Vers les oraux !

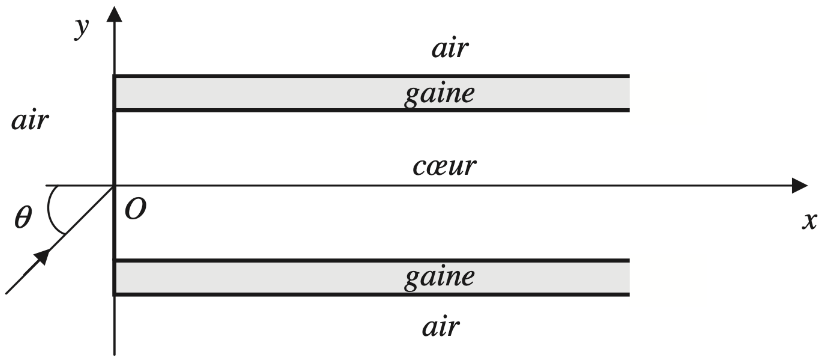
Questions de cours type Mines *(15 minutes)*

1. Mécanique : énergie potentielle effective dans le cas de la gravitation. Etude du mouvement radial.
2. Mécanique : étude du mouvement circulaire pour un satellite en orbite autour de la Terre. Lois de Kepler.
3. Lentilles minces : définition, points particuliers, constructions, applications.
4. Lois de Descartes. Etablir la condition de réflexion totale. Application à la fibre optique.
5. Machines thermiques dithermes. Application.
6. Interférences à N ondes : formule des réseaux.
7. Dispositif interférométrique par division du front d'onde : trous d'Young. Perte de contraste par élargissement spectral de la source.
8. Interféromètre de Michelson : montage en lame d'air et coin d'air. Application.
9. Particule chargée dans un champ électrostatique et magnétostatique : applications.
10. Oscillateur mécanique et électrique soumis à une oscillation sinusoïdale forcée. Analogies. Résonance.
11. Moment cinétique et pendule pesant.
12. Fonction de transfert. Diagramme de Bode. Exemple.
13. Premier principe en écoulement stationnaire. Application.
14. Le circuit RLC série en régime transitoire.
15. Electrostatique : condensateur plan.
16. Champ et potentiel d'un dipôle électrostatique.
17. Champ gravitationnel créé par une répartition sphérique homogène de masse.
18. Equation de la diffusion thermique unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes.
19. Résistance thermique.
20. Champ magnétique créé par un solénoïde infini.
21. Moment magnétique : définition, ordre de grandeur, influence d'un champ, application.
22. Lois de la dynamique en référentiel non-galiléen. Exemples.
23. Caractère non galiléen du référentiel terrestre. Définition du poids sur Terre.
24. Lois de Coulomb. Application.
25. Mutuelle inductance. Mise en équation en régime sinusoïdal forcé.
26. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique : cas du rail de Laplace.
27. Modes propres de vibration d'une cavité électromagnétique séparée par deux conducteurs parfaits.
28. L'énergie du champ électromagnétique.
29. Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique, effet de peau.
30. Équations de Maxwell : version locale et intégrale.
31. Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide.
32. Propagation d'ondes électromagnétiques dans plasma peu dense. Relation de dispersion. Transparence et absorption.
33. États stationnaires d'une particule arrivant avec une énergie E sur une marche de potentiel V dans le cas où $E > V$.
34. Puits quantique infini. Quantification de l'énergie. Application.
35. Équation de Schrödinger. États stationnaires de la particule libre. Relation de dispersion.
36. Système à deux niveaux sans dégénérescence en thermodynamique statistique.
37. Théorème d'équipartition de l'énergie. Application aux capacités thermiques.

Exercices d'optique

Exercice 1 : Fibre optique *(Oral CCINP MP)*

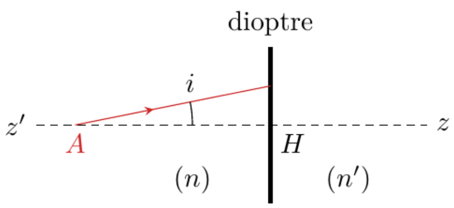
Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un coeur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1,500$ et de rayon r_c, entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1,485$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-coeur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox, on se restreint à une étude dans le plan xOy.



Fibre optique à saut d'indice

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes de la réfraction.
2. Etablir la condition de réflexion totale sur un dioptre.
3. Déterminer la condition sur θ pour que le rayon se propage dans la fibre.
4. Faire l'application numérique.
5. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de la longueur L de la fibre, de c, et de n_c la durée de parcours T_1 de ce rayon.
6. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de L, c, n_g et n_c la durée de parcours T_2 de ce rayon.
7. En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$. Faire l'application numérique pour une fibre de longueur $L = 100$ m. Commenter.

Exercice 2 : Dioptre plan *(Oral Banque PT)*



On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents d'indices respectifs $n > n'$. Soit A un point situé sur l'axe (zz') normal au dioptre. On note i l'angle incident et i' l'angle réfracté.

1 - Construire A' image de A par le dioptre.

2 - Donner une relation entre AH, $A'H$, i et i'.

3 - Énoncer les conditions de Gauss. Déterminer une relation entre AH, $A'H$, n et n'.

4 - À quelle distance le chat voit-il le poisson dans son aquarium sachant qu'il l'observe de façon normale aux dioptres ? Le poisson se trouve à 5 cm de la vitre, épaisse de 8 mm. On donne $n_{\text{eau}} = 1{,}33$, $n_{\text{verre}} = 1{,}50$ et $n_{\text{air}} = 1{,}00$.

Exercice 3 : Distance hyperfocale *(Oral CCINP)*

On s'intéresse à la notion de distance hyperfocale d'un appareil photographique, qui est la distance minimale à laquelle un objet peut être vu net lorsque la mise au point est faite sur l'infini.
On considère dans l'exercice un objectif de distance focale $f' = 30$ mm et un diamètre d'ouverture défini par le nombre d'ouverture $N = \frac{f'}{D} = 16$ où D est le diamètre du diaphragme. Le diaphragme est collé à l'objectif. Le capteur est de dimension 4,8 mm x 6,4 mm et contient 10 millions de pixels. On fait la mise au point à l'infini.

1. Schématiser la situation en indiquant les foyers et la position du capteur.
2. On place un objet A à une distance d de l'objectif. On note $\Delta = \overline{F'A'}$ la distance entre le foyer image de l'objectif et A' l'image de A par l'objectif. Montrer que $\Delta = \frac{f'^2}{d-f'}$. Quelle approximation peut-on faire ici ?
3. Calculer numériquement Δ pour $d = 1$ m.
4. Montrer, en se basant sur une construction géométrique, que le diamètre de la tâche sur le capteur s'approxima à $\frac{Df'}{d}$.
5. Comparer la taille de cette tâche à la tâche causée par la diffraction. Conclure.
6. g est le grain du capteur. L'image est nette si la taille de la tâche sur le capteur est inférieure au grain. Déterminer alors la distance hyperfocale. Faire l'application numérique.

Exercice 4 : Oeil myope *(Oral CCINP PSI)*

Un oeil myope est constitué d'un ensemble cornée/cristallin trop convergent. La myopie est un défaut de l'oeil que l'on peut corriger grâce à des verres correcteurs, des lentilles de contact ou bien de façon définitive par une opération au LASER.

1. Pour un oeil myope, où se forme, par rapport à la rétine, l'image d'un objet situé à l'infini ?
2. Construire, pour un oeil myope, l'image d'un objet situé à l'infini en dehors de l'axe optique.
3. Quel type de verre correcteur ou de lentille de contact doit-on choisir pour corriger ce défaut ?
4. On donne une liste de verres correcteurs avec les vergences suivantes : -7δ, -3δ, $-0,25\delta$, $+0,25\delta$, $+3\delta$, $+7\delta$. Quel verre conviendra pour corriger une myopie faible, moyenne, forte ?

Pour un oeil adulte emmétrope (oeil sans défaut), l'oeil au repos voit net jusqu'à une distance infinie, on dit que son punctum remotum est à l'infini. On considère ici un individu très myope avec un punctum remotum situé à $d = 11$ cm de l'oeil. Un opticien lui propose une paire de lunettes avec une distance oeil-lunettes de 1 cm.

5. Quelle vergence doit-il choisir pour voir net sans accommoder un objet à l'infini ?
6. Lorsqu'il porte ses lunettes, on constate que les yeux d'un individu myope semblent plus petits et en avant de son visage. Dans un premier temps, justifier ces observations en vous appuyant sur une construction graphique dans laquelle on construit l'image de l'oeil par les lunettes.
7. Dans un second temps, et grâce aux relations fournies, calculer de quel pourcentage a varié la taille apparente de ses yeux.

Exercice 5 : Lunette astronomique *(Oral Mines-Telecom)*

On considère une lunette astronomique modélisée par l'association de deux lentilles convergentes $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ de distance focale image respectives $f_1' = 1,0\,m$ et $f_2' = 1,5\,cm$.

1) Comment doivent-être positionnées les deux lentilles si l'on veut rendre le système afocal ? Quel est l'intérêt d'un tel réglage ?

2) Le pouvoir séparateur de l'oeil est de l'ordre d'une minute d'angle. Quel est la taille minimale des détails obervables sur la Lune, à l'oeil nu puis à travers la lunette, sachant que la distance Terre-Lune vaut $D_{TL} = 3,8.10^5\,km$?

Exercice 6 : Microscope *(Oral Mines-Telecom)*

On observe un objet AB transverse de taille $h = 10\,\mu m$ à travers un microscope constitué de deux lentilles convergentes ($\mathscr{L}_1$) (objectif) et ($\mathscr{L}_2$) (oculaire) de distances focales respectives $f_1' = 1,0\,cm$ et $f_2' = 3,0\,cm$. On place l'objet à la position $\overline{AO_1} = 1,1\,cm$.

1) Où doit se former l'image intermédiaire A_1B_1 de AB par ($\mathscr{L}_1$) pour que le microscope renvoie une image à l'infini?

2) Sous quel angle visualise-t-on l'objet, vu à travers le microscope ? Illustrer sur une figure.

3) Sachant que le pouvoir séparateur de l'oeil est d'environ une minute d'angle, l'utilisation du microscope permet-elle de séparer A de B ?

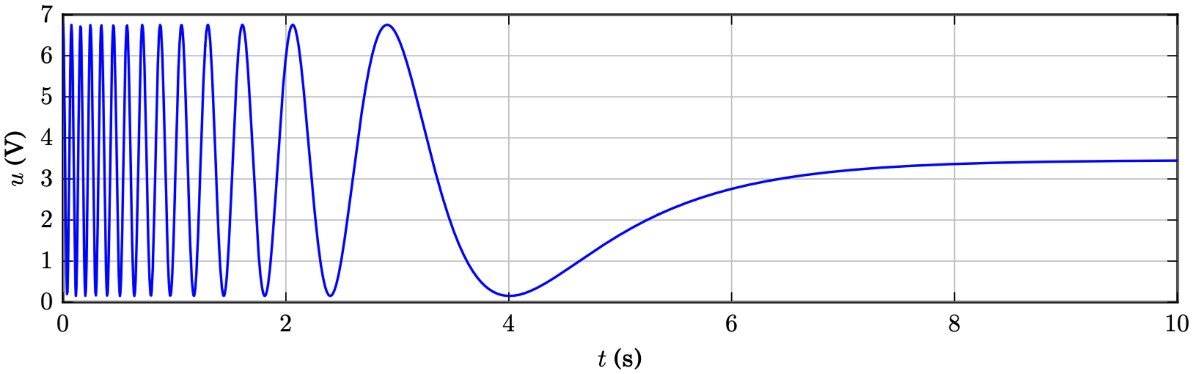
Exercice 7 : Mesure de l'indice de l'air *(Oral CCINP)*

On cherche à mesurer expérimentalement l'indice n_0 de l'air avec un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par un laser de longueur d'onde 632,8 nm.

1 - Faire un schéma du montage et de la figure d'interférences. Si une source étendue avait été utilisée à la place du laser, où les franges auraient-elles été localisées ? Aucune démonstration n'est attendue.

2 - Donner l'ordre d'interférences au centre de la figure d'interférences.

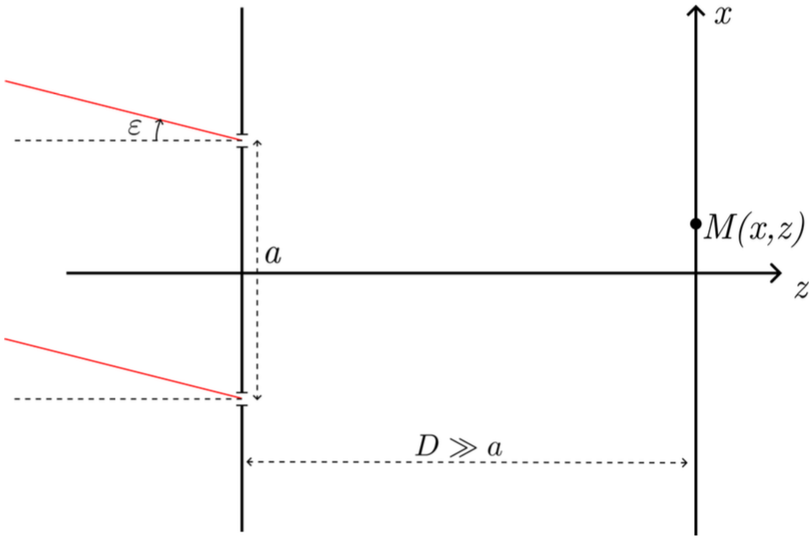
Sur un des bras de l'interféromètre, on insère une cuve de verre fermée hermétiquement. Le verre est d'indice n_v constant, la cuve est longue de 1,6 cm. La cuve contient initialement de l'air, et on y fait le vide progressivement : l'indice du contenu de la cuve diminue progressivement de n_0 à 1. Au cours de l'opération, on mesure l'éclairement au centre de la figure d'interférences grâce à un capteur qui délivre une tension u proportionnelle à l'éclairement. On obtient la courbe de la figure 4. La tension est maximale à l'instant initial.



Tension mesurée lors de la mise sous vide de la cuve.

3 - Donner un encadrement de l'écart $n_0 - 1$ entre l'indice de l'air et celui du vide.

Exercice 8 : Deux étoiles *(Oral CCINP MP)*



On considère le dispositif ci-dessus, éclairé par une source ponctuelle à l'infini, inclinée d'un angle $\epsilon << 1$ par rapport à l'axe Oz.

1. Calculer la différence de marche entre les deux rayons.
2. Quelle est l'expression de l'ordre d'interférence associé ?
3. Décrire la figure observée sur l'écran.

On place alors une deuxième source symétrique à la première par rapport à l'axe Oz. Les deux sources sont incohérentes.

4. Décrire et expliquer la figure observée.
5. Explicitez les valeurs de a (en fonction de λ et ϵ) qui donnent une intensité lumineuse uniforme sur l'écran.
6. Application numérique : on observe deux étoiles jumelles très proches et émettant une lumière de longueur d'onde $\lambda = 650$ nm. On mesure pour la situation de la question précédente $a = 87,3$ cm. Calculer l'angle entre ces deux étoiles.

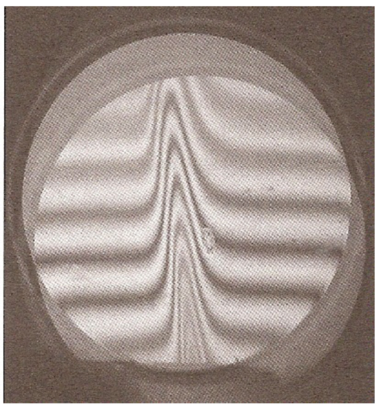
Exercice 9 : Mesure de l'indice d'un gaz *(Oral CCINP MP)*

On souhaite mesurer l'indice optique d'un gaz en utilisant un interféromètre de Michelson. On dispose d'un laser, d'un condenseur, de polariseurs, de diaphragmes à iris, d'un écran, et de quatre lentilles de focales respectives 20 cm, 100 cm, 5 cm et -30 cm.

1 - Schématiser le montage permettant d'obtenir des raies lumineuses. Comment se nomme la configuration de l'interféromètre ?

2 - Où les franges sont-elles observables ? Pourquoi parle-t-on de « franges localisées » ?

3 - La distance entre les miroirs et l'écran est égale à 2 m. En déduire la lentille à utiliser et sa position.

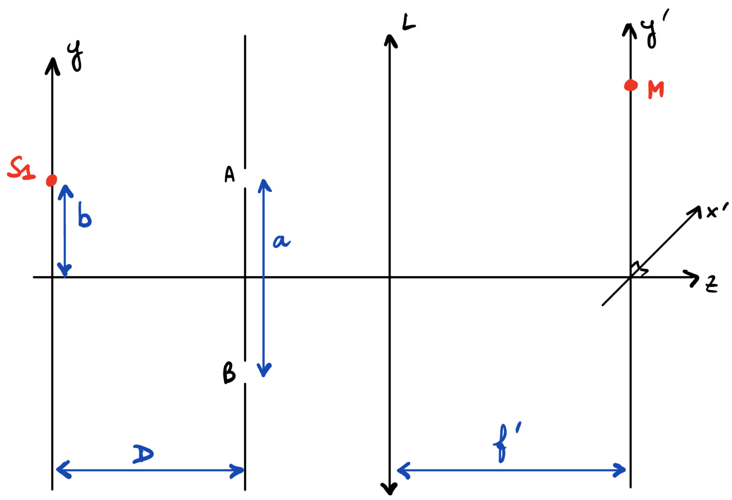


Les miroirs forment un angle α. On rappelle que la différence de chemin optique vaut $\delta(x) = 2\alpha x$, avec x l'abscisse mesurée par rapport à l'axe d'intersection des miroirs. On fait alors passer un flux de gaz de diamètre 1 mm entre la séparatrice et l'un des miroirs, perpendiculairement au trajet des rayons lumineux. Les franges prennent l'allure ci-contre.

4 - Déterminer la nouvelle différence de chemin optique δ'. En déduire l'écart Δn entre l'indice du gaz et celui de l'air.

Exercice 10 : Interférences de Young *(Oral CCINP MP)*

On considère un dispositif de trous de Young séparés d'une distance a. Un écran est placé dans le plan focal image de la lentille convergente, et on s'intéresse aux interférences observées. Une source, notée S_1, a pour coordonnées $(0, b, 0)$, pour longueur d'onde λ et pour intensité I_0. On considère dans la suite que $a << D$ et $a << b$.



