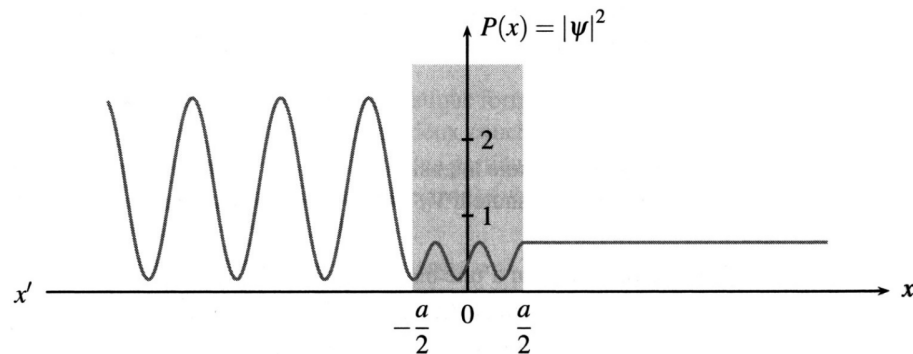


QUANTIQUE2 - Particule quantique dans un potentiel unidimensionnel

Travaux dirigés

Exercice 1: Potentiel inconnu ★

Un faisceau de quantons non relativistes, de masse m et d'énergie E , se déplace le long d'un axe (x_0Ox) et provient de $x = -\infty$. Chaque particule quantique est soumise à un champ de force conservatif, d'énergie potentielle $V(x)$. On admet que ce potentiel s'annule quand x tend vers $\pm\infty$. Sur le graphe fourni est représentée la densité de probabilité de présence $P(x)$ d'un quanton; les oscillations visibles sont sinusoïdales.



1. L'état de chaque quanton est-il un état lié ou un état de diffusion? Justifier.
2. Quelle interprétation peut-on donner aux oscillations de la densité de probabilité de présence pour $x \leq -\frac{a}{2}$? Le même comportement est-il observable en mécanique classique?
3. L'énergie potentielle $V(x)$ est constante par morceaux. Déterminer son allure possible en fonction de x (justifier).
4. La fonction d'onde associée à cet état stationnaire est notée $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Dans la mesure du possible, proposer une expression de $\phi(x)$ pour chacune des trois régions du graphe. Donner les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées en $\pm a/2$.

Exercice 2: Transparence d'un noyau lourd aux neutrons ★

Un faisceau de neutrons d'énergie $E > 0$ arrive, selon l'axe Ox et de la gauche, sur un noyau lourd de diamètre $D = 2$ fm. On assimile le potentiel nucléaire moyen ressenti

par les nucléons du faisceau incident à un puits carré de profondeur $V_0 = 45$ MeV défini par $V(x < 0) = 0$, $V(0 < x < D) = -V_0$ et $V(x > D) = 0$.

1. Retrouver les formes mathématiques des fonctions d'ondes stationnaires dans les trois zones de l'espace.
2. Expliquer soigneusement, mais sans rentrer dans le détail des étapes calculatoires, comment on accède au coefficient $T(E)$ de probabilité de transmission d'un neutron dans le domaine $x > D$.
3. On admet qu'après un calcul sans difficulté conceptuelle mais assez technique, on aboutit à :

$$T(E) = \frac{4E(V_0 + E)}{4E(V_0 + E) + V_0^2 \sin^2(k_2 D)} \text{ avec } k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$$

Quelle est la probabilité de réflexion d'un neutron dans le domaine $x < 0$? Montrer qu'aucune réflexion neutronique n'est envisageable pour certaines valeurs d'énergie incidente à préciser.

4. Calculer l'énergie minimale pour laquelle le noyau est transparent aux neutrons, ainsi que le rapport D/λ_2 correspondant (où λ_2 est la longueur d'onde dans le domaine $0 \leq x \leq D$). Conclure.

Exercice 3: Courant tunnel ★★

Un faisceau d'électrons correspondant à une intensité $I = 0,10$ mA est envoyé sur une barrière de potentiel de largeur $a = 1,0$ nm et de hauteur $V_0 = 2,0$ eV. Les électrons proviennent de $x = -\infty$. L'énergie cinétique d'un électron incident est $E = 1,0$ eV. On note $\varphi(x)$ la fonction d'onde spatiale associée à un électron, de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg considéré comme un quanton. On utilisera les résultats du cours sur l'effet tunnel.

1. Peut-on se placer dans l'approximation d'une barrière épaisse? Justifier numériquement.
2. Estimer l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.
3. Toutes choses égales par ailleurs, on remplace les électrons par des protons ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg). Déterminer la nouvelle valeur de l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière. Commenter.

