

Séries numériques

Convergence

SERIES 1 CCINP

On considère la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. **Cas $\alpha \leq 0$** : en utilisant une minoration très simple de u_n , montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
2. **Cas $\alpha > 0$** : étudier la nature de la série $\sum u_n$.
Indication : on pourra introduire la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\alpha}$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

SERIES 2 CCINP

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

SERIES 3 CCINP

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que :

$$u_n \sim v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

2. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin(\frac{1}{n})}{\sqrt{n+3} - 1}$

SERIES 4 CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad v_n = u_n - \ln(n) \quad w_n = \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ existe et que $R_n \sim \frac{1}{n}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que (v_n) converge vers un réel γ .
3. Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum \alpha^{u_n}$.

SERIES 5 CCINP

Soit $u_0 > 0$. On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où $a, b > 0$.

1. On pose $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$. Quelle est la nature de la série $\sum v_{n+1} - v_n$?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.
3. On suppose cette condition vérifiée. Quelle est la nature de la série $\sum n(u_{n+1} - u_n)$?

SERIES 6 CCINP

Considérons une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Enoncer et redémontrer le théorème de sommation de relation de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.
3. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. En déduire un équivalent de u_n .

SERIES 7 CCINP

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

SERIES 8 CCINP

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ en fonction de a et b .

SERIES 9 IMT

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Déterminer un équivalent du reste (R_n) de cette série.

SERIES 10 IMT

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : t \mapsto \ln t - \arctan t - n\pi$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{n\pi} < x_n$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{x_n}$.

SERIES 11

Etudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$\frac{1}{(\ln(n))^n}$	$e^{-\sqrt{n}}$
$\frac{n^n}{n!}$	$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
$\frac{1}{\ln(n!)}$	$e^{-\sqrt{\ln(n)}}$
$1 - \text{th}(n)$	$\frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$
$\text{ch}(n^\alpha) - \text{sh}(n^\alpha)$	$\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}$
$\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^3}$	$\frac{n^\alpha (\ln(n))^n}{n!}$

SERIES 12 Mines

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$$

SERIES 13

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - a \ln(n)$$

soit convergente.

SERIES 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

On admet que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $y_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrer que l'on a accéléré la convergence (S_n) , au sens où :

$$\left(y_n - \frac{\pi^2}{6} \right) = o \left(S_n - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Effectuer une application numérique pour $n = 1000$.

SERIES 15

Soit $a > 0$, soit $f \in \mathcal{C}^1([a, 2a], \mathbb{R})$ vérifiant $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = f \left(\frac{n+1}{n} a \right).$$

SERIES 16

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier.
2. En déduire la nature de la série $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.
3. Plus généralement, soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $|a - \sqrt{b}| < 1$. Montrer que la série

$$\sum \sin(\pi(a + \sqrt{b})^n)$$

converge.

SERIES 17 Mines

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$.

SERIES 18 Mines

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et

$$v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

1. Montrer que la série de terme général $\sum v_n$ est convergente.
2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

SERIES 19 Centrale

Nature de la série $\sum \sqrt{\ln(n^2 + 1)} - \sqrt{\ln(n^2 + 1/2)}$.

SERIES 20 Mines

On considère la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$. Étudier la convergence de la série $\sum (1 - x_n)$.

SERIES 21 Mines

Existe-t-il une bijection $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ converge ?

SERIES 22 Mines

Soit (u_n) une suite réelle telle que la série $\sum n(\ln(n))^2 u_n^2$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

SERIES 23 Mines

Soient (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Étudier la nature de $\sum u_n$.

SERIES 24 Mines

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$.

1. À quelle condition la série de terme général $u_n = f(n)$ converge-t-elle ?
2. À quelle condition la suite de terme général $v_n = \prod_{k=1}^n f(k)$ converge-t-elle ?

SERIES 25 Mines

1. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [n, n+1]} |f'(t)|$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Séries alternées**SERIES 26 CCINP**

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge.
3. La série $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge-t-elle absolument ?

SERIES 27 CCINP

Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^n u_k$. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de $\ln(S_{n+1})$ et l'exprimer en fonction de $\ln(S_n)$.
- Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.
- En déduire que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- Pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, déterminer la limite de $\ln(S_{n+1})$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

SERIES 28 *IMT*

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.
Nature de $\sum u_n$? de $\sum (-1)^n u_n$?

