DYNAMIQUE

Référence programme

MODELISER

- **Identifier et caractériser les grandeurs physiques**
  - Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance ;
  - Identifier les pertes d'énergie ;
  - Évaluer le rendement d'une chaine d'énergie en régime permanent ;
  - Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide ;
  - Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.
- **Proposer un modèle de connaissance et de comportement**
  - Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide ;
  - Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide.

RESOUDRE

- **Proposer une démarche de résolution**
  - Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement ;
  - Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison ;
  - Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- **Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique**
  - Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas où le mouvement est imposé ;
  - Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus ;
  - Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

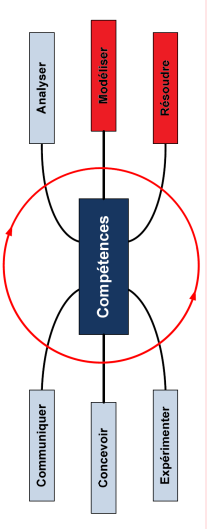


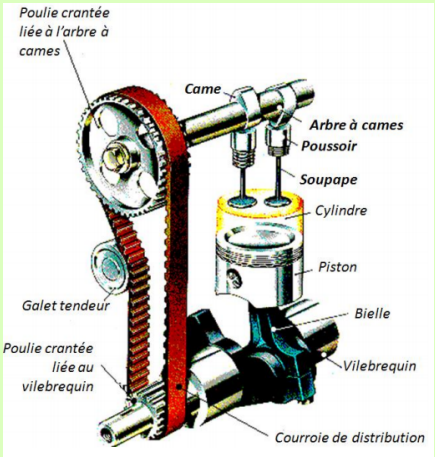
Table des matières

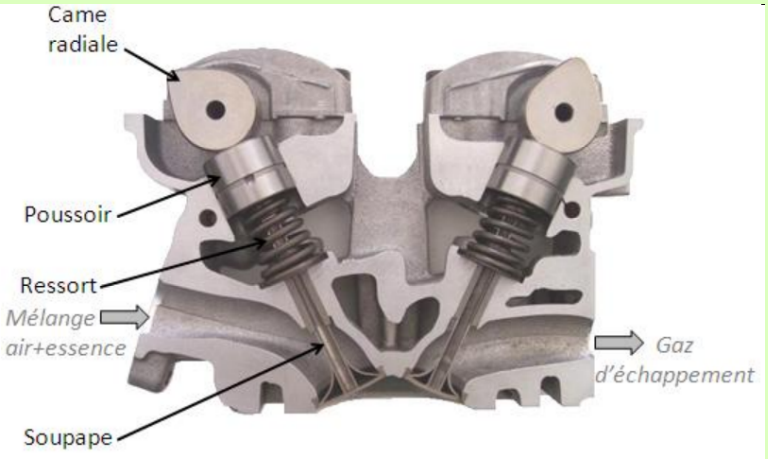
1 Support de cours : Système de distribution d'un moteur 4 temps . . . 3
1.1 Présentation . . . 3
1.2 Modèle de l'étude . . . 3
2 Caractères d'inertie des solides . . . 4
2.1 Centre d'inertie . . . 4
2.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe . . . 6
2.3 Opérateur d'inertie, matrice d'inertie . . . 7
2.4 Base principale d'inertie . . . 7
2.5 Théorème de Huyghens . . . 9
3 Cinétique . . . 11
3.1 Torseur cinétique . . . 11
3.2 Torseur dynamique . . . 14
4 Principe Fondamental de la Dynamique . . . 16
4.1 Définition . . . 16
4.2 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen . . . 16
4.3 Espaces galiléens « approchés » . . . 17
4.4 Théorèmes généraux de la dynamique . . . 17
4.5 Théorème des actions mutuelles . . . 18
5 Energétique . . . 20
5.1 Energie cinétique . . . 20
5.2 Puissance . . . 21
5.3 Théorème de l'énergie cinétique . . . 24
5.4 Notion de rendement . . . 25
6 Bilan . . . 27

1 Support de cours : Système de distribution d'un moteur 4 temps

1.1 Présentation

Le système de distribution automobile permet l'admission du mélange gaz frais (air + carburant) et le refoulement des gaz d'échappement lors du cycle 4 temps d'un moteur thermique.





