

Programme de colles n°2

Semaine du 21/09

Chapitre n°1 : Séries numériques, familles sommables

- Séries à termes positifs
 - Théorème de comparaison, nature des séries de Riemann, règle de d'Alembert, théorème de majoration.
 - Comparaison série-intégrale : aucun théorème à connaître, seule la technique de comparaison série-intégrale est à connaître.
- L'absolue convergence implique la convergence (séries à termes réelles ou complexes).
- Théorèmes de sommation des relations de comparaison. Le théorème de Césaro vu comme conséquence des théorèmes de sommation des relations de comparaison.
- Théorème des séries alternées, encadrement de la somme partielle, du reste, signe du reste. Les erreurs classiques (valeur absolue du terme général déclarée indûment décroissante, utilisation des théorèmes de comparaison pour des séries alternées, entre autres) ont toutes été faites à de multiples reprises en TD et ne devraient normalement plus l'être...
- Le principe de la transformation d'Abel a été vu mais n'est pas au programme. Il n'est pas interdit de donner des exercices utilisant la transformation d'Abel à condition de donner des indications assez rapidement.
- Familles sommables :
 - Caractérisation de la sommabilité par l'absolue convergence pour les suites, commutativité de la somme, linéarité de la somme, inégalité triangulaire, sommation par paquets, théorème de Fubini (notamment pour les familles indexées par $\mathbb{N}^2$) et produit de Cauchy.
 - Pour les familles de réels positifs ou nuls, la positivité est la seule justification attendue pour utiliser le théorème de sommation par paquets, le théorème de Fubini ou la commutativité de la somme. Pour les familles de complexes, la sommabilité est l'hypothèse attendue.
 - Définition de l'exponentielle complexe, exponentielle d'une somme.

NB : Je ne donne aucune démonstration de cours sur les familles sommables. Merci d'éviter les exercices trop théoriques sur cette notion, je préfère que les étudiants soient interrogés sur des exercices d'application du cours.

Je précise que la notion d'ensemble dénombrable n'a pas encore été vue (elle le sera plus tard, peu avant les probabilités).

Questions de cours :

1. Théorèmes de comparaison : si $u_n = O(v_n)$, si $v_n \geq 0$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Nature des séries de Riemann.
3. Règle de d'Alembert
4. Développement asymptotique de la série harmonique à la précision $o(1)$.
5. Théorème de sommation des relations de comparaison (pour les O , les o ou les équivalents au choix de l'examineur. NB : pour les équivalents, la démonstration vue en cours s'appuie sur le théorème de sommation des o).
6. Théorème des séries alternées avec encadrement de la somme partielle et du reste.
7. Une propriété de l'exponentielle : $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, e^{z+w} = e^z e^w$.