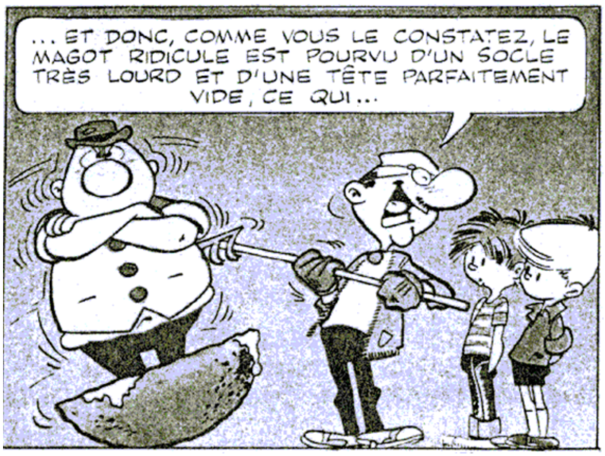
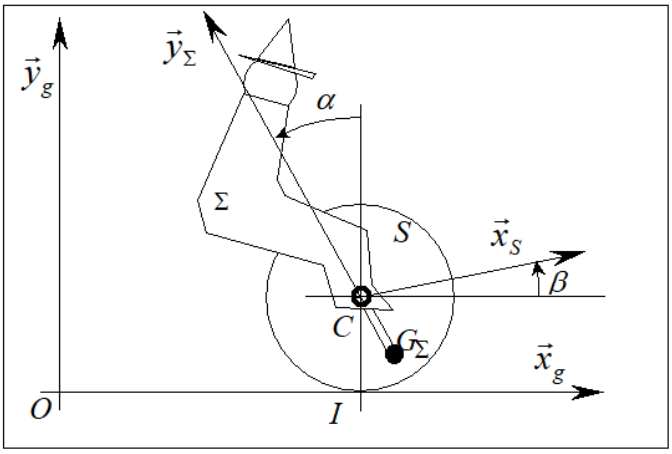
Clown culbuto

Objectif

— Déterminer les équations de mouvement du clown ;
— Déterminer la condition de roulement sans glissement.

1 Modélisation





Par souci de simplification, on se placera dans le cas où les mouvements restent dans le plan $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g)$, supposé référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ pour la circonstance.

Le clown est constitué de deux solides indéformables :

- une sphère creuse S, homogène, d'épaisseur négligeable, de masse m et de rayon r. Notons $\mathscr{B}_S(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_g)$ la base qui lui est associée.
- un solide Σ constitué du clown et d'une masselotte cachée dans la sphère S. Notons $\mathscr{B}_\Sigma(\vec{x}_\Sigma, \vec{y}_\Sigma, \vec{z}_g)$ la base qui lui est associée. Σ a son centre d'inertie en G_Σ tel que $\overrightarrow{G_\Sigma C} = d\,\vec{y}_\Sigma$ et sa masse vaut M

Les deux solides S et Σ sont en liaison pivot (supposée parfaite) d'axe $(C, \vec{z}_g)$.

La sphère reste en contact sur le sol horizontal au point I. L'action de contact s'exprime par le torseur : $\{T_{sol \to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} T\,\vec{x}_g + N\,\vec{y}_g \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$

L'accélération de la pesanteur vaut $-g\,\vec{y}_g$

Le mouvement de la sphère est paramétré par 2 angles et 1 distance :

$\alpha(t) = (\vec{x}_g, \vec{x}_\Sigma) = (\vec{y}_g, \vec{y}_\Sigma)$ est l'angle orientant le clown par rapport à $\mathscr{R}_g$

$\beta(t) = (\vec{x}_g, \vec{x}_S) = (\vec{y}_g, \vec{y}_S)$ est l'angle orientant la sphère par rapport à $\mathscr{R}_g$

$\lambda(t)$ est défini tel que $\overrightarrow{OI} = \lambda(t)\vec{x}_g$

2 Travail demandé

Q1. En supposant qu'il y ait roulement sans glissement en I de la sphère sur le sol, déterminer une relation algébrique liant les paramètres $\dot{\lambda}(t)$, $\dot{\beta}(t)$ et r.

Q2. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V}(G_\Sigma/\mathscr{R}_g)$ et l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(G_\Sigma/\mathscr{R}_g)$ du centre d'inertie G_Σ en fonction de $\dot{\alpha}(t)$, $\ddot{\alpha}(t)$, $\dot{\lambda}(t)$, $\ddot{\lambda}(t)$ et d.

Q3. Déterminer la matrice d'inertie en C du solide S : $[I(C,S)]$ en fonction des paramètres m et r.

Q4. Justifier la forme de la matrice en G_Σ du solide Σ : $[I(G_\Sigma,\Sigma)] = \begin{bmatrix} A_\Sigma & -F_\Sigma & 0 \\ -F_\Sigma & B_\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & C_\Sigma \end{bmatrix}_{(\mathscr{B}_\Sigma)}$.

Q5. Faire le bilan sous la forme d'un graphe de structure de toutes les actions mécaniques extérieures et intérieures au système.

Q6. Quelles équations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique permettent d'obtenir des équations de mouvement ?

Q7. Ecrire ces équations de mouvement.

Q8. Avec l'équation traduisant le roulement sans glissement en I, vous disposez d'un système de trois équations à trois inconnues (α, β, λ). Réduire le système de façon à former une équation différentielle ne faisant apparaître que la variable α.

Q9. Quelle équation scalaire issue du principe fondamental de la dynamique permet d'établir une relation entre T (composante tangentielle de l'action du sol) et les paramètres cinétiques, cinématiques et géométriques du système ?

Q10. Notons f le coefficient d'adhérence entre la sphère et le sol. Déterminer la fonction $f_{lim}(\alpha)$ où f_{lim} représente la valeur limite du coefficient d'adhérence garantissant le roulement sans glissement en I.