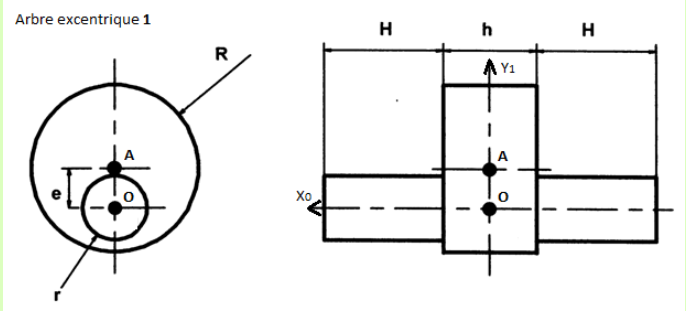
Le vilebrequin (arbre moteur) entraine en rotation l'arbre à came par l'intermédiaire d'une transmission poulie/courroie crantée (courroie de distribution). Le mouvement de rotation continue de l'arbre à cames est ensuite transformé en un mouvement de translation alternative de l'ensemble poussoir + soupape.

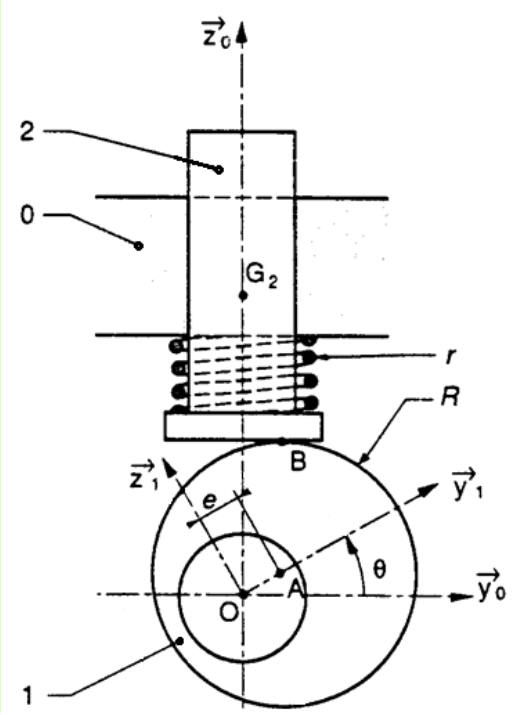
Par la suite, nous nous intéresserons au comportement dynamique du dispositif de transformation de mouvement par came. Pour simplifier l'étude, nous l'assimilerons à un dispositif de transformation de mouvement par excentrique (came circulaire).

1.2 Modèle de l'étude

Exemple

Un arbre excentrique **1**, constitué de 3 cylindres (voir figure ci-dessous) est guidé en rotation par rapport au bâti **0** autour de l'axe horizontal $(O, \vec{x}_0)$. L'excentrique agit sur le poussoir **2** en liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti **0**. Le poussoir est maintenu en contact ponctuel (liaison sphère/plan)de normale $(B, \vec{z}_0)$ avec l'arbre excentrique par un ressort r.





