Equilibre statique et dynamique des rotors

Objectif

Les vibrations dues au mauvais équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe est un des phénomènes fréquemment rencontrés (roue de voiture, rotor de moteur...). Celles-ci peuvent engendrer une détérioration rapide des paliers (phénomène de fatigue), ou plus simplement créer une gêne à l'utilisateur du matériel. Nous allons rechercher l'origine des effets parasites dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, et la méthode pour y remédier, c'est à dire l'équilibrage statique et dynamique.

1 Modélisation

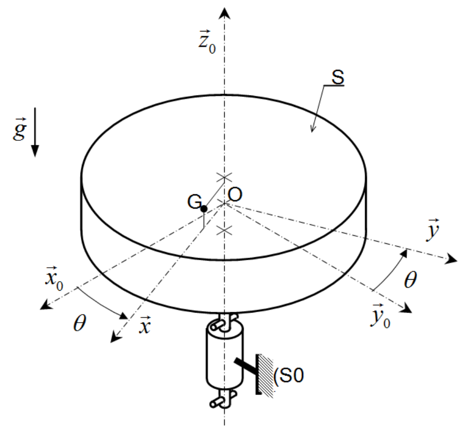
Notons $\mathscr{R}_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti S_0 où $\vec{z}_0$ représente la verticale ascendante.

Considérons un solide S de masse m, de centre d'inertie G, en liaison pivot sans frottement d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti S_0.

Notons $\mathscr{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)$ un repère lié à S tel que $\overrightarrow{OG}=a\,\vec{x}+c\,\vec{z}_0$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^+$. Posons $\theta(t)=(\vec{x}_0,\vec{x})$.

Le solide S étant quelconque, sa matrice d'inertie au point O dans la base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)$ est de la forme :

$$\left[\overline{\overline{I}}(O,S)\right]=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$$



2 Travail demandé

Etude dynamique

Le solide S est lancé en rotation tel qu'à l'instant t = 0 : $\theta=0$ et $\dot{\theta}=\omega$ avec $\omega\in\mathbb{R}^+$.

Q1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide S. En déduire l'équation de mouvement.

Q2. Exprimer les composantes du torseur d'action mécanique de la liaison pivot dans la base $\mathscr{B}_0$ Puis conclure.

Équilibrage du solide S

But

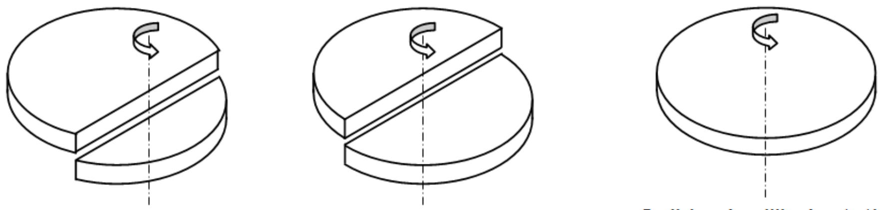
Le but de l'équilibrage est de rendre les efforts de liaison indépendants de la position et de la vitesse de rotation du solide S par rapport au bâti.

Le principe consiste à :

— Amener le centre d'inertie G sur l'axe de rotation $(O,\vec{z}_0)$. On réalise ainsi **l'équilibrage statique du solide**.

— Annuler les produits d'inertie D et E, ce qui revient à rendre l'axe $(O,\vec{z}_0)$ axe principal d'inertie. On réalise ainsi **l'équilibrage dynamique du solide**.

Exemple :



Solide non équilibré — Solide équilibré statiquement — Solide équilibré statiquement et dynamiquement

Méthode

L'équilibrage peut être réalisé soit en fixant deux masselottes sur le solide S (roues de voitures...), soit en enlevant de la matière au solide (roues de trains, vilebrequins de moteurs...).

Dans le cas d'enlèvement de matière, l'étude suivante sera menée en affectant aux masselottes une « masse négative ».

Dans le but de simplification, on assimilera ces masselottes S_1 et S_2 à des masses ponctuelles concentrées respectivement aux points M_1 et M_2.

- Masselotte S_1 de masse m_1 : $\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}_0$
- Masselotte S_2 de masse m_2 : $\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}_0$

Équilibrage statique de l'ensemble $\Sigma(S, S_1, S_2)$

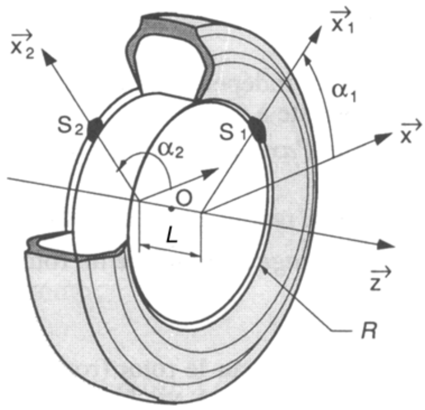
Q3. Exprimer les deux relations algébriques traduisant le fait que le centre d'inertie de l'ensemble Σ soit sur l'axe $(O, \vec{z}_0)$.

Équilibrage dynamique de l'ensemble $\Sigma(S, S_1, S_2)$

Q4. Exprimer les deux relations algébriques traduisant le fait que les produits d'inertie D_Σ et E_Σ de l'ensemble Σ soient nuls.

Q5. Justifier le fait que l'équilibrage ne puisse pas être réalisé avec une seule masselotte.

A ce stade de l'étude, on constate que l'on a huit inconnues $(m_1, m_2, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ pour quatre équations. Il existe donc une infinité de solutions pour réaliser l'équilibrage.



Dans la pratique on rencontre fréquemment des contraintes pour la fixation des masselottes. C'est le cas pour l'équilibrage des roues de voiture, les masselottes devant être fixées sur le pourtour de la jante, et sur les flancs intérieur et extérieur de celle-ci (voir figure ci-contre).

Notons R le rayon de la jante et L sa largeur.

Appelons H_i la projection orthogonale du point M_i sur l'axe $\vec{z}_0$ $\left(\overrightarrow{OH_1} = \frac{L}{2}\vec{z}_0\,;\ \overrightarrow{OH_2} = -\frac{L}{2}\vec{z}_0\right)$ et posons : $\theta_i = (\vec{x}, \overrightarrow{H_iM_i})$

Q6. Exprimer les quatre équations précédentes en fonction des inconnues m_1, m_2, θ_1, θ_2.

Q7. Résoudre le système d'équations.