

Révisions : analyse asymptotique

Limites, développements limités

ASYMPT 1

Etudier les limites des suites de terme général :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^3 \ln(n)}{2^n} & v_n &= n^2 e^{-\sqrt{n}} \\ w_n &= \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \ln(1 + e^n) & z_n &= \frac{(n!)^2}{n^n} \end{aligned}$$

ASYMPT 2

- Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}$.
- Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction définie par $g(x) = \frac{1 - e^{\sin(x^3)}}{1 - \operatorname{ch}(x)}$.
- Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction définie par $h(x) = \tan(\sin(x))$.

ASYMPT 3

Etudier la limite en 0 des fonctions f, g, h, k définies par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x)}{x^4} & g(x) &= \frac{\sin(x) - \operatorname{sh}(x)}{x^3} \\ h(x) &= \frac{2 \ln(\cos(x)) + \operatorname{sh}^2(x)}{\sin^4(x)} & k(x) &= \frac{\sin(x)^{\sin(x)} - 1}{x^x - 1} \end{aligned}$$

ASYMPT 4

Montrer que la fonction :

$$f : x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

possède un prolongement dérivable à $]-\pi, \pi[$.

ASYMPT 5

Déterminer la limite et un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e + \frac{e}{2n}.$$

ASYMPT 6

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \left(\frac{\cos(\frac{1}{n}) + \operatorname{ch}(\frac{1}{n})}{2}\right)^{n^4}$$

ASYMPT 7

Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(2x) \ln(\tan(x)).$$

ASYMPT 8

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan(x)\right]^{\tan(x)}$.

ASYMPT 9

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch}(x+1) - \operatorname{ch}(x))^{1/\sqrt{x}}$.

ASYMPT 10

Posons $f : x \mapsto x^2(e^{1/x} - e^{1/(x-1)})$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ASYMPT 11

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(3+x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(2x-1)\right]$.

ASYMPT 12

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right]^{x \ln(x)}$.

ASYMPT 13

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right) - x$.

ASYMPT 14

Pour tout $x \in [0, 1[$, notons :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}.$$

Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites récurrentes

ASYMPT 15 Mines

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = x > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $u_{k+1} \leq u_k$, alors la suite $(u_n)_{n \geq k+1}$ est strictement décroissante.
- Montrer que, si la suite (u_n) est croissante, alors sa croissance est stricte. Que dire de sa limite ?
- On admet que $e^{e^{-2}} < 9/4$. Montrer que, pour x suffisamment petit, la suite (u_n) converge.

ASYMPT 16 Mines

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n .

- Montrer que si (u_n) converge alors sa limite ℓ est un point fixe de f . Dans la suite on considère un point fixe a de f .
- On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k > 1$ tel que $|f'(x)| \geq k$ pour $x \in]a - \eta, a + \eta[$. Si $|f'(a)| > 1$ décrire les suites (u_n) qui convergent vers a .

- On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in]a - \eta, a + \eta[$. Montrer que la suite (u_n) converge vers a si et seulement s'il existe un rang p tel que $u_p \in]a - \eta, a + \eta[$.

ASYMPT 17 Mines

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

- Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > 1$.
- Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.
- La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, trouver sa limite.

ASYMPT 18 Mines

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

- Déterminer en fonction de u_0 la limite de (u_n) .
- On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un réel α puis que $0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
 - Donner un équivalent de u_n .
- Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in]-1, 0[$.

ASYMPT 19

Soit $\alpha > 0$, soit $f : [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$ une fonction continue. Soit $u_0 \in]0, \alpha[$. Considérons la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose qu'il existe $a > 0$ et $p \geq 2$ tels que $f(x) = x - ax^p + o(x^p)$ au voisinage de 0.

- Montrer que si u_0 est suffisamment proche de 0, (u_n) tend vers 0.
- Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)^\beta - x^\beta$ possède une limite finie non nulle l en 0.
- Déterminer un équivalent de u_n .
- Déterminer un équivalent de u_n dans les cas suivants :
 - $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n), u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n), u_0 > 0$.

Suites définies implicitement

ASYMPT 20 Saint-Cyr

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

- Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que (x_n) est croissante et majorée. Qu'en déduire?
- Déterminer la limite de (x_n) .

ASYMPT 21 IMT

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note (E_n) l'équation $e^x = nx$, où $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que, pour tout $n \geq 3$, (E_n) admet exactement deux solutions, notées par la suite α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.

- Montrer que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geq 3$.
- Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 3}$.
- Déterminer la limite de (α_n) .
- Donner un équivalent simple de α_n en $+\infty$.
- Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n .

ASYMPT 22 IMT

On note I_n l'intervalle $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\sin(x) = e^{-x}$ admet une unique solution dans I_n , notée par la suite x_n . Qu'en est-il sur $\mathbb{R}^+$?
- Montrer que $x_n \rightarrow +\infty$.
- Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n .

ASYMPT 23

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\ln(x) + x = n$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

ASYMPT 24

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
- Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ASYMPT 25

Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^3 - nx + 1 = 0$ possède une unique solution x_n sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la limite et un développement asymptotique à deux termes significatifs de x_n .

ASYMPT 26

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Montrer que :

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right).$$

ASYMPT 27

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + n \sin(x) - 2 = 0$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.
- Montrer que la fonction :

$$f : \begin{cases} [0, \ln(2)[& \rightarrow [0, +\infty[\\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - e^x} \end{cases}$$

est une bijection.

- Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de f .
- Montrer que la fonction f^{-1} possède un développement limité en 0 à l'ordre 4 et le déterminer.
- Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.