

Partie I. Inégalité de Bernstein

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^n (|a_k| |\cos(kx)| + |b_k| |\sin(kx)|) \leq \sum_{k=0}^n (|a_k| + |b_k|).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est bornée et $\|f\|_{\mathbb{R},\infty} \leq \sum_{k=0}^n (|a_k| + |b_k|)$.

2. Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n (-ka_k \sin(kx) + ka_k \cos(kx)).$$

Ainsi, $f' \in \mathcal{T}_n$. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ est stable par dérivation. On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)} \in \mathcal{T}_n$.

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left[a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx} \\ &= e^{-inx} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{i(k+n)x} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{i(n-k)x} \end{aligned}$$

Posons :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) X^{n+k} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) X^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-inx} P(e^{inx})$$

et P est de degré $2n$.

b. On a $P(e^{ix_0}) = \dots = P(e^{ix_n}) = 0$. Comme la fonction $t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$ est injective, les complexes $e^{ix_0}, \dots, e^{ix_n}$ sont deux à deux distincts. Le polynôme P possède donc $2n+1$ zéros distincts. Comme $\mathbb{C}$ est un corps infini, on en déduit qu'il est nul, c'est-à-dire que les coefficients sont tous nuls :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k + ib_k}{2} = 0.$$

On en déduit que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k = 0$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = na \cos(nx)$. On a :

$$\|f\|_{\mathbb{R},\infty} = f\left(\frac{\pi}{2n}\right) = |a| \text{ et } \|f'\|_{\mathbb{R},\infty} = f'(0) = |na|.$$

on a bien $\|f'\|_{\mathbb{R},\infty} = n \|f\|_{\mathbb{R},\infty}$.

5. a. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, posons $x_k = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$g(x_{2k}) = \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} \sin(nx_{2k}) - f(x_{2k}) = \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} - f(x_{2k}) \geq \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} - \|f\|_{\infty} > 0.$$

$$\begin{aligned} g(x_{2k+1}) &= \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} \sin(nx_{2k+1}) - f(x_{2k+1}) = -\frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} - f(x_{2k+1}) \\ &\leq \frac{1}{n} \|f'\|_{\infty} - \|f\|_{\infty} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-2 \rrbracket$, $g(x_k)g(x_{k+1}) < 0$. Comme g est continue, il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $g(y_k) = 0$. Comme les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ sont deux à deux disjoints, les y_k sont deux à deux distincts. g possède donc au-moins $2n-1$ zéros distincts.

Il manque un zéro. Remarquons que $0 < x_0 < x_{2n-1} < 2\pi$. Montrons que g possède au-moins une racine dans $[0, x_0]$ ou dans $[x_{2n-1}, 2\pi]$. Pour cela, remarquons que $g(0) = g(2\pi) = -f(0)$ et que $g(x_0)g(x_{2n-1}) < 0$. Ainsi, soit $g(0)g(x_0) \leq 0$, soit $g(x_{2n-1})g(2\pi) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que g possède un zéro dans $[0, x_0]$ ou dans $[x_{2n-1}, 2\pi]$.

Ainsi, g possède au-moins $2n$ zéros deux à deux distincts.

b. Notons $y_0 < \dots < y_{2n-1}$ les $2n$ zéros distincts de g trouvés dans la question précédente (quitte à les renuméroter, on peut supposer qu'ils sont numérotés par ordre croissant). Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n-2 \rrbracket$, le théorème de Rolle assure l'existence d'un $z_k \in]y_k, y_{k+1}[$ tel que $g'(z_k) = 0$. La fonction g' possède donc déjà $2n-1$ zéros distincts. Comme de plus $g'(0) = g'(2\pi) = \|f'\|_{\infty} - f'(0) = 0$, la fonction g' possède au-moins $2n+1$ zéros sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (on a $0 < z_0 < \dots < z_{2n-2} < 2\pi$).

c. Le théorème de Rolle appliqué entre deux zéros consécutifs de g' permet de montrer l'existence de $2n$ points $0 < x_0 < \dots < x_{2n-1} < 2\pi$ tels que $g'(w_0) = \dots = g'(w_{2n-1}) = 0$. Comme f' possède un maximum en 0 (puisque $f'(0) = \|f'\|_{\infty}$), alors $f''(0) = 0$ d'où $g''(0) = 0$. Ainsi, g'' possède au-moins $2n+1$ zéros distincts dans $[0, 2\pi]$.

d. D'après la question **3.b.**, $g = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{n} \|f'\|_{\mathbb{R},\infty} \sin(nx)$. D'après la question **4.**, $\|f'\|_{\mathbb{R},\infty} = n \|f\|_{\mathbb{R},\infty}$, ce qui contredit l'hypothèse $n \|f\|_{\mathbb{R},\infty} < \|f'\|_{\mathbb{R},\infty}$. Absurde.

6. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x_0)| = \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Si $f'(x_0) \geq 0$, posons $\tilde{f} : x \mapsto f(x+x_0)$. Si $f'(x_0) < 0$, posons

$\tilde{f} : x \mapsto -f(x + x_0)$. Dans tous les cas, $\tilde{f}'(0) = \left\| \tilde{f} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. D'après ce qui précède, $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Or $\left\| \tilde{f} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ et $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\| \tilde{f}' \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, donc :

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq n \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Partie II. Polynômes de Tchébychev

7. Commençons par l'existence. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(x) + i \sin(x))^n + \frac{1}{2} (\cos(x) - i \sin(x))^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(x) \cos^{n-k}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k i^k \sin^k(x) \cos^{n-k}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [1 + (-1)^k] i^k \sin^k(x) \cos^{n-k}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} 2(i)^{2k} \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2(x))^k \cos^{n-2k}(x) \\ &= T_n(\cos(x)) \end{aligned}$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k x^{n-2k} (1 - x^2)^k.$$

Unicité : soient T, S deux fonctions polynomiales telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(\cos(x)) = S(\cos(x)) = \cos(nx)$. Comme l'image de $\mathbb{R}$ par $\cos$ est $[-1, 1]$, alors pour tout $y \in [-1, 1]$, $T(y) = S(y)$. Donc $T - S$ possède une infinité de racines, donc elles sont égales.

Pour tout $k \in \llbracket 0, \lfloor n/2 \rfloor \rrbracket$, la fonction $f_k : x \mapsto x^{n-2k}(1 - x^2)^k$ est de degré n (formule du binôme). Le coefficient de degré n de T_n est la somme des coefficients de degré n des fonctions f_k , soit encore :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Ce coefficient est non nul, donc T_n est de degré n et son coefficient vaut bien 2^{n-1} .

8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors $T_n(\cos(\theta)) = 0$ si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$, si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que :

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le réel $t_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est racine de T_n .

Comme la fonction $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$, les t_k sont deux à deux distincts.

On a donc montré que T_n possède au-moins n racines distinctes. Comme T_n est de degré n , il possède exactement n racines distinctes, et les t_k sont exactement les racines de T_n .

9. Comme T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1} , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

En dérivant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T'_n(x) = 2^{n-1} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1}^n (x - x_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. En dérivant cette relation, on obtient $-\sin(x)T'_n(\cos(x)) = -n \sin(nx)$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sin\left(\frac{(2n-2k+1)\pi}{2n}\right) T'_n(x_k) = n \sin\left(\frac{(2n-2k+1)\pi}{2}\right) = n(-1)^{n-k}.$$

Mais comme $\frac{(2k+1)\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$:

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \sqrt{1 - x_k^2}.$$

Donc :

$$T'_n(x_k) = \frac{n(-1)^{n-k}}{\sqrt{1 - x_k^2}}.$$

11. a. Notons Q la fonction polynomiale donnée par l'énoncé. Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(x_i) = 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$Q(x_i) = P(x_i) - \sum_{j=1}^n \frac{P(x_j)T_{n,i}(x_j)}{2^{n-1}T'_n(x_j)}.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T_{n,i}(x_j) = 0$ donc :

$$Q(x_i) = P(x_i) - \frac{P(x_i)T_{n,i}(x_i)}{2^{n-1}T'_n(x_i)}.$$

Mais $T_{n,i}(x_i) = 2^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$ et :

$$T'_n(x_i) = 2^{n-1} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_i - x_k) = 2^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = T_{n,i}(x_i).$$

Donc $Q(x_i) = 0$. Ainsi, Q possède n racines distinctes. Comme Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors Q est nulle, d'où le résultat.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{P(x_i)T_{n,i}(x)}{T'_n(x_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n P(x_i)T_{n,i}(x) \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{(-1)^{n-i}n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \sqrt{1-x_i^2} P(x_i)T_{n,i}(x) \end{aligned}$$

