg.
5. Un vase rempli d'hélium superfluide est mis en rotation. On observe que l'hélium reste au repos hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase. Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre et une fréquence de rotation de l'ordre de 10 Hz. On s'intéresse aux mouvements des atomes d'hélium des tourbillons.

Exercice 2: Flux de photon ★

1. Une antenne de radio émet sur la fréquence 1 Mhz avec une puissance de 1 kW. Quel est le nombre de photons émis par seconde ?
2. Une étoile émet un flux lumineux, dont l'intensité reçue sur la Terre est égale à $1,6 \cdot 10^{-10}$ W m⁻² à une longueur d'onde moyenne de 556 nm. Estimer le nombre de photons qui traverse la pupille de l'œil chaque seconde.

Exercice 3: Fonction d'onde de l'électron d'un atome d'hydrogène ★★

Donnée utile : $\int_0^\infty x^n \exp(-\alpha x) dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

Dans l'état fondamental, un électron en orbite autour d'un proton fixe en O est décrit par la fonction d'onde à symétrie sphérique $\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, où a et A sont des constantes positives.

1. Quel est au premier ordre en dr , le volume $d\tau$ compris entre les rayons r et $r + dr$?
2. En déduire la probabilité $dP = f(r)dr$ que la position de l'électron soit mesurée entre r et $r + dr$.
3. Déterminer la valeur de A .
4. Pour quelle valeur r_0 de r la probabilité de trouver l'électron est-elle maximale (à dr près fixé) ?
5. Soit $\langle r \rangle$ la valeur moyenne du rayon dans cet état. Montrer que :

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2}a$$

6. Quelle quantité physique représente a ?

Exercice 4: Énergie minimale de confinement ★★

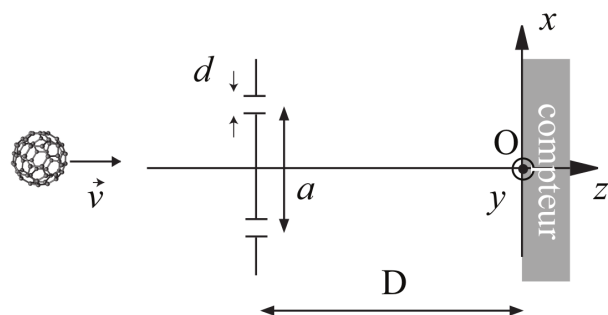
On considère une particule quantique (non relativiste), de masse m , pouvant se déplacer librement suivant Ox dans un domaine de largeur L_x .

1. Quelle est la limite supérieure de l'indétermination sur sa position Δx ? En déduire une limite inférieure pour l'indétermination sur son impulsion (ou quantité de mouvement) Δp_x .
2. Que vaut $\langle p_x \rangle$ pour cette particule ? En déduire une limite inférieure pour $\langle p_x^2 \rangle$ puis pour l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$. On rappelle que $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$.
3. En étendant ce raisonnement à une particule confinée dans une boîte parallélépipédique de longueurs L_x , L_y et L_z , montrer que l'énergie cinétique moyenne de la particule vérifie :

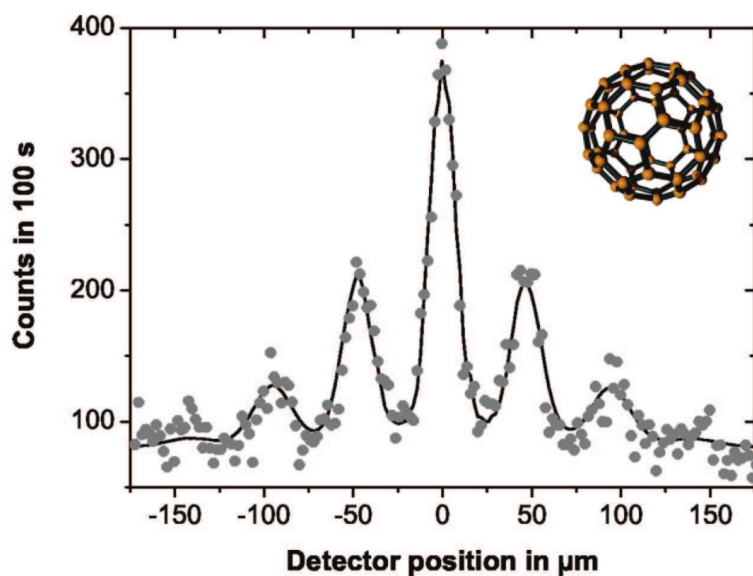
$$\langle E_c \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right)$$

Exercice 5: Expérience d'interférence d'onde de matière ★★

L'expérience des fentes d'Young permet de tester les modèles quantiques et notamment la dualité onde-particule de la matière. Des molécules de C₆₀ appelées fullerènes traversent une à une des fentes d'Young avec une vitesse moyenne de $v = 117$ m.s⁻¹ (incertitude relative de 17%). Les fentes d'Young, larges de 55 nm, sont séparées de $a = 100$ nm l'une de l'autre. On réalise le comptage des molécules sur un écran situé à $D = 1,04$ m des fentes.



Les résultats sont représentés sur la figure ci-dessous.



On admettra que les résultats obtenus dans le cours d'optique ondulatoire pour les interférences peuvent être appliqués ici sans précaution particulière ¹.

1. Rappeler l'expression de la longueur d'onde de De Broglie associé à une molécule de masse m et de vitesse v .
2. Montrer à partir des résultats expérimentaux qu'il est possible de mesurer la longueur d'onde De Broglie des molécules de fullerènes.
3. Montrer que les résultats concordent avec les mesures de vitesse.

¹. Ce qui est bien entendu inexact en toute rigueur, la différence fondamentale étant que les particules matérielles ont une masse, donc peuvent accélérer ou décélérer, ce que ne peuvent pas faire les photons...

4. D'après l'écart de vitesse, estimer les variations de longueur d'onde de De Broglie puis la longueur de cohérence de la source de molécules de fullerènes.

Données : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s, $m = 1,2 \cdot 10^{-24}$ kg