1. On considère le point M sur l'axe Oy'. Tracer les rayons R_1 (passant par A) et R_2 (passant par B) issus de S_1 parvenant en M.
2. Exprimer l'intensité $I_1(M)$ en considérant M proche de O' en fonction de a, b, D, f', y', I_0 et λ.
3. Décrire les franges d'interférence observées sur l'écran.

On considère maintenant une deuxième source S_2, symétrique de S_1 par rapport à l'axe Oz (de coordonnées $(0, -b, 0)$). S_2 est de longueur d'onde λ et d'intensité lumineuse I_0.

4. Déterminer $I_2(M)$.
5. Les sources S_1 et S_2 sont incohérentes. En déduire l'intensité résultante I_{tot} au point M.
6. La source S_2 s'éloigne à la vitesse v_0 constante de S_1. Décrire ce qu'il se passe au niveau des franges et donner tous les instants pour lesquels on a brouillage de la figure d'interférences. On suppose que $t = 0$ correspond à une situation de coïncidence.

Exercice 11 : Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire

On dispose d'un interféromètre de Michelson réglé en configuration lame d'air éclairé par une source de lumière blanche.

1 - Décrire le dispositif, notamment l'allure des franges d'interférences et la façon de les observer.

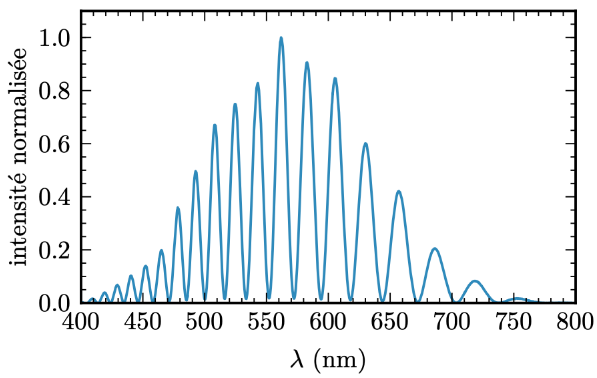
On règle le Michelson au contact optique, puis on insère dans l'un des bras de l'interféromètre un film alimentaire tendu, assimilé à une lame à faces parallèles d'épaisseur e faite d'indice $n = 1{,}5$.

2 - L'écran apparaît blanc dans les deux cas, cependant lorsqu'on observe le spectre en présence de la lame l'intensité est nulle pour certaines longueurs d'ondes. Expliquer.

3 - Montrer que les longueurs d'onde absentes du spectre sont reliées à la différence de marche δ par

$$\lambda = \frac{2}{2k+1}\delta \qquad \text{avec} \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

4 - On enregistre le spectre au centre de la figure d'interférences, voir figure 3. En déduire l'épaisseur e du film alimentaire



Spectre enregistré au centre de la figure d'interférences.

Exercice 12 : Réseau optique par transmission *(Oral Mines)*

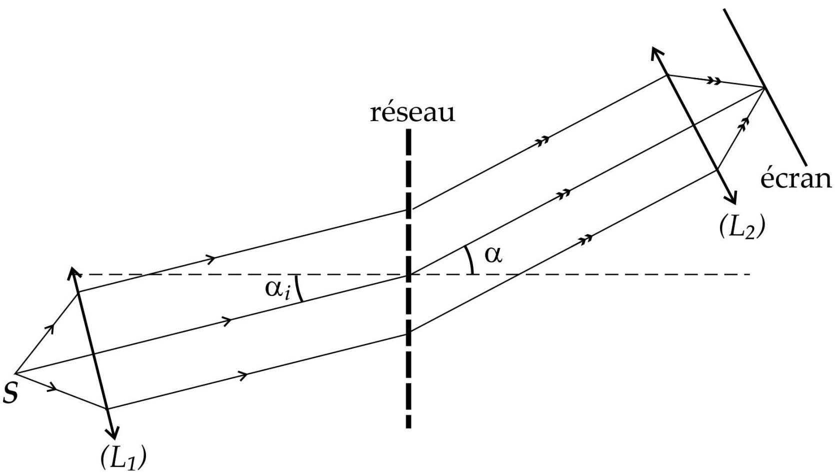
On considère un goniomètre, sur lequel est placé un réseau plan par transmission. On éclaire ce réseau en incidence normale à partir d'une lampe à vapeur de mercure. On mesure les angles d'émergence de la raie verte (de longueur d'onde $\lambda = 546,1$ nm) dans différents ordres :

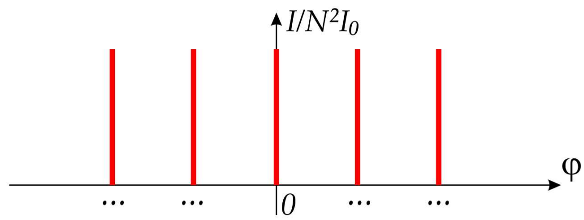
angle mesuré	ordre
$\alpha_0 = 13°12'$	0
$\alpha_1 = 30°34'$	1
$\alpha_2 = 49°53'$	2
$\alpha_3 = 76°49'$	3
$\alpha_{-1} = 355°48'$	-1
$\alpha_{-2} = 336°32'$	-2
$\alpha_{-3} = 309°28'$	-3

1. Vérifier que le réseau était bien éclairé en incidence normale.
2. Déterminer le pas du réseau, ou le nombre de traits par mm. Évaluer l'incertitude-type.
3. On repère une autre raie, aux ordre -2 et 2 : $\alpha_2 = 340°38'$ et $\alpha_2 = 45°43'$. Déterminer la longueur d'onde de cette radiation.
4. Exprimer et calculer le minimum de déviation.

Exercice 13 : Goniomètre à réseau *(Oral CCINP)*

On considère un goniomètre à réseau, éclairé par une source de lumière monochromatique, dont le faisceau est collimaté au moyen d'une première lentille L_1 (lentille du collimateur). Ce faisceau parallèle est incident sur un réseau comprenant n = 280 traits par mm. En sortie du réseau, le faisceau est focalisé au moyen d'une lentille L_2 (lentille de la lunette). On observe l'image du faisceau sur un écran.



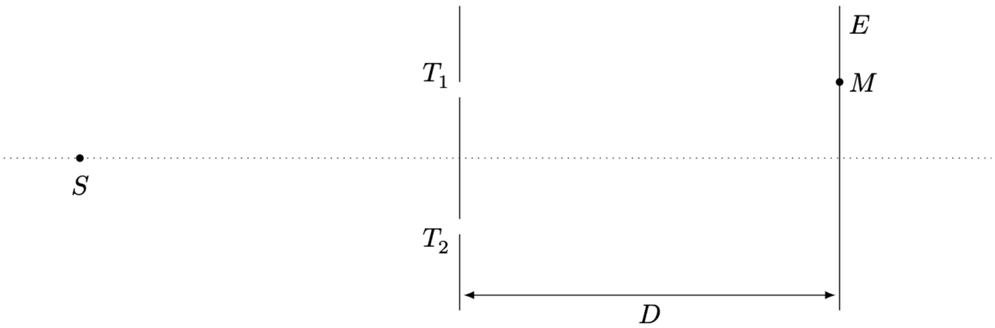


1. Quel est le pas du réseau ?
2. Quel phénomène peut-on observer en sortie du réseau ?
3. Exprimer le déphasage $\varphi(\alpha)$ entre deux rayons passant par deux traits successifs.
4. On fournit le graphe de l'intensité I en sortie, en fonction du déphasage φ (on a ici $N = 100$ traits du réseau éclairés). Justifier l'allure de ce graphique, et préciser les valeurs de φ pour lesquelles sont atteints les maxima.
5. La source comporte en fait deux longueurs d'onde proches, λ et $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Pour un faisceau incident à l'incidence normale sur le réseau, on mesure les deux raies de l'ordre un aux angles $\alpha_1 = 9°17'$ et $\alpha_2 = 9°19'$. Que valent les deux longueurs d'onde ? A quelle couleur correspondent-elles ?

Exercice 14 : Composition d'une source inconnue *(Oral CCINP MP)*

On souhaite déterminer la composition spectrale d'une source ponctuelle S inconnue, émettant à priori dans le visible. On dispose pour cela :

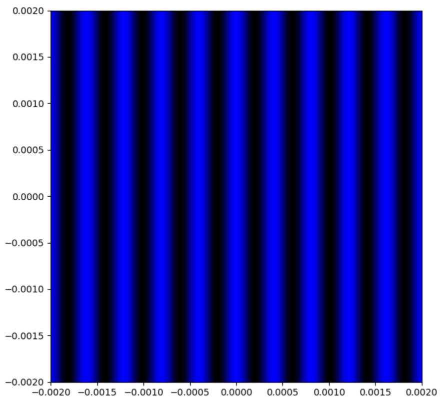
- d'un dispositif interférométrique de type trous d'Young, l'observation de la figure d'interférences se faisant sur un écran situé à distance finie $D = 1$ m des trous d'Young, placé parallèlement aux trous. La source est située à égale distance des deux trous. Les trous d'Young sont distants de $a = 1$ mm ;
- de filtres permettant de sélectionner diverses gammes de longueurs d'ondes
  - filtre 1 : $\lambda(\text{nm}) \in [400; 500]$
  - filtre 2 : $\lambda(\text{nm}) \in [500; 600]$
  - filtre 3 : $\lambda(\text{nm}) \in [600; 750]$

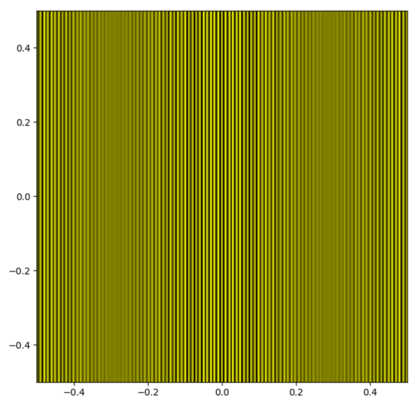


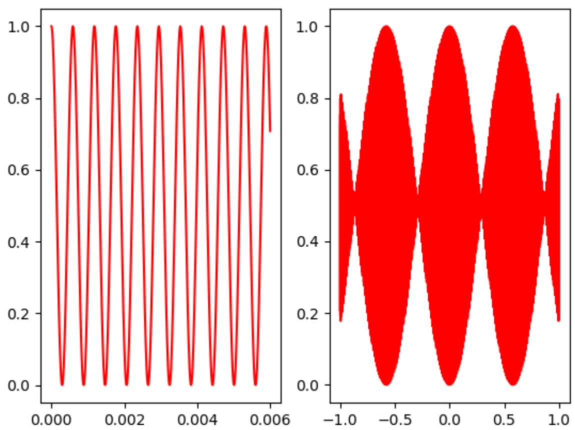
1. Dans le cas d'une source monochromatique, déterminer l'expression de l'intensité en un point M de l'écran.

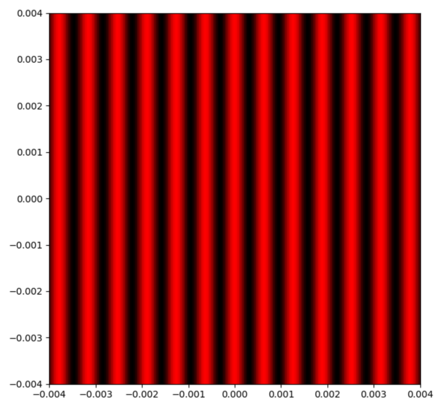
On donne ci-dessous ce que l'on observe sur l'écran pour chacun des filtres. Première image : filtre 1. Deuxième image : filtre 2. Troisième image, représentation de l'intensité en fonction de la position sur l'écran pour le filtre 2. Quatrième image : filtre 3. Les abscisses correspondent à la position sur l'écran

2. Déduire des images précédentes la composition de la source inconnue.



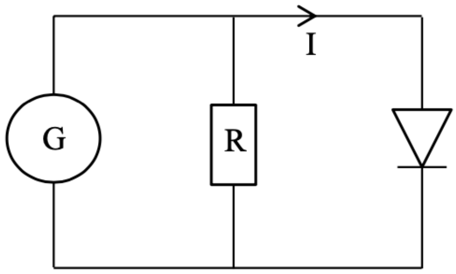






Exercices d'électrocinétique

Problème 15 : Pointeur Laser *(Oral CCINP)*



Le circuit électrique d'un pointeur laser est représenté ci-dessus. Le générateur est une association série de 3 piles boutons LR44 et la diode est une diode laser de faible puissance. Cette dernière émet un faisceau laser lorsqu'elle alimentée.

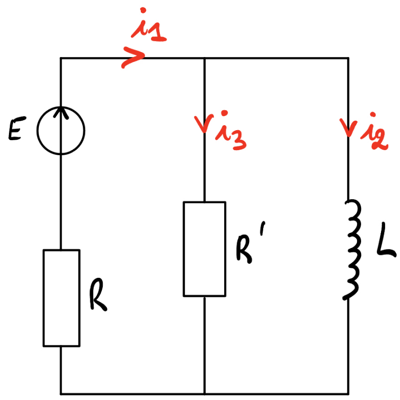
<u>**Données**</u> :

- Piles LR44 :
  - Tension à vide : 1,5 V
  - Résistance interne : r = 5,0 Ω
  - Capacité : 150 mA.h
- Résistor : R = 70 Ω
- Intensité du courant parcourant la diode laser en fonctionnement : I = 40 mA.

Déterminer la durée de fonctionnement du pointeur.

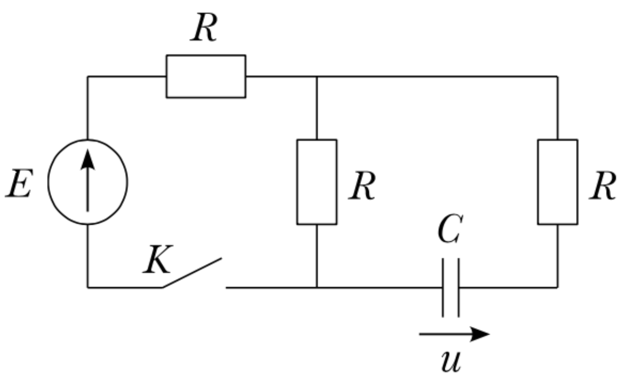
Exercice 16 : Circuit RL *(Oral CCINP)*

On considère le circuit suivant composé d'un générateur réel de tension et d'une bobine d'inductance L ainsi que d'une résistance R. La bobine est initialement déchargée. A l'instant $t = 0$, on allume le générateur de tension.



1. Déterminer les intensités i_1, i_2 et i_3 à l'instant $t = 0^+$.
2. Déterminer les intensités $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $i_3(\infty)$ une fois que le régime permanent sera atteint.
3. Etablir l'équation différentielle régissant le courant $i_2(t)$.
4. Résoudre l'équation différentielle. Vérifier la cohérence avec la question 2.
5. En déduire $i_1(t)$ et $i_3(t)$.
6. Tracer les variations de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$.
7. Quelle énergie emmagasine la bobine ?

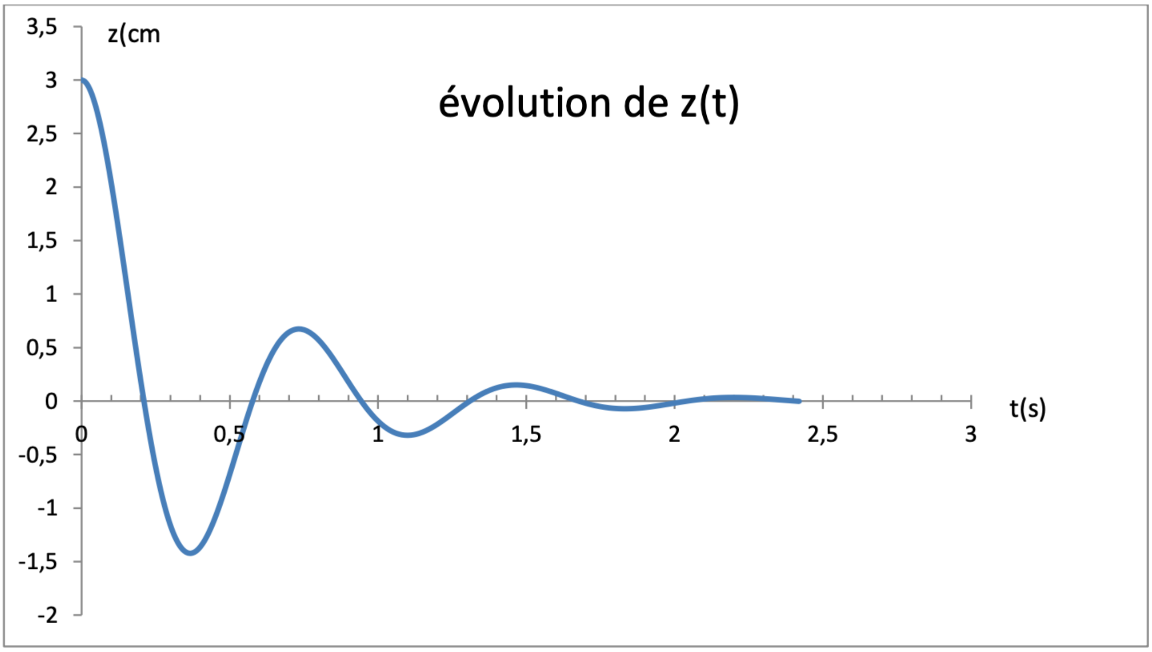
Exercice 17 : charge et décharge d'un condensateur *(Oral CCINP)*



1. Initialement, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$. Comment pouvait-on prévoir la tension maximale u_{max} du condensateur ?
2. L'interrupteur K étant fermé depuis longtemps, on a alors $u = u_{max}$. A l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$.
3. Réaliser le bilan énergétique de la décharge du condensateur.

Problème 18 : Viscosité de la glycérine *(Oral CCINP PSI)*

Une bille d'acier de rayon R et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Placée dans la glycérine de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la sphère.
Dans l'air, on mesure une période des oscillations $T_0 = 0,71$ s alors que dans la glycérine on mesure une pseudo-période légèrement différente.
Déterminer le coefficient de viscosité η de la glycérine.