Exemple

Paramétrage :

— Le repère $\mathscr{R}_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti est supposé galiléen ;

— Le repère $\mathscr{R}_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à l'arbre excentrique. On pose :

  — $\theta(t)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$;

  — $\overrightarrow{OA}=e\,\vec{y}_1$;

  — $\overrightarrow{AB}=R\,\vec{z}_0$;

— La liaison pivot entre **0** et **1** ainsi que la liaison pivot glissant entre **0** et **2** sont supposées sans frottement. On notera f le coefficient de frottement associé à la liaison sphère/plan entre **1** et **2** ;

— L'arbre excentrique **1** est supposé homogène de masse volumique μ ;

— Le poussoir **2** de centre d'inertie G_2 a une masse m_2 ;

— Le ressort r de raideur k, est toujours comprimé. Pour $\theta=0$ l'effort de compression est égal à F_0 ;

— Un moteur exerce un couple connu de moment $C\,\vec{x}_0$ sur l'arbre **1** ;

— L'inertie du rotor du moteur est négligée devant celle de l'arbre excentré 1 ;

— Les poids des pièces sont négligés devant les actions mécaniques de contact.

2 Caractères d'inertie des solides

2.1 Centre d'inertie

Définition

On appelle centre d'inertie d'un système matériel **E** le point unique G défini par la relation :

$$\boxed{\int_{P\in E}\overrightarrow{GP}\,dm=\vec{0}}$$ (P décrivant le système **E**).

Position du centre d'inertie

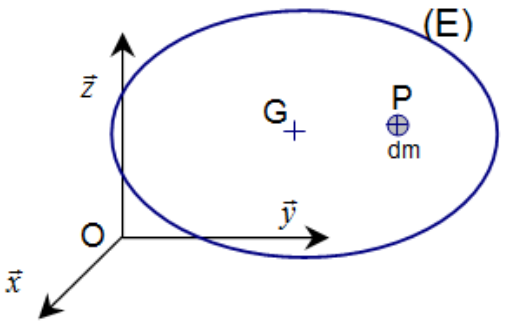
Considérons un point O quelconque :

$$\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OP}\right)dm=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\,dm-\int_{P\in E}\overrightarrow{OG}\,dm=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OG}\int_{P\in E}dm=\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\,dm\Rightarrow$$

$$\boxed{m_E\overrightarrow{OG}=\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\,dm}$$



Remarque : Si E est un solide alors G est un point fixe de ce solide.

Associativité

Si le système matériel **E** est constitué de n sous-systèmes disjoints **Ei** de masse est de centre d'inertie respectivement m_i et G_i, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\boxed{\left(\sum_1^n m_i\right)\overrightarrow{OG}=\sum_1^n\left(m_i\overrightarrow{OG_i}\right)}$$

Symétrie matérielle

Si un système matériel possède un élément de symétrie (symétrie du point de vue géométrique et de la répartition des masses) tel qu'un plan ou un axe, le centre d'inertie appartient à cet élément. Ainsi avant entreprendre tout calcul, il est vivement conseillé de rechercher si de tels éléments existent.

Centre d'inertie = Centre de gravité ?

L'action mécanique de pesanteur appliquée à un système **E** peut être définie par le torseur :

$$\{\mathscr{T}(gravite \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{c} \int\limits_{P\in E} \vec{g}\,dm \\ \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1P} \wedge \vec{g}\,dm \end{array} \right\}_{G_1}$$ avec $\int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1P} \wedge \vec{g}\,dm = \vec{0}$ si G_1 est le centre de gravité de l'ensemble matériel **E**.

par conséquent : $\int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1G} \wedge \vec{g}\,dm + \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{g}\,dm = \vec{0}$

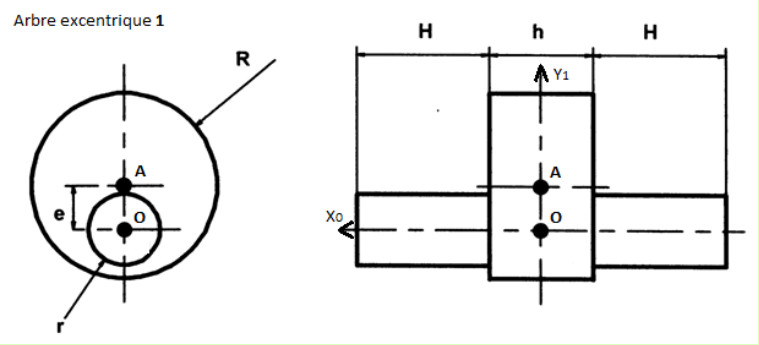
Si $\vec{g}$ est constant au voisinage de **E** il vient : $\int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1G}\,dm \wedge \vec{g} + \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{GP}\,dm \wedge \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1G}\,dm + \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{GP}\,dm = \vec{0}$