Exercice 4: Superposition d'états dans un puits infini ★★

On étudie l'évolution d'une particule quantique non relativiste, de masse m , piégée dans un puits de potentiel rectangulaire infini de largeur a : $V(x) = 0$ pour le domaine accessible complet $0 < x < a$. La fonction d'onde propre d'énergie E_n est, avec

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

1. A partir de φ , retrouver la valeur de l'énergie E_n . On pose $\omega_0 = \frac{E_1}{\hbar}$: l'expliciter en fonction de a , m et $\hbar$, puis exprimer E_n en fonction de n , $\hbar$ et ω_0 .
2. On considère l'état quantique décrit par la fonction d'onde $\Psi_n(x, t)$ telle que, initialement, $\Psi_n(x, t = 0) = \varphi_n(x)$. Rappeler l'expression de $\Psi_n(x, t)$ pour $t > 0$. Comment se nomme un tel état pour la particule ?

On considère maintenant l'état quantique initial décrit par la fonction d'onde :

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

3. Exprimer $\Psi(x, t)$ pour tout instant $t > 0$.
4. On définit les deux fonctions d'onde spatiales suivantes :

$$\varphi_g = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{\sqrt{2}} \text{ et } \varphi_d = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

Montrer que

$$\Psi(x, t) = \left[\cos\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right) \varphi_g(x) + i \sin\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right) \varphi_d(x) \right] \exp\left(\frac{-5i\omega_0 t}{2}\right)$$

Indication : on pourra commencer par mettre $\exp\left(\frac{-i(E_2 + E_1)t}{2\hbar}\right)$ en facteur dans l'expression de $\Psi(x, t)$ obtenue à la question 3, puis remplacer $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ par leurs expressions en fonction de φ_g et φ_d .

5. Rappeler l'allure des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$. En déduire l'allure de $\varphi_g(x)$ et $\varphi_d(x)$ ainsi que l'allure de leur densité de probabilité de présence.
6. Calculer la densité de probabilité de présence correspondant à $\Psi(x, t)$. Commenter l'évolution temporelle de cette fréquence dans le puits. Quelle est la fréquence du phénomène ainsi mis en évidence ?

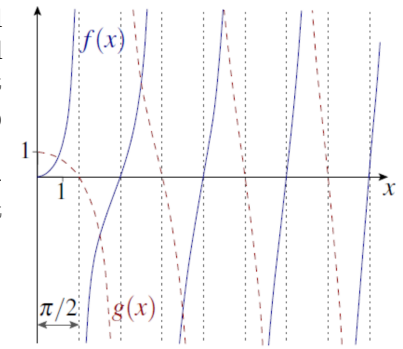
Exercice 5: Puits de potentiel de hauteur finie ★★

Grand classique qui permet de voir les différences avec le puits infini. Un peu calculatoire dans l'absolu, mais il peut être posée sous forme guidée comme ici.

Un quanton est placé dans un puits de potentiel compris entre $x = -a$ et $x = a$ de potentiel nul alors qu'en dehors de cet intervalle le potentiel est $V_0 > 0$. On s'intéresse aux états liés tels que $E < V_0$ où E est l'énergie du quanton.

On donne les représentations graphiques de fonctions utiles : $f(x) = x \tan(x)$ (traits pleins) et $g(x) = x \cotan(x)$ (pointillés). On pose :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } \mu = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$



1. Expliciter la forme générale de la fonction d'onde spatiale d'un état stationnaire quelconque en utilisant k et μ et sans chercher à déterminer les facteurs inconnus.
2. Expliciter les relations existantes entre les facteurs inconnus précédents.
3. Établir la relation $(ka)^2 + (\mu a)^2 = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$. A quelle courbe du plan de coordonnées $(\mu a, ka)$ cette équation correspond-elle ?
4. On s'intéresse dans cette question uniquement à des états stationnaires de fonctions d'onde spatiales paires (états symétriques). Montrer que ces états respectent la condition

$$ka \tan(ka) = \mu a$$

En déduire par un raisonnement graphique exploitant le graphe de la fonction f que les états correspondants sont quantifiés et en nombre fini.

5. On s'intéresse dans cette question uniquement à des états stationnaires de fonctions d'onde spatiales impaires (états antisymétriques). Montrer que ces états respectent la condition

$$ka \cotan(ka) = -\mu a$$

En déduire par un raisonnement graphique exploitant le graphe de la fonction g que les états correspondants sont quantifiés et en nombre fini.

6. À quelle condition n'y a-t-il qu'un seul état stationnaire lié possible ?
7. Dans le cas où le puits devient très profond, montrer que l'on retrouve les énergies du puits infini.