évolution de la position de la bille immergée dans la glycérine

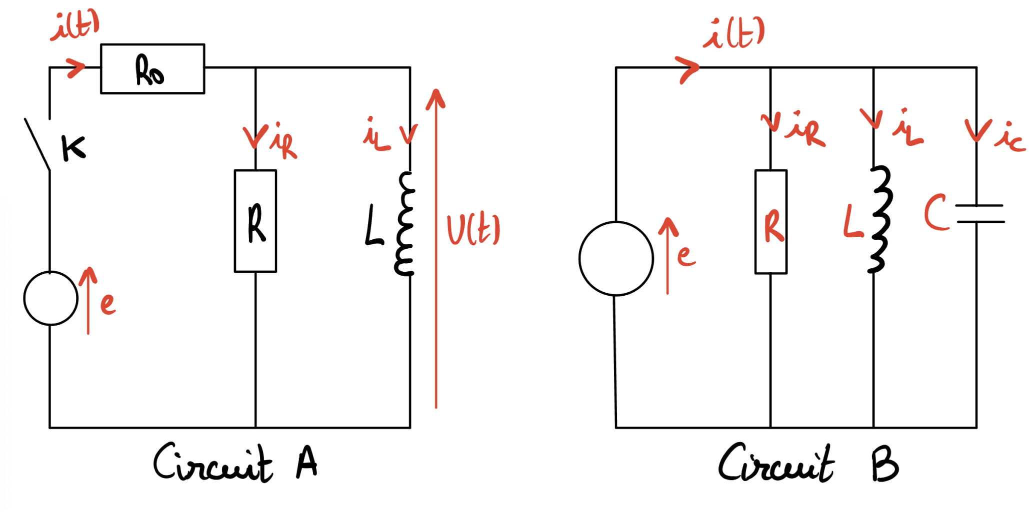
Données : masse de la bille : $m = 64$ g, rayon de la bille : $R = 1,26$ cm, masse volumique de la glycérine : $\rho = 1260$ kg.m^{-3}.

Exercice 19 : Autour du RLC série *(Mines-Telecom)*

On considère un circuit constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance interne R en série avec un condensateur de capacité $C = 10\mu F$. A $t = 0$, on ferme le circuit, le condensateur étant initialement chargé sous une tension $U_0 = 5$ V.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur et faire apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité dont on donnera les expressions en fonction de R, L et C.
2. Quels sont les différents régimes transitoires selon la valeur de Q ?
3. Dans un premier temps, la bobine est d'inductance $L = 10$ mH et le régime d'amortissement est pseudopériodique. La pseudopériode est $T = 2,1$ ms. Calculer la résistance interne de la bobine.
4. Dans un second temps, la bobine est d'inductance $L = 25$ mH. Le régime étudié est le régime critique.
   (a) Déterminer R.
   (b) Quelle est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R entre $t = 0$ et $t = \infty$?
5. Dans un troisième temps, la bobine est d'inductance $L = 2$ mH. Le régime est apériodique et l'intensité est maximale à la date $t_0 = 0,36ms$. Calculer la résistance interne R de la bobine.

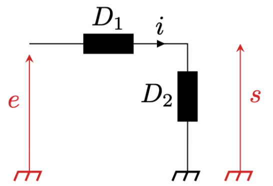
Exercice 20 : Régime sinusoïdal forcé *(Oral CCINP)*



On considère le circuit A, dont on ferme l'interrupteur K à t = 0 s. Il est alimenté par un générateur de tension tel que $e(t) = E\cos(\omega t)$.

1. Donner l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ des dipôles en parallèles en fonction de R, L et ω. En déduire l'impédance $\underline{Z}_{\text{tot}}$ du circuit.
2. Donner l'expression de l'amplitude I_m de l'intensité $i(t)$ du circuit en fonction des données. Que se passe-t-il lorsque l'on se place en basse fréquence ?
3. On considère le deuxième circuit. Donner l'expression de l'impédance totale du circuit $\underline{Z}_{\text{tot}}$.
4. En déduire l'expression du module de l'amplitude I_m.
5. Montrer que l'on a un phénomène de résonance pour une pulsation ω_{R} que l'on exprimera en fonction des données.

Problème 21 : Dipôles masqués *(CCINP MP)*



Avec un résistor, une bobine et un condensateur on réalise deux dipôles D_1 et D_2. En régime continu, on mesure $I = 1\,\text{mA}$ pour $E = 3\,\text{V}$. En régime sinusoïdal, le circuit présente un comportement passe-bande de fréquence de résonance $f_0 = 1\,\text{kHz}$ et de bande passante $\Delta f = 200\,\text{Hz}$.

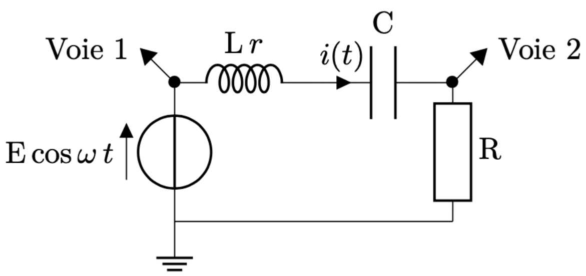
Question : Identifier les dipôles et la valeur des composants utilisés.

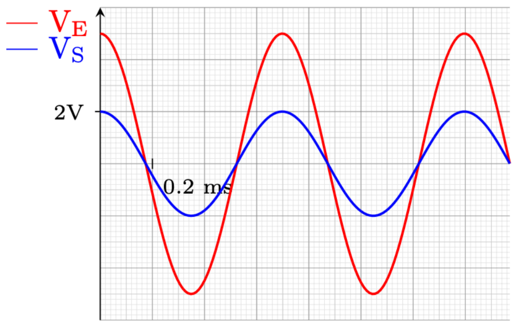
Donnée : forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe bande du second ordre :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}x}{Q}H_0}{1 - x^2 + \dfrac{\mathrm{j}x}{Q}}$$

Exercice 22 : Résonance d'un circuit RLC *(Oral TPE)*

On considère le circuit suivant comprenant une bobine d'inductance L et de résistance interne r, un condensateur de capacité C et une résistance R. Ces dipoles sont alimentés par un GBF fournissant une tension $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \cos \omega t$. L'intensité dans le circuit est noté $i(t) = \mathrm{I}_0 \cos(\omega t + \phi)$.

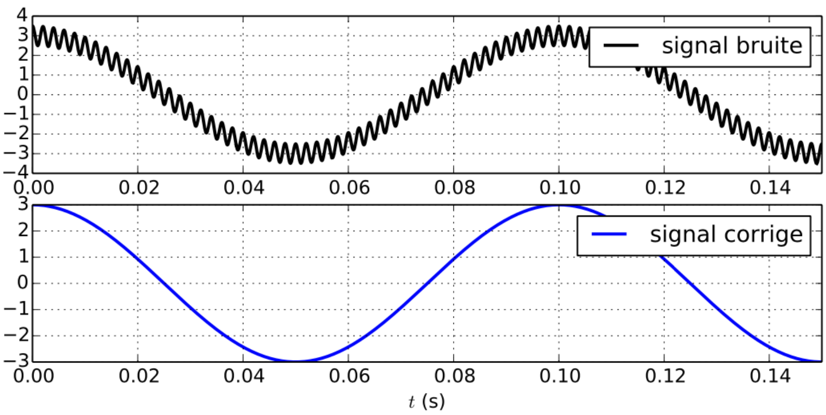




1 - Associer chaque voie aux courbes obtenues.
2 - Déterminer E_0, f, et ϕ.
3 - Sachant que $\mathrm{R} = 100\ \Omega$ et $\mathrm{C} = 100$ nF, déduire les valeurs de L et r.
4 - Est il possible de visualiser la tension du générateur et la tension aux bornes de la bobine ?
5 - Déterminer la représentation à haute fréquence de et basse fréquence de la tension voie 2 pour un créneau.

Problème 23 : Signal parasité *(Oral Mines-Telecom)*

On présente ci-contre un signal parasité et le signal corrigé par le filtre. **Proposer un filtre permettant de passer du signal parasité au signal corrigé. On précisera les valeurs des composants utilisés.**



Exercice 24 : Signal périodique *(Oral Mines-Telecom)*

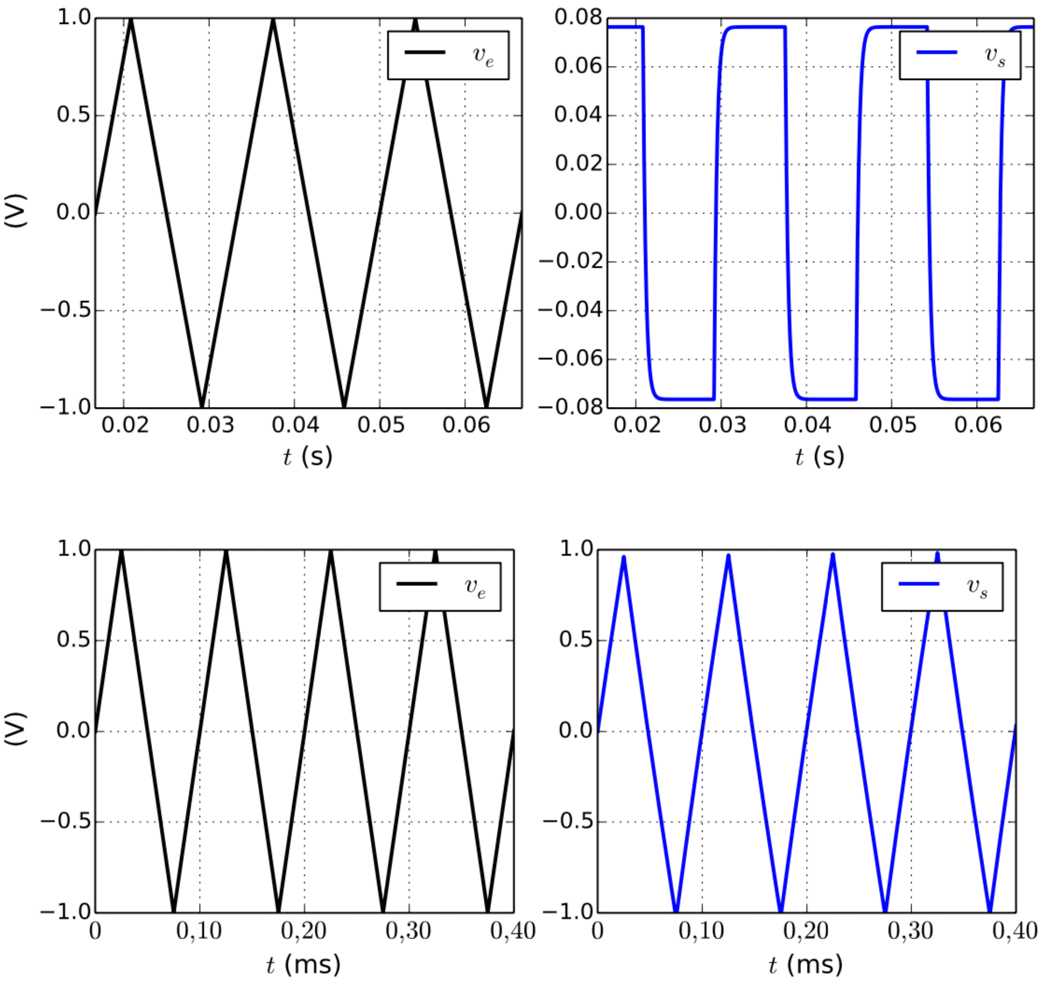
On considère un signal périodique de période T_S, valant $e(t) = \frac{2E_0 t}{T_S}$ pour $t \in \left[-\frac{T_S}{2}, \frac{T_S}{2}\right]$. On donne son développement en série de Fourier :

$$e(t) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin(n\omega_S t) \text{ avec } \omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de terme constant dans la série de Fourier ?
2. Représenter le spectre en amplitude du signal d'entrée jusqu'à l'harmonique de rang 7.
3. On applique un filtre de transfert $\underline{H} = \frac{\frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{Q\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. De quel type de filtre s'agit-l ? Que dire sachant que $Q = 10$?
4. Quelle sera la sortie pour :
   (a) $\omega_0 = \frac{\omega_S}{10}$?
   (b) $\omega_0 = \omega_S$?
   (c) $\omega_0 = 10\ \omega_S$?

Exercice 25 : Paramètres d'un filtre *(Oral Mines-Telecom)*

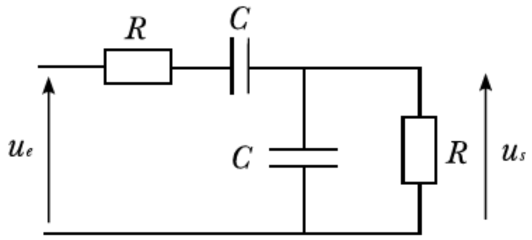
Les graphes représentés ci-après donnent la réponse d'un filtre du premier ordre à un signal triangulaire d'amplitude $1,0$ V, de fréquence successivement égale à 60 Hz et 10 kHz.



1. Déterminer la nature du filtre et sa fréquence caractéristique.
2. Proposer un montage électrique réalisant ce filtre et indiquer les valeurs des composants.

Exercice 26 : Filtre à pont de Wien *(Oral CCINP)*

On étudie le filtre ci-dessous, constitué de deux condensateurs de même capacités C et de deux résistors de même résistance R.



1. Faire une étude asymptotique du filtre.

2. Exprimer sa fonction de transfert sous forme canonique et donner l'expression du gain maximal, de la pulsation de résonance ainsi que du facteur de qualité.

3. Tracer les diagrammes de Bode.

4. En remarquant que les pulsations de coupure vérifient $x - \frac{1}{x} = \pm 3$, calculer le déphasage en ces valeurs.

Exercice 27 : Conditions de Shannon *(Oral CCINP)*

On souhaite réaliser l'échantillonnage d'un signal $s(t)$. Les paramètres de l'échantillonnage sont : N le nombre de points et f_e la fréquence d'échantillonnage.

1. (a) Que vaut la période d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition pour $N = 1000$ et $f_e = 20kHz$?

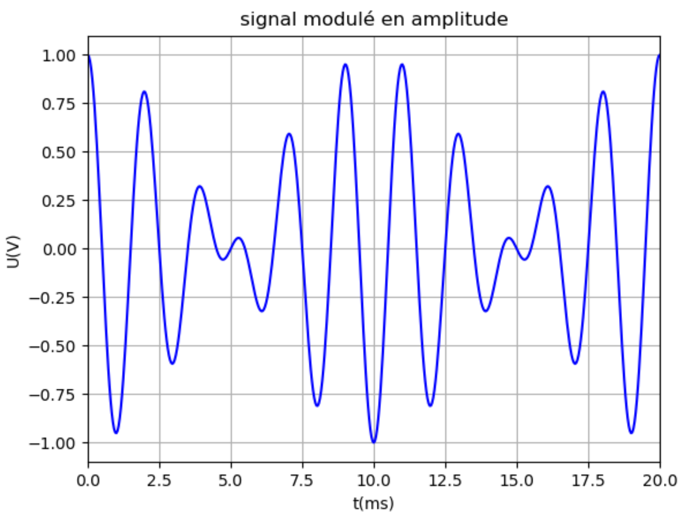
   (b) Que vaut la résolution en fréquence Δf ?

   (c) Quels signaux peuvent être échantillonnés avec ces paramètres ?

2. On considère un signal modulé en amplitude se mettant sous la forme $s(t) = A \times \cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 500Hz$ et $f_2 = 50Hz$. Ce signal est représenté ci-contre.

   (a) Déterminer la valeur de A.

   (b) Déterminer le spectre en amplitude de $s(t)$.



On désire échantillonner ce signal et effectuer sa décomposition en série de Fourier pour mesurer les fréquences avec une résolution de 1 Hz.

2. (c) Déterminer la durée d'acquisition minimale, la fréquence d'échantillonnage minimale et le nombre de points minimal utilisé par le convertisseur.

Exercices de Mécanique

Exercice 28 : Balle de golf dans un looping *(Oral CCINP)*

On étudie une balle de golf assimilée à un point matériel sans frottement évoluant sur une piste horizontale en forme de demi-cylindre. Elle est lancée avec une vitesse v_0.

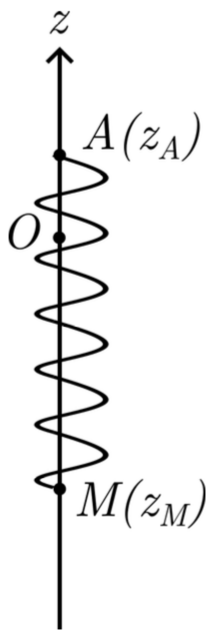
1. Déterminer la vitesse en un point du demi-cylindre en fonction de v_0. Donner une inégalité pour que la balle ne fasse pas demi-tour.

2. Déterminer la force de réaction du cylindre sur la balle. Donner une inégalité pour que la balle soit toujours en contact avec le demi-cylindre.

3. Avec quelle vitesse la balle quitte-t-elle le demi-cylindre ?

4. A quelle distance retombe-t-elle sur la piste horizontale ?

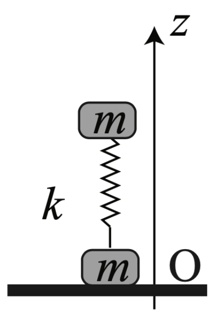
Exercice 29 : Sismographe (*Oral Mines-Telecom*)



Une masselotte de centre d'inertie M et de masse m est suspendue par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le ressort est fixé en A, dont on pose z_A sa coordonnée sur z.

1. Rappelez la force qu'exerce le ressort sur M.
2. On pose z_{eq} la position d'équilibre. Exprimez z_{eq} en utilisant la première loi de Newton.
3. Retrouvez ce résultat par une étude énergétique. En déduire la stabilité de cet équilibre.
4. On pose $\epsilon(t) = z_{\mathrm{M}}(t) - z_{\mathrm{eq}}$. On a $\epsilon(0) = a$ et $\dot{\epsilon}(0) = 0$. Trouvez l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t)$ puis exprimez $\epsilon(t)$.
5. Le point A est maintenant mis en mouvement selon la loi $z_{\mathrm{A}}(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{z_{\mathrm{M}}}$.
6. Identifier une pulsation caractéristique. Que se passe-t-il si ω est proche de cette pulsation caractéristique ? Commenter.