Si G représente le centre d'inertie de **E** ont obtient finalement : $\int\limits_{P\in E} \overrightarrow{G_1G}\,dm = \vec{0}$

Pour un système matériel E plongé dans un champ de pesanteur uniforme, le centre d'inertie G est confondu avec le centre de gravité G_1.

Exemple

Q1. Déterminer le centre d'inertie G_1 de l'arbre excentrique **1** ?



Le volume est homogène est présente 2 plans de symétrie $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
Nous pouvons alors dire que G_2 se situe sur l'axe $(O, \vec{y}_1)$ (entre O et A).

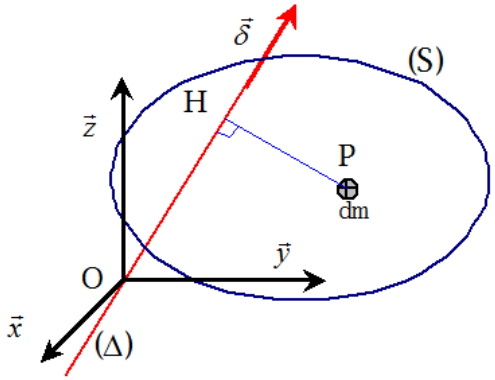
La formule du barycentre nous alors : $\rho(2\pi r^2 H + \pi R^2 h)\overrightarrow{OG_1} = \rho\pi R^2 h\overrightarrow{OA} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG_1} = \dfrac{R^2 he}{2r^2H + R^2h}\vec{y}_1}$

2.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Considérons un repère $\mathscr{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un axe $\Delta(O,\vec{\delta})$; $\vec{\delta}$ vecteur unitaire.

Notons P un point quelconque d'un solide **S** de masse m et H sa projection orthogonale sur Δ.

Posons : $\begin{cases} \overrightarrow{OP} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{\delta} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} \end{cases}$



Définition

On appelle moment d'inertie du solide **S** par rapport à l'axe Δ la quantité positive :

$\boxed{I_\Delta(S) = \int_S \left(\overrightarrow{HP}\right)^2 dm}$ que l'on peut également exprimer par $\boxed{I_\Delta(S) = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 dm}$

$$\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP} = (\beta Z - \gamma Y)\vec{x} + (\gamma X - \alpha Z)\vec{y} + (\alpha Y + \beta X)\vec{z} \Rightarrow$$

$$\left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 = (\beta Z - \gamma Y)^2 + (\gamma X - \alpha Z)^2 + (\alpha Y + \beta X)^2 \Rightarrow$$
$$\left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 = \alpha^2(Y^2+Z^2) + \beta^2(X^2+Z^2) + \gamma^2(Y^2+X^2) - 2\beta\gamma YZ - 2\gamma\alpha XZ - 2\alpha\beta XY \Rightarrow$$

$$I_\Delta(S) = \alpha^2 \int_S (Y^2+Z^2)dm + \beta^2 \int_S (X^2+Z^2)dm + \gamma^2 \int_S (Y^2+X^2)dm - 2\beta\gamma \int_S YZ\,dm - 2\gamma\alpha \int_S XZ\,dm - 2\alpha\beta \int_S XY\,dm$$

On pose habituellement :

$$\begin{cases} A = I_{Ox}(S) = \int_S (Y^2+Z^2)dm \\ B = I_{Oy}(S) = \int_S (X^2+Z^2)dm \\ C = I_{Oz}(S) = \int_S (X^2+Y^2)dm \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D = P_{Oyz}(S) = \int_S YZ\,dm \\ E = P_{Oxz}(S) = \int_S XZ\,dm \\ F = P_{Oxy}(S) = \int_S XY\,dm \end{cases}$$

— A, B, C sont les moments d'inertie de **S** respectivement par rapportaux axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$, $(O,\vec{z})$.
— D, E, F sont les produits d'inertie de **S** respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$, $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{z})$, $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{y})$.