SERIES 29

Etudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}} \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \\ \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)} \\ \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n} \\ \sin\left(\sqrt{1 + n^2 \pi^2}\right) \\ \sin\left(2\pi n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right)\right) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\ln(n) + \frac{(-1)^n n^\alpha}{(-1)^n}} \\ \frac{1}{n^{1/3} + (-1)^{n+1}} \\ (-1)^n \frac{\lfloor n^{1/2} \rfloor}{n} \\ \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + n^{1/3}}\right) \\ \sin\left(\pi n^3 \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)^2\right) \\ \cos\left(\pi n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1\right)\right) \end{array} \right\}$$

SERIES 30 *Mines*

Étudier la convergence de la série $\sum \sin(\pi e n!)$.

SERIES 31 *Mines*

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{x+2}} \geq 0$.
- En déduire la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

SERIES 32 *Mines*

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.
Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} u_n$?

SERIES 33 *Mines*

Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx$.

- Étudier le signe de u_n .
- Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

SERIES 34 *CCINP*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $b_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^2$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{b_n}$.

SERIES 35 *CCINP*

- Soient $a, b > 0$. Calculer $\int_a^b \frac{dt}{t^{3/2} + t^{1/2}}$.
On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la convergence de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2 \arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq R_n \leq 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Déterminer un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

SERIES 36

Déterminer un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

SERIES 37

- Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ converge vers un réel l .
- Déterminer un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ à la précision $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

SERIES 38

Déterminer un équivalent de la suite de terme général $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)}$.

SERIES 39

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

SERIES 40

Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}} = \ln(n) + c + o(1).$$

SERIES 41

Déterminer un développement asymptotique à deux termes significatifs de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

SERIES 42

Déterminer un développement asymptotique de précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$.

SERIES 43

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer un équivalent de :

$$\sum_{k=0}^n P(k).$$

SERIES 44 Mines

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

SERIES 45 Mines

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \min \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \geq n \right\}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est bien définie et tend vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de a_n .

SERIES 46 Centrale

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \min \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^\alpha} \geq n \right\}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est bien définie et tend vers $+\infty$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c + o(1).$$

3. En déduire un développement asymptotique de a_n à deux termes significatifs.

SERIES 47 Mines

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (u_n) converge.
2. Trouver alors un équivalent de $\ell - u_n$, où ℓ désigne la limite de la suite.
3. Donner un équivalent de u_n lorsque (u_n) diverge.

SERIES 48 Mines

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Montrer que $\sum f(k)$ converge et donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Calcul de sommes

SERIES 49

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

SERIES 50

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$.

SERIES 51 CCINP

Existence et calcul de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right).$$

SERIES 52

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

SERIES 53

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

SERIES 54

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3} \right)$.

SERIES 55

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

SERIES 56 Mines

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^n (1+u_k)}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

SERIES 57 Mines

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$. On pourra démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

SERIES 58

On définit pour tout $x > 1$:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \zeta_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Etablir une relation entre $\zeta(x)$ et $\zeta_a(x)$.

SERIES 59 Centrale

1. Montrer que la suite de terme général :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n)}{2}$$

converge.

2. Déterminer des réels r, s, t tels que pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = r \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + s \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} + t \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

3. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ en fonction de γ .

SERIES 60 Mines

Nature et somme de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Transformation d'Abel

SERIES 61

Soit (a_n) une suite de complexes, soit (b_n) une suite de réels positifs décroissante tendant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k. \text{ Supposons la suite } (A_n) \text{ bornée.}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

SERIES 62

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta).$$

1. Montrer que la suite (S_n) est bornée.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.
3. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \geq \cos^2(x)$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

SERIES 63 Navale

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

SERIES 64 Mines

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_n - u_{n+1}) \ln n$ converge.

SERIES 65 Mines

Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge, et que dans ce cas les deux séries ont même somme.

Exercices théoriques

SERIES 66 Mines

Soit (u_n) une suite de réels ne s'annulant pas telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Discuter de la convergence de la série $\sum u_n$ en fonction de α .

SERIES 67 Mines

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. On suppose qu'il existe $\lambda < 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$u_{n+1} = u_n + \lambda u_n^\alpha + o(u_n^\alpha).$$

Discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

SERIES 68 Centrale

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Montrer que l'on peut définir deux suites $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ telles que $p_1 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{p_n} \right\rfloor + 1$, $p_{n+1} = p_n q_n - 1$.
2. Montrer que (q_n) est croissante et minorée par 2.
3. Montrer que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_n}.$$

4. Montrer qu'il existe une unique suite (r_n) croissante et minorée par 2 telle que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r_1 \dots r_n}.$$

5. Montrer que x est rationnel si et seulement si (q_n) est stationnaire.

SERIES 69 Centrale

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$. On suppose que $a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1. Montrer que la série $\sum a_k^2$ diverge.
2. Déterminer un équivalent de a_n .