Exercice 30 : Décollement ? *(Oral Mines-Telecom)*



Deux masses identiques notées m sont accrochées à chaque extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

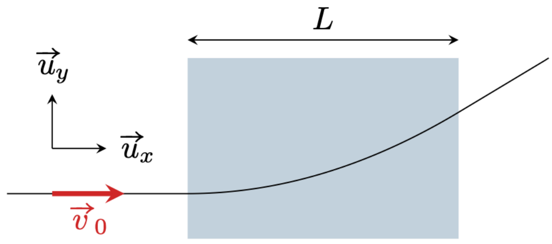
1. Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort.
2. On comprime le ressort jusqu'à $\frac{l_0}{2}$. Une fois lâché, le ressort décolle-t-il ?

Données : $m = 50$ g, $k = 100$ N.m^{-1} et $l_0 = 2,0$ cm.

Exercice 31 : Détermination d'un champ électrique (Banque PT)

Un électron de masse m, d'énergie cinétique $E_{c,0} = 80$ keV pénètre à vitesse $\vec{v}_0$ horizontale dans une cavité de longueur $L = 1$ m où règne un champ électrique uniforme de norme E_0 constante.

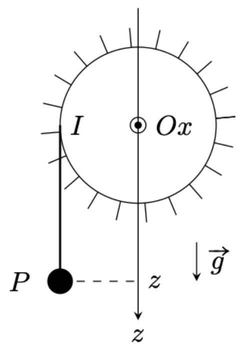
On rappelle que $1eV = 1,6 \times 10^{-19} C$.

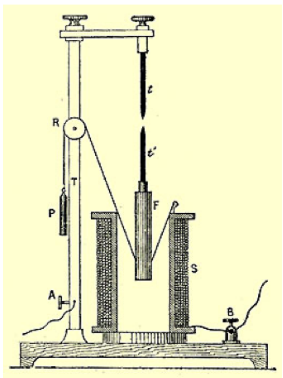


1. Déterminer la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}_0$ en justifiant.
2. Lors de sa traversée, l'énergie cinétique de l'électron varie de $|\Delta E_C| = 10$ keV. Quel est le signe de ΔE_C ? Justifier.
3. Déterminer la norme de E_0.
4. Evaluer l'angle de déviation de la trajectoire en sortie de la zone de champ.

Donnée : $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg

Exercice 32 : mouvement d'une poulie *(CCINP MP)*





Un régulateur d'Archereau-Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique.

On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m. Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x. La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

1 - Justifier que $\dot{z} = R\omega$.

2 - Montrer que la force $\vec{T}$ de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{u}_z \,.$$

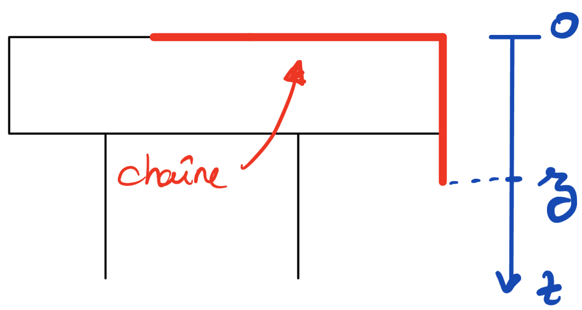
3 - Montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR$$

4 - Résoudre cette équation. En déduire l'intérêt du dispositif.

Problème 33 : chute d'une chaîne *(Oral CCINP MP)*

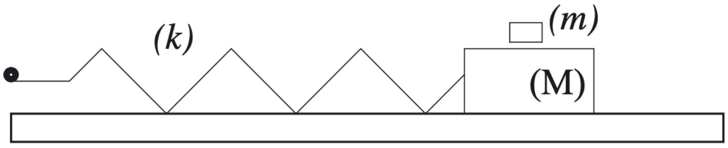
On considère une chaîne posée sur une table, de masse totale m uniformément répartie et de longueur totale L. On repère l'extrémité de la corde pendante par la coordonnée z, comme représenté sur le schéma ci-contre. A l'instant initial, on lâche la corde (vitesse initiale nulle) avec une longueur de corde pendante $a = \frac{L}{4}$. On néglige tous frottements. On prend la référence des potentiels au niveau de la table. **Données :** $m = 1,0$ kg, $L = 1,0$ m.



Déterminer l'équation régissant le mouvement de la chaîne et trouver τ, temps que met la chaîne pour quitter définitivement la table. On supposera que la chaîne reste en contact avec la table.

Problème 34 : Rodéo horizontal *(Oral Mines-Telecom)*

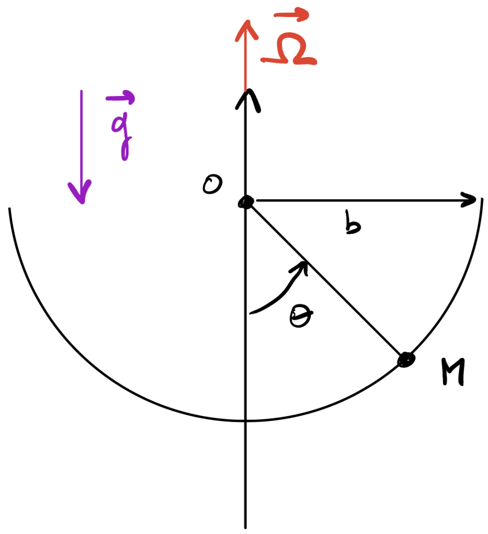
Un petit cube de masse m est posé sur le dessus d'un chariot parallélépipédique de masse M qui glisse sans frottement sur une table horizontale. Le chariot est relié à une paroi par un ressort de constante de raideur k et de masse négligeable, et il a un mouvement rectiligne.



Déterminer l'amplitude maximale du mouvement en dessous de laquelle le cube ne glisse pas. On notera μ le coefficient de frottement entre le cube et le chariot.

Exercice 35 : Gouttière circulaire *(Oral Mines)*

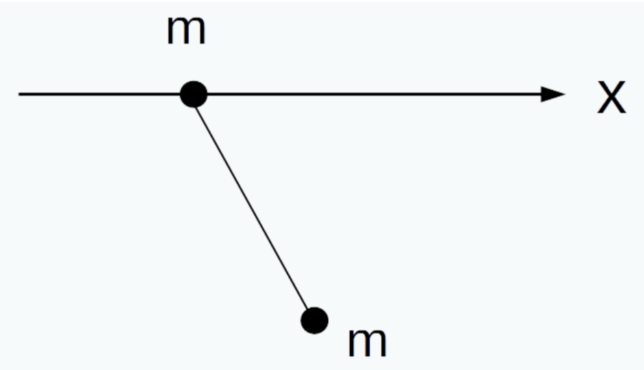
On considère une gouttière circulaire en rotation uniforme à la pulsation Ω par rapport à un axe vertical du référentiel terrestre (cf schéma) dans laquelle se déplace sans frottement une bille supposée ponctuelle de masse m.
Déterminer l'expression de la réaction du support sur la bille en fonction de l'angle θ, de l'angle initial θ_0, de g, de m et de Ω en supposant que la vitesse initiale de la bille est nulle.



Exercice 36 : Pendule *(Oral Mines)*

Une masse m se déplace sans frottement le long d'un axe. A celle-ci est accroché un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable au bout duquel est accrochée une autre masse m.

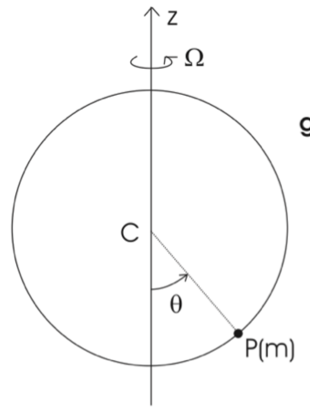
1. Dans un premier temps, la masse en mouvement se déplace à vitesse constante. Déterminer le mouvement du pendule et la période T_0 des oscillations.



2. La masse est maintenant en accélération constante : $\vec{a} = a_0\overrightarrow{e_x}$.
   (a) Déterminer la nouvelle position d'équilibre θ_{eq} du pendule.
   (b) Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_{eq}.
3. La masse est maintenant en mouvement sinusoïdal le long de l'axe Ox avec une accélération $\vec{a} = A\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.
   (a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ dans le cadre de petites oscillations autour de $\theta = 0$.
   (b) Déterminer l'amplitude du mouvement en fonction de ω et représenter le graphe. A-t-on une résonance possible ? Commenter.

Exercice 37 : Anneau en rotation *(Oral CCINP MP)*

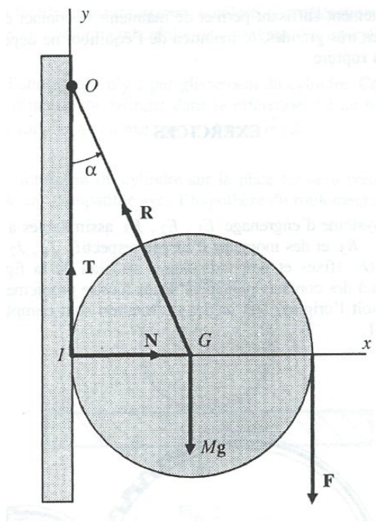
Un anneau P de masse m coulisse sans frottement sur un cercle de centre C et de rayon R. Il est soumis à l'action de la pesanteur. Le cercle tourne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe fixe (Cz). On repère par l'angle θ la position de la masse m. On utilisera les coordonnées polaires de centre C adaptées au problème.



1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent à l'anneau P dans le référentiel lié au cercle. Donner l'équation du mouvement.
2. En déduire les positions d'équilibre. Définir une pulsation critique Ω_c puis rassembler les résultats sur un graphe $\theta_{eq} = f(\Omega)$.
3. Parmi les forces lesquelles ont un travail non nul ? En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$. Tracer l'allure de E_p pour différentes valeurs de Ω.
4. Retrouver à l'aide de E_p les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité. Compléter le diagramme avec cette information. Pourquoi peut-on parler de bifurcation ?
5. Retrouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique.

Exercice 38 : Arc-boutement *(Oral Mines-Telecom)*

La figure ci-contre représente un cylindre de rayon a et de masse M appuyé en I avec le coefficient de frottement f sur un mur vertical qui exerce sur lui l'action de contact $N\vec{u}_x + T\vec{u}_y$ et qui est retenu en G par un fil inextensible accroché en un point O du mur.



On cherche à provoquer le glissement en I en exerçant au point de coordonnées $(2a, 0)$ du cylindre une force $\vec{F} = -F\vec{u}_y$ avec $F > 0$.

1. En supposant l'équilibre maintenu, montrer que, pour F donnée, le problème est entièrement déterminé et donner les expressions de N et T en fonction des données.
2. Calculer la valeur F_0 de F juste suffisante pour provoquer le glissement.
3. Montrer que si f est supérieur à une valeur f_0 que l'on exprimera en fonction de α, il est impossible de provoquer le glissement, aussi intense que soit la force exercée.

Problème 39 : Pesée *(Oral Mines-Telecom)*

A l'aide d'une balance de précision, on remarque que peser un objet au rez de chaussée et au troisième étage ne donne pas la même valeur.

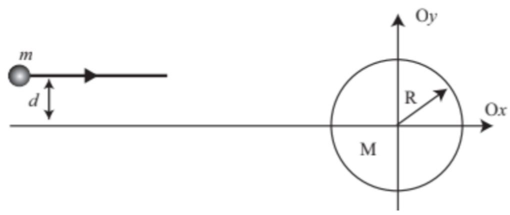
Calculer la précision minimale de la balance pour observer ce phénomène

Données :

- masse de la Terre : $M_T = 5,9742 \times 10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre : $R_T = 6378,137$ km
- Constante universelle de gravitation : $G = 6,6743 \times 10^{-11}$ SI.

Exercice 40 : Astéroïde *(Oral CCINP MP)*

Un astéroïde de masse m s'approche d'une planète de masse M, de centre O et de rayon R. Cet astéroïde provinet de l'espace lointain avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ et uune distance d de l'axe de symétrie de la planète. On notera G la constante de gravitation universelle.



1. Déterminer l'énergie mécanique de l'astéroïde. En déduire la nature puis l'allure de la trajectoire.

2. Déterminer la valeur de d pour que l'astéroïde s'approche à une distance R de la planète.

Exercice 41 : Satellite *(Oral CCINP)*

Un satellite obsolète technologiquement doit laisser son orbite au nouvel arrivant qui va le remplacer ou améliorer les services demandés. Plusieurs options sont possibles mais toutes répondent à un impératif : le contrôle absolu de la trajectoire du satellite en fin de vie afin d'éviter les collisions dans l'espace fort encombré. La solution envisagée dans cet exercice est d'amener le satellite à brûler dans les couches hautes de l'atmosphère terrestre.

Un satellite artificiel de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. On admettra que la Terre est circulaire, de rayon $R_0 = 6,4 \times 10^3$ km ; l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre a pour valeur $g_0 = 9,81$ m.s^{-2}. Le satellite est initialement à l'altitude $h = 800$ km.

1. Rappeler le théorème de Gauss de la gravitation. On pourra s'aider d'une analogie avec l'électrostatique.

2. Déterminer le champ gravitationnel créé par la Terre pour $r > R_0$ et en déduire l'expression de g_0. En déduire la masse de la Terre. On donne : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI.

On s'intéresse à l'orbite circulaire du satellite.

3. Déterminer sa vitesse v dans le référentiel géocentrique et sa vitesse angulaire ω.

4. Déterminer sa période de révolution et retrouver la troisième loi de Kepler.

5. Retrouver l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m, R_0, g_0 et r.

La rentrée du satellite dans les couches de l'atmosphère provoque un ralentissement dû aux frottements des molécules sur le satellite. On modélise ces frottements par une force $\vec{F} = -\alpha m||\vec{v}||\vec{v}$ où α est une constante. Du fait des frottements, l'altitude du satellite diminue. On supposera que le satellite décrit toujours une orbite circulaire dont le rayon décroît lentement.

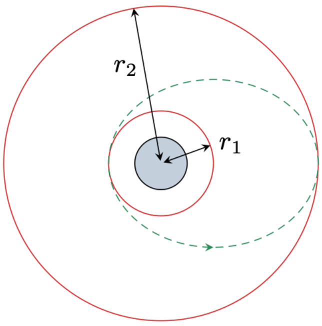
6. En utilisant une méthode énergétique, établir une équation différentielle vérifiée par r.

On considère, qu'à chaque révolution, le satellite subit une diminution d'altitude de 1 m.

7. Déterminer la valeur du coefficient α.

8. Quelle est la perte d'altitude du satellite au bout de dix ans ?

Exercice 42 : orbite de Hohmann *(Oral CCINP MP)*



On s'intéresse à la mise en orbite d'un satellite géostationnaire de masse m sur son orbite de rayon $r_2 = 42{,}2 \cdot 10^3$ km. Dans un premier temps, un lanceur dépose le satellite sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7{,}5 \cdot 10^3$ km. Un moteur lui apporte un surcroît d'énergie pour le faire passer sur une orbite de transfert elliptique, appelée orbite de Hohmann, dont le périgée est à la distance r_1 et l'apogée à la distance r_2 du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, le moteur est rallumé pour permettre au satellite de passer sur l'orbite finale.

Les durées d'allumage du moteur étant très brèves par rapport à la période orbitale, on considérera les changements de vitesse du satellite instantanés. On notera « 1 » les grandeurs relatives à l'orbite provisoire, « prime » celles relatives à l'orbote de Hohmann et « 2 » celles de l'orbite géostationnaire.

1 - Établir l'expression de la vitesse v du satellite sur l'orbite circulaire de rayon r. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur cette orbite.

2 - On admet que l'expression se généralise au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon par le demi grand-axe de l'ellipse. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_{\mathrm{m}1}$, E'_{m} et $E_{\mathrm{m}2}$ du satellite sur les trois orbites. En déduire le travail W_1 que doit fournir le moteur du satellite pour passer de l'orbite provisoire à l'orbite de transfert puis le travail W_2 pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire.

3 - Calculer la vitesse v'_1 du satellite juste après son passage sur l'orbite de transfert.

4 - Montrer que le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une quantité conservée sur n'importe quelle orbite.

5 - En déduire la vitesse v'_2 à l'apogée de l'orbite de transfert en fonction de v'_1, r_1 et r_2.

Exercices de thermodynamique

Exercice 43 : Chauffage par effet Joule *(Oral CCINP MP)*

On considère un cylindre horizontal, séparé en deux compartiments (notés A et B, de volumes respectifs V_A et V_B, de températures respectives T_A et T_B et de pressions respectives P_A et P_B) par un piston vertical, adiabatique et pouvant se déplacer sans frottement. Les parois du cylindre sont supposées rigides et parfaitement calorifugées.

Chaque compartiment contient la même quantité d'un gaz parfait diatomique, initialement dans chaque compartiment à la pression $P_0 = 1.00$ bar, la température $T_0 = 300K$ et occupant un volume $V_0 = 1.000L$. Le gaz diatomique est caractérisé par un coefficient $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = \frac{7}{5}$.

Un générateur électrique fournit une énergie au gaz A par l'intermédiaire d'un conducteur ohmique, de résistance $R_0 = 10\Omega$ et de capacité thermique négligeable. Ce conducteur est parcouru par un courant d'intensité $I = 1A$, pendant une durée t au bout de laquelle le volume de gaz A atteint la valeur $V_{Af} = 1.100L$.

La transformation couplée subie par le gaz B est supposée **réversible**.
L'état final de cette évolution est défini par les valeurs V_{Af}, V_{Bf}, P_{Af}, P_{Bf}, T_{Af} et T_{Bf}.

1. Calculer la pression finale dans chacun des compartiments.
2. Déterminer la température finale dans chacun des compartiments.
3. Calculer le travail reçu par le gaz du compartiment B.
4. Déterminer la durée t.
5. Calculer les variations d'entropie ΔS_A et ΔS_B des gaz dans les compartiments A et B au cours de cette transformation. Conclure.

Exercice 44 : Pompe à chaleur *(Oral CCINP MP)*

On considère une pompe à chaleur domestique fonctionnant entre deux sources de température T_c et T_f. On note Q_c et Q_f l'énergie thermique reçue par le fluide caloporteur de la PAC en provenance de chacune des sources.