12. a. Considérons la fonction $g : x \in [0, \pi/2n] \mapsto \sin(nx) - n \sin(x)$. La fonction g est dérivable et $g'(x) = n \cos(nx) - n \cos(x) = n(\cos(nx) - \cos(x))$. Comme $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et comme pour tout $x \in [0, \pi/2n]$, $nx \in [0, \pi/2]$ donc $\cos(nx) \leq \cos(x)$, donc $g'(x) \leq 0$. Ainsi la fonction g est décroissante. Comme $g(0) = 0$, g est négative donc pour tout $x \in [0, \pi/2n]$, $\sin(nx) \leq n \sin(x)$. Comme $\sin(nx) \geq 0$, alors $|\sin(nx)| \leq n \sin(x)$.

b. Soit $x \in [\pi/2n, \pi/2]$. Alors $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$ donc $n \sin(x) \geq 1$.

c. Pour tout $x \in [\pi/2n, \pi/2]$, $|\sin(nx)| \leq 1 \leq n \sin(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $|\sin(nx)| \leq n \sin(x)$.

13. Pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $\sin(t)T'_n(\cos(t)) = n \sin(nt)$ donc :

$$|T'_n(\cos(t))| = \frac{n |\sin(nt)|}{|\sin(t)|} \leq n^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in]0, 2\pi[$, alors pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$|T'_n(x)| \leq n^2.$$

La fonction T'_n étant continue, $T'_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} T'_n(-1)$ et $T'_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} T'_n(1)$, donc par passage à la limite dans les inégalités, $|T'_n(-1)|, |T'_n(1)| \leq n^2$. Donc pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$|T'_n(x)| \leq n^2.$$

Partie III. Inégalité de Markov

14. Soit $x \in [x_1, x_n]$. Il existe $t \in \left[\frac{\pi}{2n}, \pi - \frac{\pi}{2n}\right]$ tel que $x = \cos(t)$. D'après la question 12.b, $n |\sin(t)| \geq 1$ donc $n \sqrt{1 - \cos^2(t)} \geq 1$. Ainsi, $n \sqrt{1 - x^2} \geq 1$ donc :

$$|P(x)| \leq n \sqrt{1 - x^2} |P(x)|.$$

Soit alors $x \in [0, x_1[$. D'après la question 11.b :

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - x_i^2} |P(x_i)| |T_{n,i}(x_i)|.$$

Donc :

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sqrt{1 - x_i^2} |P(x_i)| \right) \sum_{i=1}^n |T_{n,i}(x)|.$$

D'après la partie précédente ;

$$\sum_{i=1}^n T_{n,i}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{T_n(x)}{x - x_i} = T_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

Comme $x < x_1$, alors pour tout i , $x - x_i < 0$ donc :

$$|T'_n(x)| = |T_n(x)| \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right| = |T_n(x)| \sum_{i=1}^n \frac{1}{|x - x_i|} = \sum_{i=1}^n |T_{n,i}(x)|.$$

Donc :

$$|P'(x)| \leq \frac{1}{n} \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sqrt{1 - x_i^2} |P(x_i)| \right) |T'_n(x)| \leq n \sup_{y \in [-1, 1]} \sqrt{1 - y^2} |P(y)|$$

car $|T'_n(x)| \leq n^2$. d'après la majoration $|T'_n(y)| \leq n^2$.

15. Remarquons que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto P(\cos(x))$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n (linéarisation). Alors d'après l'inégalité de Bernstein, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x)| |P'(\cos(x))| \leq n |P(\cos(x))|$$

donc :

$$\sqrt{1 - \cos^2(x)} |P'(\cos(x))| \leq n |P(\cos(x))|.$$

On en déduit que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\sqrt{1 - x^2} |P'(x)| \leq n |P(x)|.$$

Mais d'après la question précédente, comme P' est de degré $n-1$:

$$|P'(x)| \leq n \sup_{y \in [-1, 1]} \sqrt{1 - y^2} |P'(y)|$$

donc :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |P'(x)| \leq n^2 \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|.$$

D'où le résultat.

16. La fonction T_n convient. En effet, pour $t \in]0, 2\pi[$:

$$|T'_n(\cos(t))| = \frac{1}{n} \frac{|\sin(nt)|}{|\sin(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} n^2.$$

Comme T'_n est continue, alors $T'_n(\cos(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} T'_n(1)$ donc $|T'_n(1)| = n^2$.

Ainsi, $\|T'_n\|_{[-1,1],\infty} = n^2 = n^2 \|T_n\|_{[-1,1],\infty}$.