Indication : Appliquer une transformation d'Abel à la somme $\sum_{k=1}^n a_k^2 S_k^2$.

SERIES 70

Soit (z_n) une suite de complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$. On suppose que $\sum z_n$ et $\sum z_n^2$ convergent.

1. Montrer que la série $\sum |z_n|^2$ converge, mais que la série $\sum |z_n|$ peut diverger.
2. Que dire pour la série $\sum |z_n|^2$ si on ne suppose plus que $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

SERIES 71

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Peut-on en déduire que $\sum a_n$ converge ?
2. On suppose que $\sum a_n$ converge. Peut-on en déduire que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?
3. On suppose que la série $\sum a_n$ converge et que la suite (a_n) est décroissante. Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

SERIES 72

Soit (u_n) une suite de réels, soit $a > 0$. On suppose que la série $\sum u_n e^{-an}$ converge. Montrer que pour tout $x > a$, la série $\sum u_n e^{-xn}$ converge.

SERIES 73 Mines

Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

SERIES 74 X

Soit (a_n) une suite de complexes telle que la série $\sum |a_n|$ converge et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Familles sommables**SERIES 75**

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{n,m} = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{m^\beta}$. Pour quelles valeurs de α et β la famille $(u_{n,m})_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?

SERIES 76

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$$

est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

SERIES 77

Montrer que la série de terme général $u_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge et calculer sa somme.

SERIES 78

Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

SERIES 79

Soient $a, b > 0$. Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{a^n + b^m} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable ssi $a, b > 1$.

SERIES 80

Soit I un ensemble non vide. Notons $l^2(I)$ l'ensemble des familles de carré sommable :

$$l^2(I) = \{(u_i)_{i \in I} \mid \text{la famille } (|u_i|^2)_{i \in I} \text{ est sommable}\}.$$

1. Montrer que $l^2(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.
2. Montrer que $l^1(I) \subset l^2(I)$.

SERIES 81

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n.$$

SERIES 82 Mines

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .
Pour $\alpha > 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$.
2. Pour $\alpha > 2$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$.

SERIES 83

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ sont notées respectivement $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

1. Notons $I = \{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n|m\}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n^2 m^2} \right)_{(n,m) \in I}$ est sommable puis exprimer $\sum_{(n,m) \in I} \frac{1}{n^2 m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.
2. Notons $J = \{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n \wedge m = 1\}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n^2 m^2} \right)_{(n,m) \in J}$ est sommable puis exprimer $\sum_{(n,m) \in J} \frac{1}{n^2 m^2}$ à l'aide de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

SERIES 84

Etant données deux familles sommables $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, posons :

$$u \star v = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

1. Montrer que la loi $\star$ est bien définie et que pour toutes familles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, on a $u \star v \in l^1(\mathbb{Z})$ et :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u \star v)_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \right).$$

2. Montrer que la loi $\star$ possède un élément neutre.
3. L'ensemble $l^1(\mathbb{Z})$ muni de la loi $\star$ est-il un groupe ?

SERIES 85

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{m^2 n + n^2 m + 2mn} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme.

SERIES 86 Centrale

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls telle que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \implies |z_n - z_m| \geq 1.$$

Montrer que la série $\sum \frac{1}{z_3^n}$ est convergente.

SERIES 87 Mines

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

SERIES 88 X

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de carré sommable (ie telle que la série $\sum u_n^2$ converge).

1. Montrer que pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n u_{\sigma(n)}$ converge.

2. Supposons que (u_n) à termes positifs ou nuls. Calculer

$$\inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n u_{\sigma(n)} \mid \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}) \right\}.$$

SERIES 89 X

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k. \text{ Montrer que :}$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

En d'autres termes, si deux séries sont semi-convergentes, leur produit de Cauchy peut diverger, mais il converge au sens de Césaro vers le produit de leurs sommes.

SERIES 90

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer que :

$$\sum |a_n| \text{ converge} \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \sum a_{\sigma(n)} \text{ converge}.$$

2. Soit (c_n) une suite de nombres complexes non nuls. Montrer que :

$$\sum |c_n - 1| \text{ converge} \iff \exists a \in \mathbb{C}^*, \forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}), \prod_{k=0}^n c_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$