1. Expliquer le fonctionnement d'une pompe à chaleur ditherme, préciser le sens des échanges thermiques qui ont lieu.
2. On suppose le fonctionnement réversible. Exprimer Q_C en fonction de Q_f, T_c et T_f.
3. Calculer l'efficacité de cette pompe à chaleur en fonction de T_f et T_c.
4. La pièce à chauffer possède une mauvaise isolation et perd une puissance thermique de $\Phi = K(T_c - T_f)$. Exprimer Q_c en fonction de K, T_c, T_f et τ le temps écoulé en régime stationnaire.
5. Déterminer la puissance électrique consommée par la PAC pour maintenir la pièce à une température constante. Faire l'application numérique pour $T_f = 278$ K, $T_c = 293$ K et $K = 50$ W.K^{-1}.

Exercice 45 : Calorimétrie *(Mines-Telecom)*

Dans une enceinte dont les parois sont calorifugées, on introduit à la pression atmosphérique une masse $m_1 = 0,010$ kg de glace à $\theta_1 = -8°C$ et une masse $m_2 = 0,10$ kg d'eau liquide à $\theta_2 = 15°C$.

1. Décrire l'état final.
2. Même question avec une masse $m_1 = 0,10$ kg de glace à $\theta_1 = -8°$ C.

Données : enthalpie massique de fusion à 0° C : $L_{fus}(273) = 334\ kJ.kg^{-1}$; Capacité thermique masse de la glace : $c_1 = 2,1 kJ.K^{-1}.kg^{-1}$; capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_2 = 4,2\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.

Exercice 46 : Cylindre rempli d'eau *(Type CCINP MP)*

Donnée : constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

On considère un cylindre vertical de hauteur $H = 1,00$ m et de section $S = 1,00\ m^2$, indéformable, clos hermétiquement. Il contient initialement une hauteur $h = 10$ cm d'eau liquide au fond, surmontée uniquement de sa vapeur saturante. L'ensemble est en équilibre à la température $\theta_1 = 100°C$. On porte alors la température à $\theta_2 = 200°$ C. Dans cet exercice, nous ferons les hypothèses suivantes :

- La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait.
- La pression de vapeur saturante de l'eau peut être donnée, sur l'intervalle de température $[100°C, 200°C]$ par la formule : $P_{Sat} = \left(\frac{\theta}{100}\right)^4$ où P_{Sat} est en bar et θ en $°C$.
- On néglige la dilatation de l'eau liquide au cours du chauffage. La masse volumique de l'eau liquide sera prise égale à $\rho_L = 1000\ kg.m^{-3}$.

1. Estimer la masse d'eau présente dans le cylindre.
2. Calculer alors la hauteur d'eau liquide à la température θ_2.
3. Donner l'allure du diagramme (P,T) de l'eau puis représenter l'évolution du système étudié dans cette partie. On représentera notamment le point de départ, le point d'arrivée ainsi que le chemin suivi.

On part maintenant d'une hauteur d'eau initiale de $h = 5$ mm. Dans toute la suite, on gardera cette hauteur h initiale.

4. Calculer la nouvelle masse d'eau m_{eau} présente dans le cylindre.
5. Calculer la pression finale.
6. Déterminer la température θ_F pour laquelle la dernière goutte d'eau liquide a disparu.
7. Représenter, sur un diagramme de Clapeyron (P, v) de l'eau, le chemin suivi entre θ_1 et θ_2.

Exercice 47 : Congélation d'une bouteille d'eau *(Oral CCINP)*

On place une bouteille de 1,5 L d'eau au congélateur. La température du congélateur est de $-18\,°\mathrm{C}$, celle de la pièce dans laquelle il se trouve de $20\,°\mathrm{C}$. On note $\mathcal{P} = 250\,\mathrm{W}$ la puissance électrique consommée par le congélateur.

Données :
▷ capacité thermique massique de l'eau solide et liquide : $c_\mathrm{s} = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et $c_\mathrm{l} = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$;
▷ chaleur latente de fusion : $\ell_\mathrm{fus} = 3{,}3\cdot 10^2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

1 - En supposant que le congélateur évolue à 70 % de son efficacité maximale, déterminer la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{th}$ qu'il prélève à l'eau.

2 - Représenter la courbe de la température dans la bouteille au cours du temps.

3 - Déterminer la durée nécessaire pour que la température de l'eau dans la bouteille atteigne celle du congélateur.

Exercice 48 : Moteur à propulsion *(Oral CCINP PSI)*

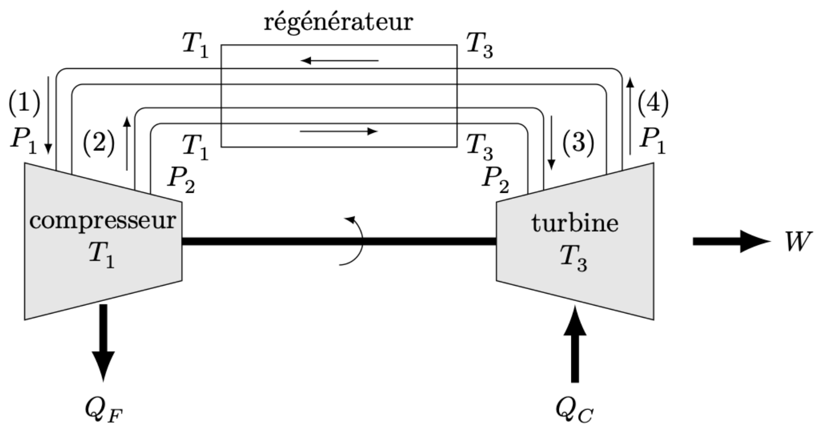
Le cycle d'Ericsson, utilisé dans des moteurs à air destinés à la propulsion navale est constitué ainsi :

- Étape $(1 \to 2)$: compression isotherme dans le compresseur (Cp). L'air est maintenu à la température T_1 dans le compresseur où il passe de l'état (1) (P_1, T_1) à l'état (2) (P_2, T_1) avec $P_2 > P_1$. Ce faisant, il cède à l'extérieur le transfert thermique Q_F.

- Étape $(2 \to 3)$: l'air pénètre ensuite dans le régénérateur où il passe de l'état (2) (P_2, T_1) à l'état (3) (P_2, T_3), chauffé de manière isobare par une contre-circulation d'air chaud (cf. étape $4 \to 1$) provenant de la turbine (ce chauffage ne coute donc rien).

- Étape $(3 \to 4)$: détente isotherme dans la turbine (Tb). L'air est maintenu à la température T_3, bien que détendu dans la turbine. Il y reçoit donc un transfert thermique Q_C (couteux, celui-là). Il passe de l'état (3) (P_2, T_3) à l'état (4) (P_1, T_3).

- Étape $(4 \to 1)$: l'air revient à l'état l'état (1) (P_1, T_1) après passage dans le régénérateur où il est refroidi, en réchauffant le flux l'air qui y circule en sens inverse (cf. étape $2 \to 3$).



On supposera que le cycle est mécaniquement réversible. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1{,}4$.

1. Représenter le cycle dans un diagramme de Watt (P, V) en précisant son sens de parcours.

2. Définir et exprimer le rendement en fonction de T_1 et T_3. Commenter le résultat obtenu.

3. Que peut-on en déduire quant à l'entropie créée au cours du cycle ? Est-ce surprenant ?

4. La source froide est l'océan, de température $T_1 = 7\,°\mathrm{C}$, la chaudière du navire se comporte comme une source chaude de température $T_3 = 627\,°\mathrm{C}$. Le moteur développe une puissance de 500 kW. Quelle est la puissance fournie par la chaudière ?

Problème 49 : Montgolfière *(Oral CCINP)*

Un ballon de volume V est rempli de dihydrogène ($M = 2,0$ g.mol^{-1}). Déterminer le volume V nécessaire pour entraîner l'ascension d'une nacelle de masse $m = 100$ kg et d'une famille de 4 personnes, le dihydrogène étant chauffé à 400K.

Exercice 50 : Expérience de Rüchart *(Oral CCINP MP)*

Un flacon de volume V_0 contenant de l'air, modélisé comme un gaz parfait, est fermé par un tube de faible section S. On lâche dans le tube, sans vitesse initiale, une bille de masse m de même diamètre que le tube. À l'intérieur du flacon, on dispose un capteur de pression qui délivre une tension proportionnelle à la pression. L'évolution de la tension au cours du temps est reproduite figure 2.

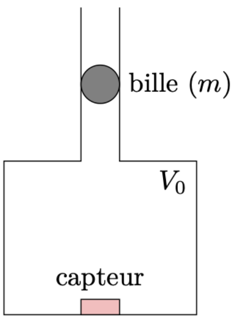
1 - Expliquer l'allure de la courbe. Justifier que les frottements sont faibles. Calculer le coefficient d'étalonnage du capteur.

2 - Justifier que la pression tend vers une valeur finale d'équilibre. La retrouver par le calcul.

3 - Calculer le temps caractéristique de la diffusion thermique au travers des parois du flacon. Conclure : justifier que l'on peut considérer l'évolution du gaz comme isentropique.

4 - Montrer que $P - P_{éq}$ varie linéairement en fonction de la position z de la bille dans le tube. Exprimer le coefficient de linéarité en fonction de $P_{éq}$, V_0, γ et S.

5 - Établir l'équation différentielle vérifiée par z et ensuite celle vérifiée par P.



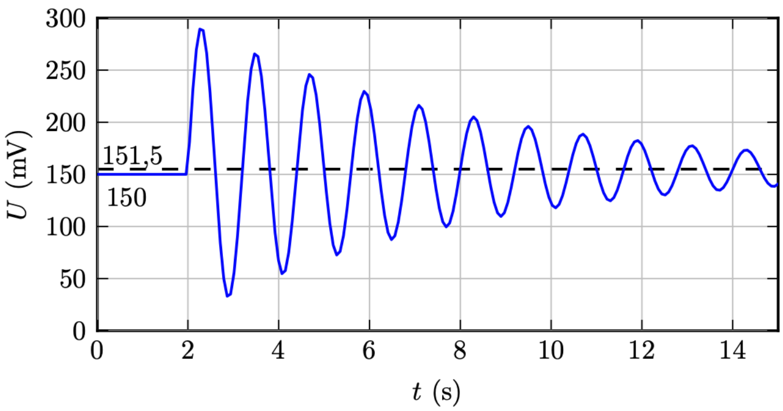


Figure 2 – **Expérience de Rüchardt.**

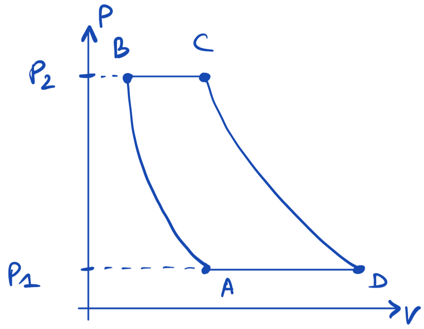
6 - Quelles sont les solutions possibles pour P ? Conclure : en déduire la valeur de γ.

Données :

- ▷ Volume du flacon $V_0 = 10\,\mathrm{L}$;
- ▷ Section du tube $S = 2\,\mathrm{cm}^2$;
- ▷ Épaisseur du flacon $e = 15\,\mathrm{mm}$;
- ▷ Masse de la bille $m = 20\,\mathrm{g}$;
- ▷ Coefficient de diffusion thermique dans le verre : $D = 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 51 : Cycle de Brayton-Joule *(Oral Mines-Telecom)*

Un cycle de Brayton-Joule est formé de deux adiabatiques réversibles et de deux isobares alternées, représentées sur le diagramme de Watt (P,V) ci-contre. On envisage de faire fonctionner une machine thermique avec du gaz parfait de coefficient adiabatique γ en suivant ce cycle. On pose $a = \frac{P_2}{P_1}$ et on prendra $a = 8$ et $\gamma = 1,4$.



1. Dans un premier temps, on veut fabriquer un moteur fonctionnant sur ce cycle. Calculer le rendement en fonction de a et γ. Faire l'application numérique.
2. Même question pour un fonctionnement en pompe à chaleur sur ce cycle.

Problème 52 : Centrale électrique *(Oral CCINP)*

Une centrale électrique est décrite comme une machine thermique fonctionnant entre une source chaude à la température $T_C = 327°C$ du foyer où s'effectue la combustion, et une source froide (l'eau d'un fleuve) à la température $T_F = 27°C$. La centrale fournit à un alternateur une puissance $P = 900MW$ afin d'alimenter une région de France aux températures moyennes annuelles plutôt chaudes. Le rendement de la centrale est égal à 60 % du rendement maximal atteignable.

Déterminer le débit volumique minimal du fleuve pour que l'échauffement de l'eau du fleuve de dépasse pas $2°C$ en régime permanent.

Exercice 53 : Machine frigorifique *(Oral CCINP MP)*

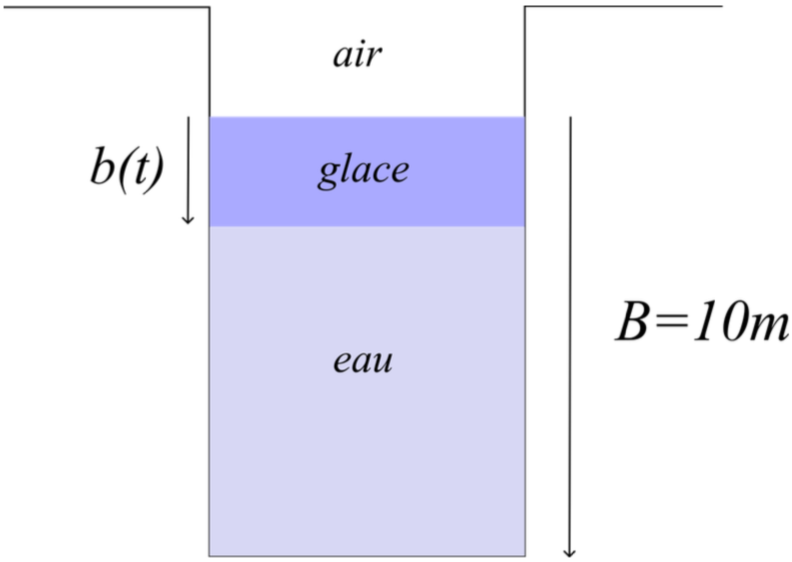
Annexe : Diagramme enthalpique fluide R134a

Du fluide réfrigérant R134a subit le cycle thermodynamique suivant. À la sortie du condenseur, le fluide est dans l'état, noté (1), de liquide saturant à la température $T = 40\,°C$. Il subit alors une détente isenthalpique dans un détendeur qui abaisse sa pression de 8 bar et l'amène à l'état noté (2). Il traverse, sans chute de pression, un évaporateur dans lequel il reçoit une grande quantité d'énergie, suffisante pour l'amener à sa température de vapeur saturante augmentée de $+10\,°C$ qui représente l'état (3). La vapeur sèche est alors comprimée de façon isentropique jusqu'à atteindre l'isobare de départ au point (4).

1. Représenter et nommer les deux parties de la courbe de saturation ainsi que le point critique sur le diagramme. Définir le point critique et donner sa pression et sa température.
2. Mentionner la phase stable associée à chaque domaine.
3. Déterminer à l'aide du diagramme la capacité thermique massique du liquide ainsi que la capacité thermique massique du gaz dans la zone où il peut être considéré parfait.
4. Placer les points (1) à (4) sur le diagramme enthalpique et représenter le cycle. S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ?
5. Quelle est la température des points (2), (3) et (4) ?
6. Déterminer le titre massique en vapeur au point 2.
7. Rappeler le premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire.
8. Appliquer ce premier principe pour déterminer le transfert thermique reçu par le fluide au contact de l'évaporateur, le transfert thermique reçu par le fluide au contact du condenseur et le travail reçu au contact du compresseur. Commenter les signes.
9. En déduire l'efficacité de cette machine frigorifique.
10. Comparer cette efficacité à celle d'un cycle de Carnot avec $T_C = T_1$ et $T_F = T_2$. Commenter.

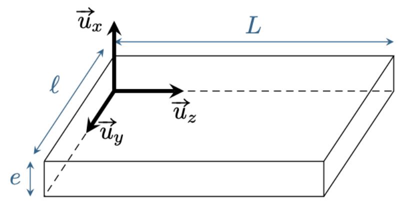
Problème 54 : Gel d'une colonne d'eau *(Oral Mines-Telecom)*

Une colonne d'eau, de profondeur B de température $T_{\text{eau}} = 0°\text{C}$ est en contact avec l'air, de température $T_{\text{air}} = -10°\text{C}$. Une couche de glace se forme, on note $b(t)$ l'épaisseur de cette couche de glace en fonction du temps.



Déterminer la durée τ au bout de laquelle toute l'eau est transformée en glace.
Données : $T_{\text{eau}} = 0°\text{C}$, $T_{\text{glace}} = -10°\text{C}$, $\lambda_g = 2,1\ \text{W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$ et $\Delta_{\text{fus}}h = 330\ \text{kJ.kg}^{-1}$.

Exercice 55 : Température dans une plaque conductrice *(CCINP MP)*



On étudie une plaque d'épaisseur e très inférieure à sa longueur L et sa largeur ℓ. Elle est faite dans un métal de conductivité électrique σ et de conductivité thermique λ. Un courant de densité uniforme $\vec{j} = J_0 \vec{u}_z$ parcourt la plaque.

1 - Quelle est l'intensité du courant qui traverse la plaque ? Quelle puissance volumique est transmise à la plaque ?

On modélise les transferts thermiques avec l'air par la loi de Newton : en valeur absolue, la plaque échange avec l'air une puissance surfacique

$$P_{\text{N}} = h\,|T_0 - T_{\text{air}}|\ ,$$

avec T_0 la température de surface de la plaque.

2 - Déterminer T_0 en régime stationnaire.

3 - Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{J_0^{\,2}}{\lambda\sigma}\,.$$

La résolution de cette équation, non demandée, donne une loi de température

$$T(x) = \frac{J_0^{\,2}}{\lambda\sigma}x(e-x) + \frac{J_0^{\,2}e}{2h\sigma} + T_{\text{air}}\,.$$

4 - Commenter qualitativement l'expression. Représenter le profil de température pour x allant de $-e$ à $2e$.

5 - Exprimer la puissance thermique qui traverse une section de normale $\vec{u}_x$.

