

## Problème : Inégalités de Bernstein et de Markov

### Définitions et notations :

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $n$  s'il existe des réels  $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ .

- Pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, on note :

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des deux premières parties.

### Partie I. Inégalité de Bernstein

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f \in \mathcal{T}_n$ . Cette partie a pour but d'établir l'inégalité de Bernstein :

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Par définition, il existe  $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. Montrer que  $f$  est bornée et que :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|).$$

2. Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty$  et que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(p)} \in \mathcal{T}_n$ .
3. a. Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $2n$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-inx} P(e^{ix}).$$

- b. Supposons qu'il existe  $2n+1$  réels  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$  tels que  $f(x_0) = \dots = f(x_{2n}) = 0$ . Montrer que :

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = b_k = 0.$$

4. Supposons qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin(nx)$ . Montrer qu'alors  $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f \in \mathcal{T}_n$ . On se propose dans la suite de cette partie d'établir que  $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que :

$$n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

5. On suppose dans cette question que  $f'(0) = \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g(x) = \frac{1}{n} \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sin(nx) - f(x).$$

- a. Montrer que  $g$  possède au-moins  $2n$  zéros distincts dans  $[0, 2\pi[$ .
  - b. Montrer que  $g'$  possède au-moins  $2n+1$  zéros distincts dans  $[0, 2\pi]$ .
  - c. Montrer que  $g''$  possède au-moins  $2n+1$  zéros distincts dans  $[0, 2\pi[$ . On pourra remarquer que  $g''(0) = 0$ .
  - d. En déduire que  $g = 0$  et obtenir une contradiction.
6. Etablir l'inégalité de Bernstein.

### Partie II. Polynômes de Tchébychev

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

7. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale  $T_n$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Montrer que  $T_n$  est de degré  $n$  et que son coefficient dominant est  $2^{n-1}$ .

La fonction  $T_n$  est appelée  $n$ -ème polynôme de Tchébychev.

8. Montrer que la fonction  $T_n$  possède exactement  $n$  racines distinctes  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  dans l'intervalle  $] -1, 1[$  et que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$x_i = \cos\left(\frac{(2n-2i+1)\pi}{2n}\right).$$

9. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  :

$$\frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , notons :

$$T_{n,i}(x) = 2^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

de sorte que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(x) = (x - x_i)T_{n,i}(x)$ .

10. Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$T'_n(x_i) = \frac{n(-1)^{n-i}}{\sqrt{1-x_i^2}} \neq 0.$$

11. Soit  $P$  une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .

a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i)}{T'_n(x_i)} T_{n,i}(x).$$

On pourra vérifier que la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$P(x) - \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i)}{T'_n(x_i)} T_{n,i}(x)$$

possède  $n$  racines distinctes.

b. En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \sqrt{1-x_i^2} P(x_i) T_{n,i}(x).$$

12. On souhaite démontrer que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$|\sin(nx)| \leq n \sin(x).$$

a. Montrer que cette inégalité est vraie pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ .

b. Montrer que pour tout  $x \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $n \sin(x) \geq 1$ .

c. Conclure.

13. Déduire de la question précédente que pour tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$|T'_n(x)| \leq n^2.$$

### Partie III. Inégalité de Markov

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

14. Soit  $P$  une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . Montrer que :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq n \sup_{x \in [-1, 1]} \sqrt{1-x^2} |P(x)|.$$

On pourra distinguer le cas où  $x \in [x_1, x_n]$  du cas où  $x < x_1$  ou  $x > x_n$ .

15. Soit  $P$  une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrer que :

$$\|P'\|_{L^\infty([-1, 1])} \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1, 1])}.$$

16. Déterminer un polynôme  $P$  de degré  $n$  pour lequel :

$$\|P'\|_{L^\infty([-1, 1])} = n^2 \|P\|_{L^\infty([-1, 1])}.$$