Exercice 56 : Four industriel *(Oral banque PT)*

Cet exercice s'intéresse au chauffage d'une pièce dans un four industriel. La pièce est cubique de côté a, faite d'un matériau de capacité thermique massique c_p, de conductivité thermique λ et de masse volumique ρ. La pièce est posée sur un tapis roulant de longueur L reliant les deux extrémités du four avançant à vitesse constante V_0. La température de l'air à l'intérieur du four est uniformément égale à T_a. Dans le four, la pièce reçoit un flux surfacique $P_s = h(T_a - T)$ avec h une constante positive. L'objectif est de déterminer la vitesse V_0 du tapis pour que la pièce atteigne la température de consigne T_c.

1 - On suppose que la température de la pièce est uniforme. Déterminer $T(t)$.

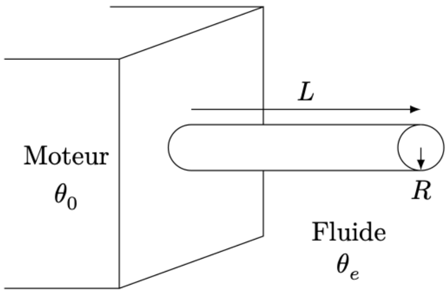
2 - En déduire le temps nécessaire pour atteindre la température de consigne puis la vitesse V_0 en fonction de a.

3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension. En déduire un temps caractéristique de diffusion.

4 - En déduire une condition sur a impliquant λ, h et les températures pour que la température dans la pièce soit uniforme en sortie du four.

Problème 57 : Nombre d'ailettes *(Oral Centrale PC)*

On souhaite refroidir un moteur en fixant sur lui un certain nombre d'ailettes de forme cylindrique (rayon R, longueur L), de conductivité thermique λ. Chaque ailette est au contact d'un fluide à la température $\theta_e < \theta_0$ où θ_0 est la température du moteur.



Au niveau de la surface de contact avec le fluide, les pertes thermiques par unité de temps et de surface s'écrivent $\delta Q = h(T_S – T_e)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$ avec h constant (relation de Newton).

1. Combien doit-on placer d'ailettes sur le moteur sachant que le flux thermique à évacuer vaut $\Phi_T = 40$ W ?

2. Comment améliorer le système ?

Données : $\lambda = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $h = 100\ W.m^{-2}.K^{-1}$, $R = 2$ mm, $L = 15$ cm, $\theta_0 = 82°C$ et $\theta_e = 22°C$.

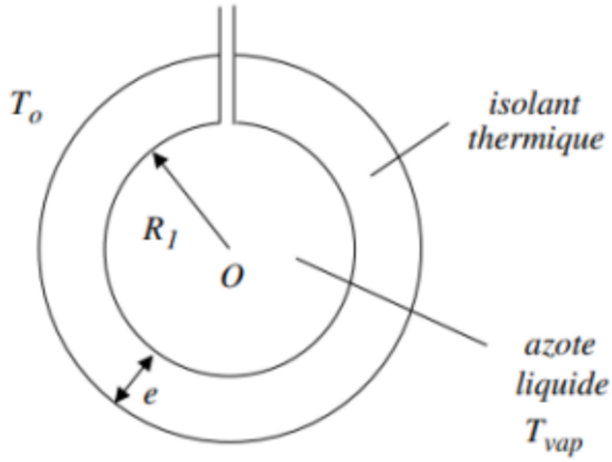
Problème 58 : Température d'un câble électrique *(Oral Mines-Ponts)*

Un câble électrique est constitué d'un fil de cuivre de rayon R_1 (conductivité électrique γ, conductivité thermique λ_1 entourée d'une gaine isolante de rayon R_2 (conductivité thermique λ_2). Ce fil est parcouru par un courant I et placé dans un milieu à la température T_e. On considère le problème à symétrie cylindrique, en régime permanent. De plus, la température est continue en $r = R_1$. Par contre, en $r = R_2$, des transferts thermiques conducto-convectifs ont lieu à la surface de la gaine ; leur puissance surfacique P_S est donnée (en valeur algébrique) selon la loi de Newton : $P_S = h(T(R_2) - T_e)$.

Déterminer la température T_0 au centre du fil et montrer qu'il existe une valeur de R_2 qui minimise cette température.

Problème 59 : évaporation du diazote *(Oral Mines-Ponts)*

On considère un réservoir d'azote de forme sphérique de rayon intérieur $R = 10$ cm entouré par un isolant thermique en polystyrène de conductivité thermique λ sous forme d'une coquille sphérique de rayons intérieur R_1 et extérieur $R_1 + e$ (avec $e = 5cm$). Le réservoir est ouvert vers l'extérieur par un tube très fin qui permet l'évaporation de l'azote.
On note l_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'azote liquide. L'azote liquide est supposé être à la température de vaporisation T_{vap}.



Déterminer la masse de diazote qui s'évapore par unité de temps. Estimer le temps que va mettre le réservoir à se vider.

Données :

- Température de vaporisation du diazote : $T_{vap} = 77$ K et température extérieure $T_{ext} = 300$ K.
- Masse volumique du diazote : $\rho = 808$ kg.m^{-3}.
- Enthalpie massique de vaporisation du diazote : $l_v = 200$ J.g^{-1}.
- Conductivité thermique du polystyrène : $\lambda = 3,5 \times 10^{-2}$ W.K^{-1}.m^{-1}.

Problème 60 : Utilisation des supraconducteurs *(CCINP)*

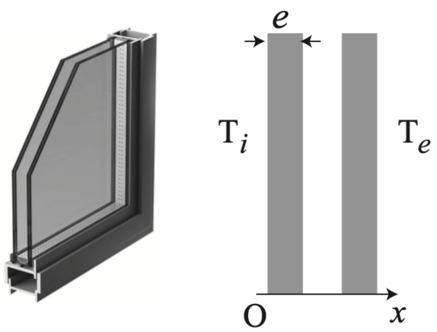
Un train à grande vitesse à sustentation électrodynamique (SCMaglev) est actuellement développé au Japon. Dans le système à sustentation électrodynamique (SCMaglev), un champ magnétique est créé par des bobines placées dans le train en mouvement. Le constructeur indique que pour faire léviter le train le champ magnétique produit doit dépasser la valeur de 4 teslas. Un dispositif de refroidissement à eau (écoulement parallèle à l'axe des bobines) permet de refroidir les bobines.

Les bobines fondent-elles dans les conditions indiquées ?

Données :

- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}.
- **Caractéristiques du solénoïde :** longueur $l = 0,50$ m ; diamètre $D = 0,20$ m ; diamètre du fil : $d = 2,0$ mm et nombre de spires : $N = 10000$
- Données sur le cuivre :
  - masse volumique : $\mu = 8,96 \times 10^3$ kg.m^{-3}
  - capacité thermique massique : $c = 386$ J.K^{-1}.kg^{-1}
  - conductivité électrique : $\gamma = 6 \times 10^7$ S.m^{-1}
  - température de fusion : $T = 1356$ K
- Modèle du transfert conducto-convectif : la puissance thermique échangée vérifie $|P| = hS\Delta T$ où S est la surface d'échange, ΔT la différence de température entre la surface du solide et celle du fluide loin du solide et h le coefficient de transfert conducto-convectif avec $h = 100$ W.K^{-1}.m^{-2}.

Exercice 61 : Double vitrage *(Oral CCINP)*



On ne considère que des régimes permanents, indépendant, du temps. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface $S = 1\ m^2$, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

1 - Rappeler la loi de Fourier et établir l'équation différentielle vérifiée par la température.

2 - La paroi est une vitre simple d'épaisseur e. Calculer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée et évaluer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ, S, e, T_i et T_e

3 - La paroi est maintenant un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e d'air. À quelle condition sur e la convection est négligeable ?

4 - L'air est de conductivité thermique λ'. Évaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce.

5 - Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.

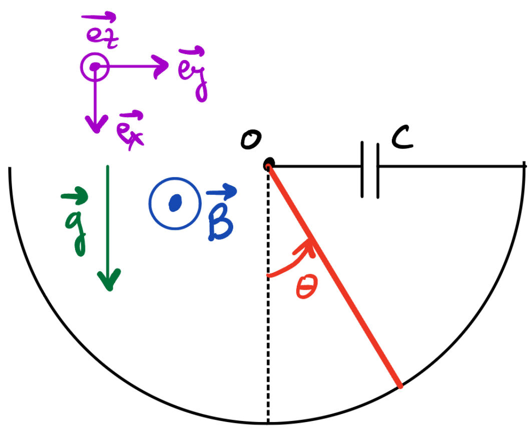
6 - Calculer le rapport Φ_2/Φ_1, conclure.

Données : $T_e = 270$ K , $T_i = 292$ K , $e = 3$ mm.

- conductivité thermique du verre : $\lambda = 1{,}2\ W.m^{-1}.K^{-1}$;
- conductivité thermique de l'air : $\lambda' = 2{,}5.10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}$;

Exercices d'induction

Exercice 62 : Induction *(CCINP MP)*

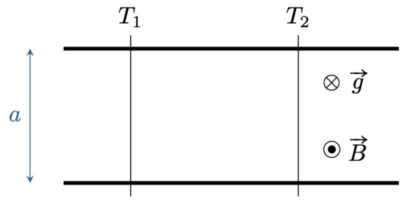


Soit une tige conductrice de masse m et de longueur a glissant sur une surface cylindrique à une de ses extrémités et accrochée à une barre rectiligne constituant le centre du cylindre à son autre extrémité. La surface cylindrique et la barre centrale, toutes deux conductrices sont reliées par un condensateur qui ferme le circuit. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent $\overrightarrow{B}$ et dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

Dans un premier temps, on néglige les frottements et la résistance électrique des matériaux. Le moment d'inertie de la tige pour la rotation autour de l'axe Oz vaut $I = \frac{1}{3}ma^2$.

1. Décrire qualitativement le fonctionnement du système. Comment intervient l'induction ?
2. Faire un bilan des actions s'exerçant sur la tige et donner leur point d'application.
3. Déterminer l'équation du mouvement et déterminer la période des oscillations dans l'hypothèse de petites oscillations autour de $\theta = 0$. Commenter.
4. Que se passe-t-il si on prend en compte les frottements et la résistance électrique ?

Exercice 63 : Rails de Laplace couplés *(Oral CCINP MP)*



On considère deux barreaux T_1 et T_2 de résistance R et de masse m posés sur un rail et plongés dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

1 - Établir les équations couplées vérifiées par les vitesses v_1 et v_2. On fera apparaître $\tau = mR/(aB)^2$.

2 - Donner les expressions de $v_1(t)$ et de $v_2(t)$ en supposant que l'on donne au barreau T_1 une vitesse initiale v_0.

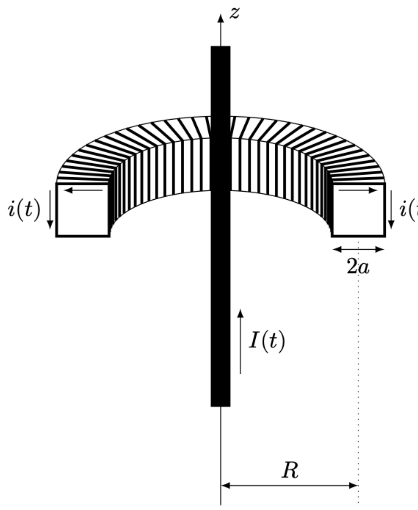
3 - Même question en supposant $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

4 - Vérifier que la conversion d'énergie est parfaite.

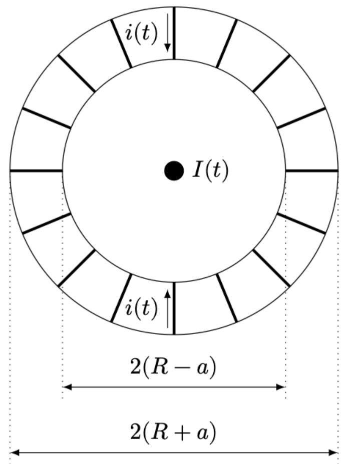
Exercice 64 : Pince ampèremétrique *(Oral Centrale)*

Une bobine torique de section carrée de côté $2a$, de rayon moyen R, comportant N spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable. La bobine torique a une résistance équivalente notée $\mathcal{R}$.

La bobine enserre un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique ; le conducteur est parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Ce courant variable induit un courant $i(t)$ dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe Oz.



Vue en coupe



Vue de dessus

1. Calculer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobine}}(r, \theta, z, t)$ créé par la bobine en tout point, en fonction, notamment, de N, $i(t)$ et $\mathcal{R}$.

2. Calculer, de même, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{fil}}(r, \theta, z, t)$ créé par le fil en tout point, en fonction, notamment, de $I(t)$.

3. Donner la définition de l'inductance mutuelle M entre deux circuits et de l'inductance propre L d'un circuit. On donne ici (*calcul non demandé*) l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \qquad M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)$$

   Commenter ces expressions.

4. Calculer l'intensité complexe $\underline{i}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$).

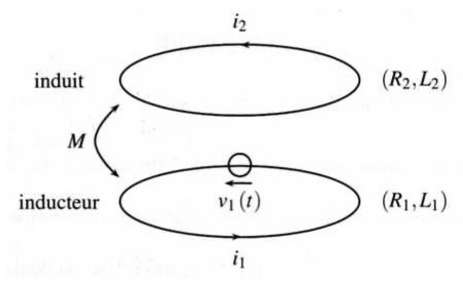
5. Que devient le rapport $\left|\frac{\underline{i}}{\underline{I}}\right|$ à haute fréquence ? Préciser le sens de l'expression « haute fréquence ».

   On donne $N = 10\,000$; $R = 6$ cm ; $a = 1$ cm ; $f = 50$ Hz ; $\mathcal{R} = 0{,}2\,\Omega$.

   Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ? Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?

Exercice 65 : Table à induction *(Oral CCINP)*

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.
Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé l'inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle même, située au fond d'une casserole.



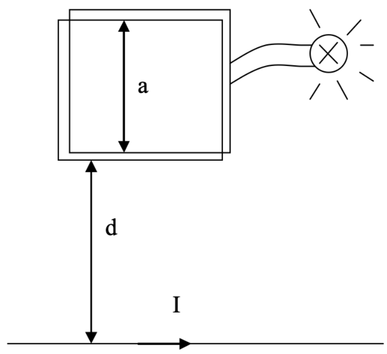
L'inducteur, de 5 cm de rayon, comporte 20 spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 1,8 \times 10^{-2}$ Ω et d'autoinductance $L_1 = 30$ μH.
La plaque de résistance $R_2 = 8,3$ mΩ et d'autoinductance $L_2 = 0,24$ μH, nommée l'induit, est assimilable à une spire unique refermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$ de valeur efficace de 24 volts à la fréquence de 25 kHz. L'ensemble plaque (induit) - inducteur se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M.

1. Ecrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre i_1 et i_2).
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}$.
3. En déduire l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe du système : $\underline{Z_e} = \frac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}$.
4. On choisit ω telle que $R_1 << L_1\omega$ et $R_2 << L_2\omega$. Simplifier les deux expressions littérales précédentes, puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2,0$ μH.

Problème 66 : allumage d'une lampe *(Mines-Telecom)*

Une ligne à haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $I = 1,0$ kA. On approche une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 1,0$ m comme indiqué sur le schéma (son plan moyen contient le fil, placé parallèlement à deux de ses côtés).

Cette bobine de résistance négligeable est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à $1,5$ V.



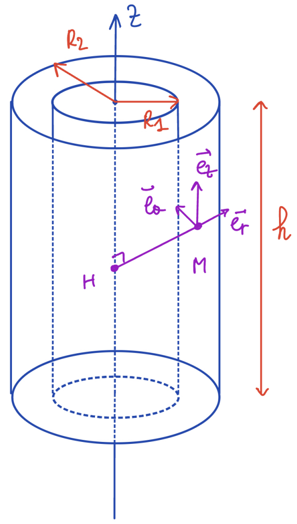
Déterminer le nombre de spires nécessaires pour que l'ampoule s'éclaire.

Exercices d'électromagnétisme

Exercice 67 : Condensateur cylindrique *(CCINP)*

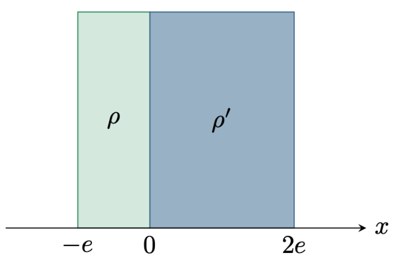
1. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss. En déduire l'expression du théorème de Gauss relatif au flux sortant d'un champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int}.

On considère un condensateur cylindrique à air formé de deux armatures coaxiales de hauteur h et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$. Les cylindres sont chargés uniformément en surface avec des densités surfacique de charge σ_1 et σ_2. L'armature interne porte la charge électrique Q et l'armature externe la charge $-Q$. Les armatures sont donc en influence totale. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2.



2. Déterminer les expressions de σ_1 et σ_2 en fonction de h et de R_1 ou R_2. Quel est le lien entre σ_1 et σ_2 ?
3. Soit un point M n'importe où dans l'espace. On travaille en coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Déterminer par des considérations de symétrie par quel vecteur est porté le champ électrique et de quelle variable il dépend.
4. En déduire, par application du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique en tout point M de l'espace. On distinguera les cas $r < R_1$, $R_2 > r > R_1$ et $r > R_2$.
5. Représenter $||\vec{E}||$ en fonction de r.
6. Calculer la différence de potentiels $V_1 - V_2$ en calculant la circulation du champ $\vec{E}$ entre les deux armatures.
7. En déduire la capacité du condensateur en fonction de h, ϵ_0, R_1 et R_2. Faire l'application numérique pour $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20$ cm et $h = 50$ cm.
8. Que devient l'expression de C si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e << R_1$?
9. Pour quelle valeur de r la norme du champ électrique est-elle maximale ? On souhaite que cette valeur maximale ne dépasse pas la valeur E_0 afin d'éviter un claquage du condensateur. Calculer alors la valeur maximale V_{max} de la différence de potentiel pouvant être appliquée entre les armatures en fonction de E_0, R_1 et R_2. Faire l'application numérique pour $E_0 = 3MV.m^{-1}$.

Exercice 68 : Plaques épaisses chargées *(Oral Banque PT)*



La distribution de charge ci-contre est supposée infinie dans toutes les directions excepté selon x. Le champ est supposé nul en dehors des plaques. On rappelle qu'il est partout continu, puisque la distribution ne présente pas de charges surfaciques. On pose $V(x=0) = 0$.

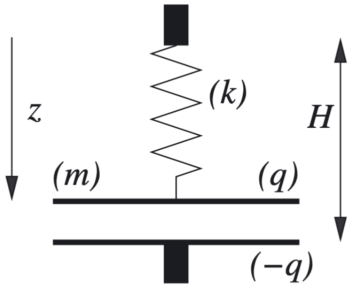
1 - Déterminer ρ' en fonction de ρ pour assurer la neutralité électrique.

2 - Sans utiliser le théorème de Gauss, déterminer $\vec{E}$ au sein de la distribution. Tracer $||\vec{E}|| = f(x)$.

3 - Déterminer V en tout point de l'espace. Tracer $V = g(x)$.

Problème 69 : Position d'équilibre d'une plaque chargée *(Oral Mines Telecom)*

Dans le dispositif suivant, la plaque inférieure possède une charge $-q$ et est fixe, la plaque supérieure possède une charge $+q$ et est mobile en translation sur l'axe z, sa masse est m et le ressort est de constante de raideur k, de longueur à vide l_0. La surface commune des plaques est S et on pourra supposer qu'elles sont très proches l'une de l'autre.



Déterminer la valeur de z à l'équilibre de la plaque.

Exercice 70 : Sphère chargée *(Oral Mines-Telecom)*

On considère une sphère chargée uniformément en surface (de charge totale Q).

1. Déterminer le champ électrique créé en tout point de l'espace.
2. Vérifier la compatibilité du champ trouvé à la question précédente avec la relation de passage du champ électrique : $\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{12}}$.
3. Déterminer le potentiel électrostatique créé en tout point de l'espace. On prendra la référence des potentiels à l'infini.
4. Démontrer que les surfaces équipotentielles pour $r > R$ sont des sphères concentriques.
5. Représenter quelques lignes de champ et quelques équipotentielles pour $r > R$.

Exercice 71 : Champ électrique *(Oral CCINP)*

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi : $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ où ρ_0 est une constante positive.

1. Déterminer la charge totale Q du noyau.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point extérieur à la sphère.
3. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point intérieur à la sphère.
4. Exprimer le potentiel V créé par le noyau lorsque $r > a$, on prendra le potentiel nul à l'infini.
5. Exprimer le potentiel V créé par le noyau lorsque $r < a$.

Exercice 72 : Fil conducteur creux *(Oral CCINP MP)*

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe $\vec{u}_z$ est parcouru par un courant de densité $j\vec{u}_z$ uniforme.

1 - Déterminer le champ $\vec{B}_0$ en tout point M de l'espace.

2 - Exprimer $\vec{B}_0$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$.

On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à j.

3 - Calculer le champ magnétique dans la cavité.

Exercice 73 : Dipôle électrostatique *(Oral CCINP)*

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en $x = 0$ et $x = e$. L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ϵ_0. On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées. On rappelle que pour un dipôle électrique rigide de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ placé dans un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$, l'énergie potentielle du dipôle s'écrit $E_P = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E}$ et le moment du couple subi par le dipôme s'écrit $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$.

1. Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.
2. On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J_{Oz} en un point O d'abscisse $x = \frac{e}{2}$. Il peut tourner autour de l'axe Oz grâce à une liaison pivot parfaite. Déterminer de deux manières différentes les positions d'équilibre.
3. Etudier par deux méthodes différentes la stabilité de l'équilibre.
4. Etablir par deux méthodes l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.
5. Justifier que le centre de masse du dipôle électrostatique ne se déplace pas dans le condensateur.

Exercice 74 : Magnétostatique *(CCINP)*

1. Enoncer l'équation de Maxwell-Ampère et la simplifier pour des champs statiques. En déduire l'expression du théorème d'Ampère relatif à la circulation d'un champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé C, orienté, et s'appuyant sur une surface S et au courant enlacé $I_{enlacé}$

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1 parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central.
On notera $\vec{e}_z$ le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des 2 conducteurs. Soit un point M situé à une distance r de l'axe du câble.

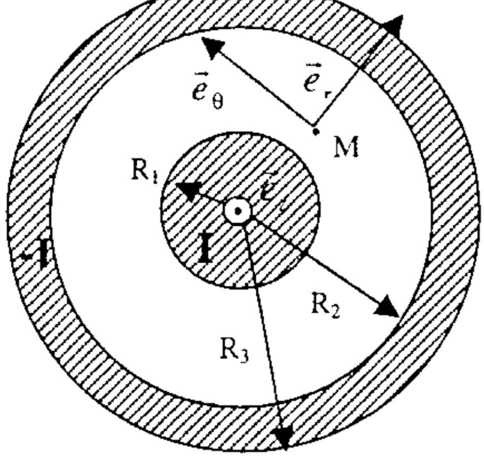
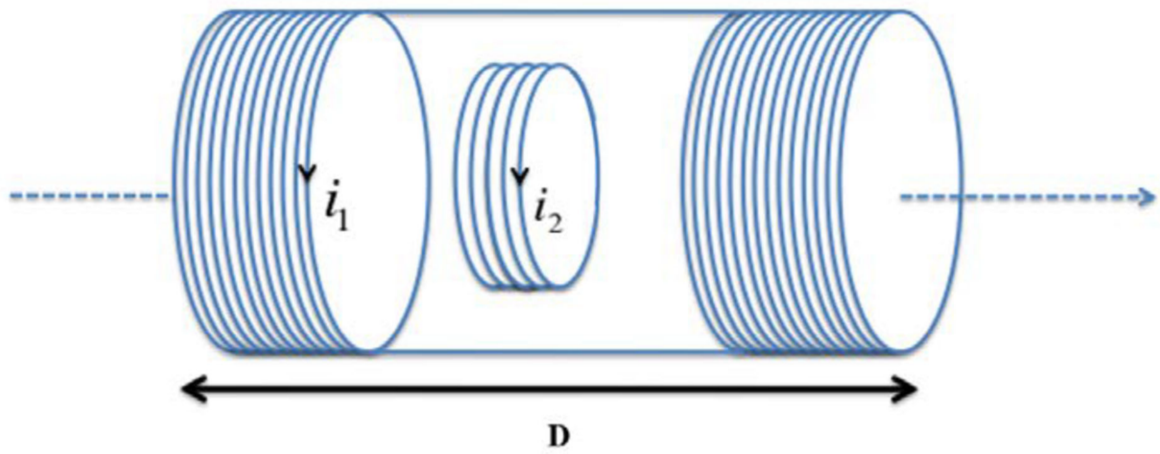


Figure 2

2. Montrer que le champ magnétique au point M se met sous la forme $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. Préciser la forme des lignes de champ.
3. Montrer que le champ magnétique au point M est nul si $r > R_3$. Expliquer alors l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.
4. Calculer les densités volumiques de courant $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction de I, R_1, R_2 et R_3.
5. En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.
6. Représenter le graphe de $||\vec{B}||$ en fonction de r.
7. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en fonction de $||\vec{B}||$ et μ_0.
8. On se limite à un tronçon de câble de hauteur h. Montrer que l'énergie magnétique, dans la zone $R_2 > r > R_1$ peut se mettre sous la forme $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$ où L sera exprimé en fonction de μ_0, h, R_1 et R_2.

Exercice 75 : Ecrantage d'un champ magnétique *(Oral CCINP)*

On considère deux solénoïdes X_1 et X_2 de même axe (Oz), de même longueur D = 1 m, de rayons respectifs r_1 = 10 cm et r_2 = 5,0 cm, d'inductances propres respectives L_1 et L_2, et de résistances respectives $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$. X_2 est placé entièrement à l'intérieur de X_1. Attention, la figure ci-dessous n'est pas à l'échelle et toutes les spires ne sont pas représentées par souci de clarté (en réalité, X_1 et X_2 sont de même longueur D et X_2 est entièrement inclus dans X_1).



Les deux solénoïdes possèdent respectivement N_1 = 3500 et N_2 = 2500 spires jointives enroulées dans le même sens. On appelle M le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes. On considère les deux solénoïdes comme infinis.
On alimente le solénoïde X_1 avec un courant d'intensité $i_1(t) = I_0\cos(\omega t)$.
Le solénoïde X_2 n'est pas alimenté et ses extrémités sont reliées par un fil sans résistance.

1) Justifier qu'il est légitime de faire l'hypothèse que les solénoïdes sont « infinis ».
2) Etablir les expressions de L_1, et L_2 en fonction de μ_0, D, r_1 et/ou r_2, N_1 et/ou N_2.
3) Exprimer le flux du champ magnétique créé par X_1 à travers X_2. En déduire l'expression du coefficient de mutuelle inductance M en fonction de μ_0, D, r_1 et/ou r_2, N_1 et/ou N_2.
4) Déterminer l'amplitude complexe $\underline{i}_2$ de l'intensité du courant circulant dans X_2. On mettra $\underline{i}_2$ sous la forme :

$$\underline{i_2} = \frac{H_0 j \dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \underline{i_1}$$

On donnera les expressions de H_0 et ω_c, dont on vérifiera avec attention l'homogénéité.

5) En déduire l'expression de l'amplitude complexe du champ magnétique $\underline{B}$ à l'intérieur du solénoïde X_2, notamment en fonction de $\underline{i_1}$.
6) Etudier la cohérence physique de l'expression de $\underline{B}$ dans les cas limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

<u>Données</u> : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ U.S.I

Problème 76 : Moment magnétique orbitalaire d'un électron *(Mines-Telecom)*

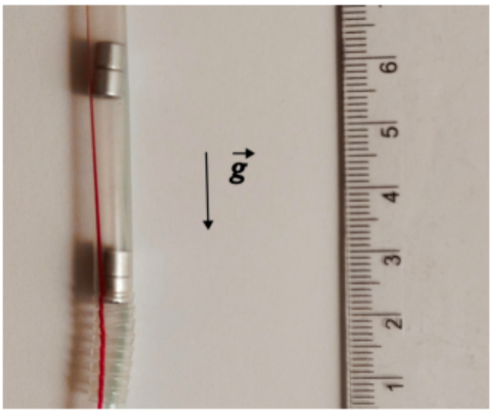
En adoptant le modèle planétaire de Bohr pour le mouvement des électrons autour d'un noyau, évaluer la norme du moment magnétique de l'électron dans un atome d'hydrogène.
On rappelle que dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron L autour du proton est quantifié : $L = n\hbar$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Données :
Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$, charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s

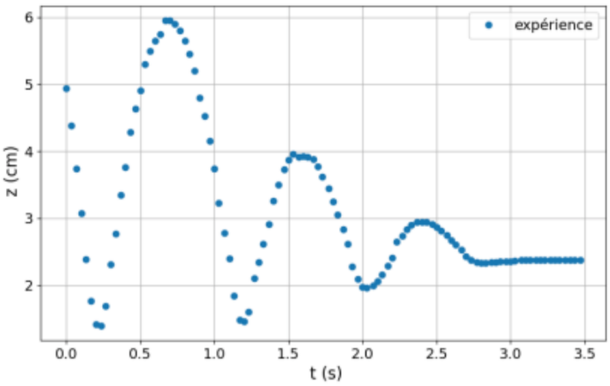
Exercice 77 : Dipôle magnétique *(Type Mines-Telecom)*

Un étudiant place deux aimants permanents en regard l'un de l'autre dans une paille et observe leur lévitation.

1. A partir du cliché ci-contre déterminer leur moment magnétique M.
2. Déterminer la période des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre et comparer au pointage vidéo ci-dessous.



Donnée : Champ magnétique créé par un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{M}$, centré en O, en un point M de l'espace tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ dans l'approximation dipolaire : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{M}.\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}\right]$. Masse d'un aimant : $m = 0,5$ g.



Exercice 78 : Bilan de puissance d'un conducteur *(Oral CCINP)*

Soit un conducteur cylindrique de rayon R, infini, d'axe Oz, soumis à un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{u}_z$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\vec{u}_z$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur l.

1. Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur dans le cas d'un matériau conducteur.
2. Déterminer l'expression de la résistance électrique $\tilde{R}$ de ce conducteur.
3. Calculer l'intensité traversant le cylindre. En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.
4. Déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre.
5. Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.
6. Effectuer un bilan de puissance et le commenter.

Exercice 79 : Onde plane *(oral CCINP)*

1 - Donner l'écriture complexe d'une onde plane progressive monochromatique.

2 - Écrire les équations de Maxwell pour cette onde.

3 - En déduire que l'onde est transverse électromagnétique.

4 - L'onde est celle d'un laser polarisé linéairement selon (Oy) et se propageant selon $+\vec{e}_x$. Le faisceau est de diamètre 2 mm, puissance 1 mW, longueur d'onde 633 nm. Déterminer numériquement les caractéristiques du champ électrique.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$, $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Exercice 80 : Chauffage par induction *(Oral CCINP)*

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur de rayon a et de longueur h très grande devant a, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique. On se place dans l'ARQS.

1. Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.
2. Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.
3. Justifier proprement que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r,t)\vec{e}_\theta$.
4. Exprimer $\vec{E}$ dans tout l'espace en fonction de r et de I_0 notamment en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale.
5. Retrouver l'expression précédente en utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday.
6. En déduire la densité volumique de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?
7. Par intégration de l'expression précédente, déterminer la puissance instantanée P_J dissipée par effet Joule dans le conducteur puis la moyenne temporelle $< P_J >$ de cette puissance.

Donnée : rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Exercice 81 : Champ électrique *(Oral CCINP MP)*

Soit un demi-espace $z > 0$ conducteur de conductivité réelle γ. On considère dans ce milieu un champ complexe $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 \exp(-\alpha z)\exp(j(\omega t - \alpha z))\overrightarrow{e_x}$.

1. Donner en justifiant les caractéristiques de cette onde.
2. Déterminer l'expression de α. Que représente $\frac{1}{\alpha}$?
3. Donner le champ réel $\overrightarrow{E}$ puis le champ $\overrightarrow{B}$ associé au champ $\overrightarrow{E}$.
4. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Commenter.
5. Effectuer un bilan de puissance sur une section de surface S et de longueur dz, puis déterminer la puissance Joule moyenne dissipée par unité de volume.
6. Retrouver le résultat à l'aide de la loi d'Ohm locale.

Exercice 82 : Flûte et clarinette *(Oral CCINP)*

On suppose que les instrument à vents constituent une cavité. Lorsqu'une extrêmité de la cavité est fermée (resp. ouverte), on admet que cela correspond à un ventre (resp noeud) de pression pour l'onde sonore stationnaire dans le tuyau. Une flûte a ses deux côtés fermés, alors qu'une clarinette a un côté fermé et l'autre ouvert.

1. Représenter l'onde pour une flûte (fondamental et premiers harmoniques).
2. Trouver la longueur L de la flûte en fonction de $f_{1,\text{flute}}$ et de c, célérité du son dans l'air. Faire l'application numérique avec $f_{1,\text{flute}} = 330$ Hz et $c = 340$ m.s^{-1}.
3. Représenter l'onde pour une clarinette (fondamental et premiers harmoniques).
4. Sachant que la longueur de la clarinette est presque égale à la longueur de la flûte, trouver $f_{1,\text{clarinette}}$. Lequel de ces deux instruments sonne le plus grave ?

Problème 83 : Paroi d'un micro-ondes *(Oral CCINP)*

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité $\gamma = 2 \times 10^7\ S.m^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur de la paroi pour que l'amplitude d'une onde de fréquence $f = 2,5$ GHz soit réduite d'un facteur au moins 10^4 dans la paroi ?

Exercice 84 : Réflexion sur conducteur parfait *(oral CCINP)*

1 - Caractériser l'onde définie par le champ

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}\,.$$

2 - Cette onde occupe le demi-espace $z < 0$ et se dirige vers une plaque métallique (conducteur parfait) située en $z > 0$. Déterminer l'onde réfléchie, sachant que la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ est continue en $z = 0$.

3 - On place un capteur de champ et on constate qu'il s'annule à plusieurs endroits lorsqu'on le déplace suivant $\overrightarrow{u_z}$. Montrer ce résultat et trouver la période spatiale.

4 - L'onde est une onde téléphonique de fréquence 300 GHz qui se réfléchit sur un bâtiment. Déterminer les z pour lesquels le champ $\overrightarrow{E}$ s'annule.

5 - Le capteur est un cadre constitué de N spires aux bornes desquelles on mesure la tension. Quelle grandeur est alors mesurée ?

Donnée : $\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

Exercice 85 : Rayonnement par un dipôle oscillant *(CCINP)*

On rappelle qu'un dipôle oscillant, constitué d'une charge fixe $+e$ au point O et d'un électron mobile au point P animé d'un mouvement forcé sur Oz, tel que $\overrightarrow{OP} = d\cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$, est caractérisé par son vecteur moment dipolaire $\overrightarrow{p}(t) = -e\overrightarrow{OP}(t)$.
Le champ électrique lointain créé par ce dipôle en un point M très éloigné repéré en coordonnées sphériques $(r = OM, \theta, \varphi)$ (figure 1) est donné par :

$$\overrightarrow{E} = \frac{ed\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

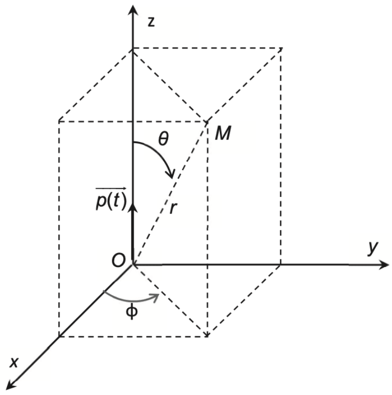


Figure 1 - Coordonnées sphériques d'un point *M*

1. Comment se traduisent l'approximation dipolaire, l'approximation non relativiste et l'approximation de la zone de rayonnement pour le dipôle oscillant ?
2. Justifier par des considérations de symétrie la direction du champ magnétique.
3. On donne l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 ed\omega^2}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{r}\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_\varphi}$. Pourquoi dit-on que l'onde est localement plane ?
4. Ecrire le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à l'onde.
5. Calculer le flux de celui-ci à travers une sphère de centre O et de rayon r très grand. On donne $\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$.
6. En déduire quelle est l'énergie moyenne temporelle rayonnée par l'électron.
7. Montrer que la puissance moyenne, appelée puissance de Larmor P_L, rayonnée par cet électron oscillant, peut s'écrire $P_L = K_e < \overrightarrow{\gamma}.\overrightarrow{\gamma} >$ en appelant $\overrightarrow{\gamma}$ l'accélération de la particule chargée et mobile. Donner l'expression de la constante K_e en fonction de c, e et de ϵ_0 et indiquer sa dimension, puis son unité.

Exercice 86 : guide d'ondes *(Mines-Telecom)*

Deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan (Oyz), se trouvent en $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage entre ces deux plans selon $\overrightarrow{u_z}$. L'espace ambiant est le vide.

1. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique $\overrightarrow{E}$.
2. On cherche des solutions de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = E(x)\exp[i(\omega t - kz)]\overrightarrow{u_y}$. Déterminer l'équation vérifiée par $E(x)$. La résoudre compte tenu des conditions aux limites. *On rappelle que la composante tangentielle du champ électrique est continue à une interface entre deux milieux.*
3. Déterminer la relation de dispersion.
4. Déterminer la fréquence minimale f_{min} telle que l'onde ne se propage que pour des fréquences supérieures à f_{min}.

Exercice 87 : Diffusion par un atome *(Oral CCINP)*

Un atome d'hydrogène H est placé à l'origine O d'un repère d'espace cartésien (Oxyz). On suppose que le proton est immobile en O. L'électron, de charge $-e$ et de masse m est repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x, y, z). On note $\vec{v}$ son vecteur vitesse. On suppose que :

- l'électron n'est pas relativiste
- l'électron est lié au proton par une force de rappel élastique $\vec{F_r} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM}$
- on tient compte de la perte d'énergie de l'électron par rayonnement en introduisant une force de frottement de type fluide $\vec{F} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$
- l'atome est placé dans une OPPM électromagnétique de pulsation ω, rectilignement polarisée selon $\vec{u}_z$ et se propageant dans la direction $+\vec{u}_x$.

Le champ électrique de l'onde en notation complexe s'écrit donc : $\vec{\underline{E}}(M,t) = E_0\exp[i(\omega t - kx)]\vec{u}_z$. avec $E_0 > 0$. Exepté l'atome d'hydrogène, tout l'espace est vide donc on suppose que cette onde se propage dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique $\vec{\underline{B}}(M,t)$ associé à cette onde.

2. Montrer que la force magnétique exrercée par l'onde sur l'électron est négligeable devant la force électrique.

3. En se placant dans le domaine optique, justifier que le champ puisse être considéré comme uniforme à l'échelle de l'atome. En déduire que la force exercée par l'onde sur l'électron peut s'écrire : $\vec{F_e} = -e\vec{E}(0,t)$.
Astuce : Évaluer et comparer la taille caractéristique de l'atome et la longueur d'onde.

4. Appliquer le PFD à l'électron. Montrer que pour $t \gg \tau$ (après le régime transitoire), le mouvement forcé de l'électron se fait uniquement suivant $\vec{u}_z$.

5. Déterminer l'expression de $\underline{z}(t)$.

L'atome d'hydrogène se comporte alors comme un dipôle électrique oscillant, de moment

$$\vec{p}(t) = -e\,\underline{z}(t)\,\vec{u_z} = \underline{p}_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z$$

On rappelle que dans ce cas, le champ électromagnatique rayonné s'écrit en notation complexe et dans la zone de rayonnement :

$$\vec{\underline{E}}_r(M,t) = -\frac{\mu_0\underline{p}_0\omega^2\sin\theta}{4\pi r}\exp[i(\omega t - kr)]\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{\underline{B}}_r(M,t) = -\frac{\mu_0\underline{p}_0\omega^2\sin\theta}{4\pi rc}\exp[i(\omega t - kr)]\vec{u}_\varphi$$

6. Déterminer la valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée.

7. En déduire la puissance électromagnétique moyenne rayonnée $\mathcal{P}_{ray}$. On montrera qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{P}_{ray} = K\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}}$$

avec K une constante à exprimer en fonction de E_0, e, m, c et ε_0.

8. ω_0 et $\dfrac{1}{\tau}$ étant du même ordre de grandeur, quelle est la forme approchée de $\mathcal{P}_{ray}$ lorsque $\omega \ll \omega_0$ (diffusion Rayleigh) ? Et si $\omega \gg \omega_0$ (diffusion Thomson) ?

Exercice 88 : effet de peau *(Oral CCINP)*

Un conducteur de conductivité électrique γ réelle occupe le demi espace $x > 0$. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

1. Propagation d'une onde dans le conducteur

   a. Rappeler la loi d'Ohm locale ainsi que les équations de Maxwell dans l'ARQS.

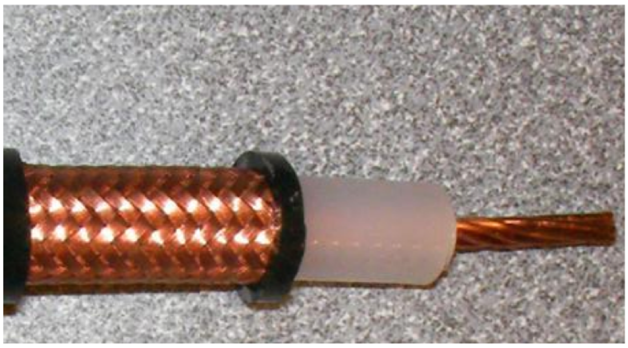
   b. Établir l'équation différentielle dont est solution le champ électrique, $\overrightarrow{E}(x,t)$, dans le conducteur. La mettre sous la forme
   $$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial x^2} \qquad (1)$$
   avec D à exprimer. Commenter l'équation obtenue.

   c. Soit une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant dans le conducteur selon les x croissants, de représentation complexe : $\underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = \overrightarrow{E}_0 e^{i(\underline{k}x-\omega t)}$. Établir la relation de dispersion de cette OPPH. On exprimera $\underline{k}^2$ en fonction des données.

   d. Montrer que $\underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = \overrightarrow{E}_0 e^{x/\delta} e^{i(x/\delta-\omega t}$; avec δ, à exprimer en fonction des données. Caractériser la forme d'onde obtenue et donner la signification physique de δ, ainsi que son ordre de grandeur à 50 Hz pour le cuivre.

   e. Application

   Un fil de Litz permet de transporter des signaux à haute fréquence. À partir des résultats précédents, expliquer la constitution du fil de Litz présenté **figure 1**.



Exercice 89 : Plasma *(Oral CCINP MP)*

On considère un plasma constitué d'ions et d'électrons de charge respective e et $-e$. On pose n_e la densité particulaire des électrons et n_i celle des ions. On considère le plasma localement neutre. On pose alors $n_0 = n_e = n_i$. On considère une onde électromagnétique traversant le plasma, dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - \underline{k}x)\overrightarrow{e_y}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}(x,t)$.

1. Montrer que l'onde traversant le plasma ne modifie pas la propriété localement neutre du plasma.
2. Déterminer l'expression du champ magnétique en fonction de $\underline{k}$, ω et $\overrightarrow{E}$. Quelle condition la vitesse des électrons doit-elle respecter vis à vis de la vitesse de phase de l'onde, pour pouvoir négliger la composante magnétique de la force de Lorentz ? On supposera que cette condition est vérifiée dans la suite du sujet.
3. Justifier que l'on peut négliger la vitesse des ions par rapport à celle des électrons.
4. En appliquant un principe fondamental de la dynamique complexe, déterminer l'expression du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ ainsi que la conductivité électrique du plasma $\underline{\sigma}$ à l'aide des données de l'énoncé.
5. Etablir la relation de dispersion du plasma.
6. On se place dans le domaine de transparence du plasma. A quoi cela correspond-il ? Donner l'ordre de grandeur des fréquences correspondantes dans le cas de l'ionosphère.
7. Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Le plasma est-il dispersif ?
8. Représenter l'allure de l'évolution spatiale d'un paquet d'onde. Même question lorsque $\omega >> \omega_p$ où ω_p est la pulsation plasma.

Mécanique quantique et thermodynamique statistique

Problème 90 : Modèle de Bohr *(Oral CCINP MP)*

On considère un atome dont le noyau a pour charge $+Ze$ et que un électron de masse m et de charge $-e$ orbite autour.
On considère une orbite circulaire et on rappelle l'hypothèse de Bohr : le moment cinétique de l'électron est quantifié et s'écrit : $\sigma_n = n\hbar$.
Exprimer les niveaux d'énergie E_n que peut prendre l'électron.

Exercice 91 : Puits infini *(Oral Mines-Telecom)*

On considère N particules indépendantes confinées dans un puits de potentiel infini de largeur L. Ainsi $V(x) = 0$ pour $0 < x < L$ et $V(x) = \infty$ ailleurs. On rappelle l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

1. Déterminer les niveaux d'énergie des particules.
2. Déterminer ΔE, la différence d'énergie des deux plus basses énergies.

On suppose que les particules ne peuvent se situer que dans les deux états de plus basse énergie : E_1 et E_2. La probabilité d'occupation de chacun des deux états suit une loi de Boltzmann.

3. Déterminer la proportion de particules dans l'état E_2 en fonction de ΔE, k_B et T.
4. Que dire si $\Delta E << k_B T$? Commenter le choix du modèle.
5. Déterminer l'énergie moyenne $\overline{E}$ du système.

Exercice 92 : Fonction d'onde et oscillateur harmonique *(CCINP)*

Soit une particule quantique de masse m, soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$.
Dans un état stationnaire d'énergie E, la fonction d'onde de cette particule s'écrit :

$$\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

avec, dans l'état fondamental, $\phi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$, A étant une constante de normalisation et a une largeur caractéristique.

1. Déterminer la constante de normalisation A.
2. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire (sans calculs) la valeur de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule.
3. Calculer l'indétermination quantique Δx sur la position.
4. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
5. Déterminer alors l'expression de l'énergie E et de a en fonction de $\hbar$, ω_0, et de m.

Données : on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$

Problème 93 : Pression au coeur d'une étoile *(Oral Mines PSI)*

Une étoile de masse M, de rayon R, de masse volumique μ uniforme possède un champ de pression $P(r)$ et un champ gravitationnel $g(r)$. La pression est nulle à la surface de l'étoile.

Déterminer la pression P_0 au centre de l'étoile.

Données :

- Constante universelle de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI
- Masse du Soleil : $M = 1,99 \times 10^{30}$ kg ; Rayon du Soleil : $R = 6,96 \times 10^{5}$ km ; Masse volumique du Soleil : $\rho_S = 1,41 g.cm^{-3}$.

Exercice 94 : Barrière de potentiel *(Oral CCINP MP)*

Soit le potentiel $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -a/2 \text{ (I)} \\ V_0 & \text{pour } -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ (II)} \\ 0 & \text{pour } x > a/2 \text{ (III)} \end{cases}$ dans lequel évolue une particule de masse m et d'énergie $E > 0$. On se limite au cas où $E > V_0$, on pose $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ et $K = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$.

1. Décrire qualitativement le mouvement de la particule dans le cas de la mécanique classique.

Si la particule est quantique, son état est décrit par la fonction d'onde $\psi(x,t) = \phi(x) \exp\left(-\dfrac{iEt}{\hbar}\right)$.

2. Établir les équations différentielles vérifiées par ϕ dans les trois régions et proposer une forme de ϕ dans chacune des trois régions (pas de particules provenant de la région III). On précisera les conditions limites et les conditions de raccordement.

Ces conditions de raccordement permettent de déduire les expressions des probabilités de réflexion R et de transmission T par la barrière. On donne :

$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2\left(\dfrac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}\right)}$$

3. Déterminer l'expression de R à partir de celle de T donnée.
4. Représenter l'allure de R et T en fonction de E pour $E > V_0$. Commenter.

Des électrons, d'énergie $E = 10\,\text{eV}$ arrivent sur une barrière de potentiel telle que $V_0 = 4\,\text{eV}$.

5. Déterminer les épaisseurs de la barrière telles que la transmission soit totale. Comparer ces valeurs à la longueur d'onde de De Broglie des électrons dans la barrière.
6. La barrière est maintenant d'épaisseur $a = 0{,}4\,\text{nm}$. Déterminer l'intensité du courant transmis si le courant incident est $I = 1\,\text{mA}$.

Problème 95 : Masse de l'atmosphère *(Mines-Telecom)*

On fait l'hypothèse d'une atmosphère isotherme à $T = 290$ K.
Estimer la masse totale de l'atmosphère
Données :

- Masse molaire diazote : $M(N_2) = 28$ g.mol^{-1} et masse molaire dioxygène : $M(O_2) = 32$ g.mol^{-1}
- constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.
- Rayon de la Terre : $R_T = 6400$ km

Exercice 96 : Superposition dans un puits *(Oral CCINP)*

On considère la superposition de deux états d'une particule dans un puits infini de largeur a :

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{A_1} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \underline{A_2} sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \text{ avec } E_n = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

1. Une particule de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits infini de potentiel situé entre $x = 0$ et $x = a$. En cherchant une solution stationnaire $\underline{\psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x)\underline{f}(t)$, montrer que son énergie est quantifiée et justifier l'expression proposée pour E_n.
2. Etablir une relation entre $\underline{A_1}$ et $\underline{A_2}$.
3. Pour la suite, on prendra $\underline{A_1} = \underline{A_2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, vérifier que ces valeurs conviennent.
4. Représenter $\rho(x,t) = |\underline{\psi}(x,t)|^2$ pour des valeurs de t bien choisies.
5. Quelle est la période T des oscillations quantiques ?
6. La relation d'incertitude de Heisenberg temps-énergie s'écrit $\Delta E \times \Delta t \approx \hbar$. Vérifier cette relation dans le cadre de ce système.

Exercice 97 : Marche de potentiel *(Oral CCINP MP)*

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ région (I)} \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ région (II)} \end{cases}$$

On commence par étudier une particule d'énergie $E > V_0$. On pose $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.

1. Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre $\phi(x) = A\exp(ik_1x) + rA\exp(-ik_1x)$ dans la région I et par $\phi(x) = tA\exp(ik_2x)$ dans la région II. A est une constante non nulle et r et t respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

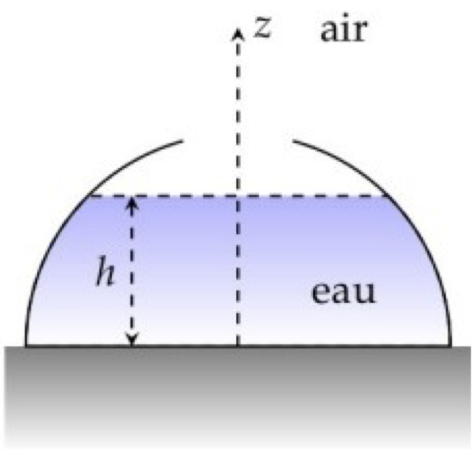
2. Écrire les équations de raccordement en $x = 0$ et en déduire les expressions de r et t. Que se passe-t-il si $E \gg V_0$?

On se place maintenant dans le cas $E < V_0$. L'expression de k_1 et la fonction d'onde propre dans la région I peuvent être conservées.

3. Comment est modifiée k_2 ? En déduire les nouveaux coefficients r et t. Que vaut alors la probabilité de réflexion R de la particule ?

Problème 98 : Soulèvement d'une cloche *(Oral Mines-Ponts)*

Une cloche de verre de masse $m = 500$ g, en forme de demi-sphère de rayon $R = 10$ cm, est posée sur une table. On verse de l'eau à l'intérieur de cette cloche sur une hauteur h. On notera P_0 la pression de l'air et ρ la masse volumique de l'eau.



Déterminer la hauteur critique h_C d'eau qui provoque le soulèvement de la cloche.

Exercice 99 : Puits semi-infini *(Oral CCINP MP)*

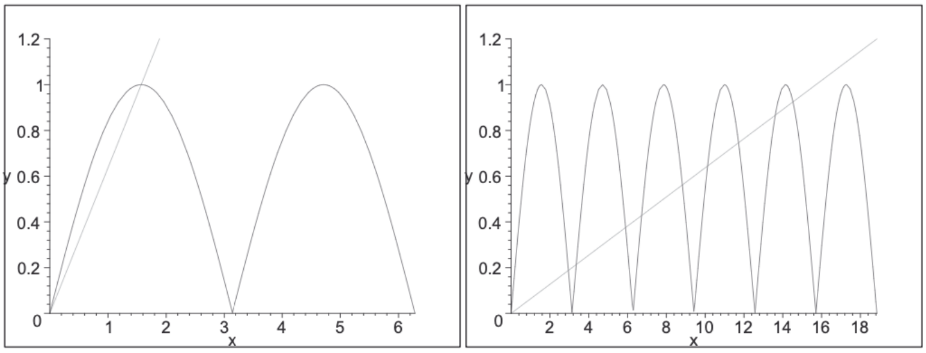
Une particule de masse m est placée dans un champ énergétique de potentiel :

- $V(x) = +\infty$ pour $x < 0$
- $V(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq a$
- $V(x) = V_0 > 0$ pour $x > a$.

On cherche une solution stationnaire d'énergie E de l'équation de Schrödinger et on suppose que $0 < E < V_0$. On pose :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \text{ et } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

1. Justifier que l'on peut chercher le terme spatial de la fonction d'onde sous la forme :
   - $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$
   - $\varphi(x) = \underline{A_1} e^{ikx} + \underline{B_1} e^{-ikx}$ pour $0 \leq x \leq a$
   - $\varphi(x) = \underline{A_2} e^{-\frac{x}{\delta}} + \underline{B_2} e^{\frac{x}{\delta}}$ pour $x > a$
2. Justifier que $\underline{B_2} = 0$.
3. Par application des conditions de continuité, écrire le système de trois équations vérifiées par $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$ et $\underline{B_1}$.
4. En éliminant ces trois constantes entre les équations, établir la relation entre k, a et δ. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme $|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0}$ avec $\tan(ka) < 0$.
5. Cette équation se résout graphiquement. Voilà l'allure des fonctions $|\sin(x)|$ et $\frac{x}{\beta}$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et pour $\beta = 5\pi$.



   En déduire que :
   - si $k_0 < \frac{\pi}{2a}$, le problème n'a pas de solution stationnaire.
   - si $k_0 > \frac{\pi}{2a}$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour l'énergie et le problème est quantifié ;
   - si $k_0 >> \frac{\pi}{2a}$, on retrouve la quantification du puits infini.