Remarque

— Les produits d'inertie caractérisent l'absence de symétrie de la répartition des masses. Ce sont des termes qui vont créer des effets de balourd perpendiculairement à l'axe autour duquel le solide tourne. Par exemple, la rotation autour de l'axe $(O,\vec{x})$ engendre des effets autour des axes $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ caractérisés respectivement par les produits d'inertie : E et F et
— Si le point O et la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont fixes par rapport à **S**, alors les quantités A, B, C, D, E, F sont constantes au cours du temps.

2.3 Opérateur d'inertie, matrice d'inertie

$I_\Delta(S)=\int_S \left(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP}\right)^2 dm=\int_S(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})\cdot(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})dm$

Si l'on considère que $(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})\cdot(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})$ est un produit mixte $\left(\vec{\delta},\overrightarrow{OP},(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})\right)$ alors

$I_\Delta(S)=\int_S \vec{\delta}\cdot\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})dm=\vec{\delta}\cdot\int_S\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})dm$

Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie du solide **S** en un point O est l'opérateur linéaire qui, à tout vecteur $\vec{\delta}$ fait correspondre le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta})=\int_S \overrightarrow{OP}\wedge(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP})dm}$$

Remarque : l'opérateur d'inertie est aussi appelé **tenseur d'inertie**.

Matrice d'inertie

$$\overrightarrow{OP}\wedge\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{U}\Rightarrow\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta})$$

$$\left|\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right._{\mathscr{B}}\quad\left|\begin{matrix}\beta Z-\gamma Y\\\gamma X-\alpha Z\\\alpha Y-\beta X\end{matrix}\right._{\mathscr{B}}\quad\left|\begin{matrix}\alpha Y^2-\beta XY-\gamma XZ+\alpha Z^2\\\beta Z^2-\gamma YZ-\alpha XY+\beta X^2\\\gamma X^2-\alpha XZ-\beta YZ+\gamma Y^2\end{matrix}\right._{\mathscr{B}}\quad\left|\begin{matrix}\alpha A-\beta F-\gamma E\\-\alpha F+\beta B-\gamma D\\-\alpha E-\beta D+\gamma C\end{matrix}\right._{\mathscr{B}}$$

L'opérateur d'inertie étant linéaire, il peut être représenté par une matrice :

$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta})=\overline{\overline{I}}_O(S)\cdot\vec{\delta}\text{ avec }\boxed{\left[\overline{\overline{I}}_O(S)\right]=\begin{bmatrix}A&-F&-E\\-F&B&-D\\-E&-D&C\end{bmatrix}_{\mathscr{B}}}$$

Remarque

- La matrice d'inertie du solide **S** au point O, relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, s'obtient en disposant en colonnes les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de base par l'opérateur d'inertie.
- Les moments d'inertie du solide **S** par rapport aux axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ apparaissent sur la diagonale.
- L'opérateur d'inertie est symétrique
- Le moment d'inertie par rapport à un axe $\Delta(O,\vec{\delta})$ peut alors se calculer de la façon suivante : $I_\Delta(S)=\vec{\delta}\cdot\overline{\overline{I}}_O(S)\cdot\vec{\delta}$

2.4 Base principale d'inertie

Définition

Comme la matrice d'inertie est réelle est symétrique, Il existe au moins une base orthonormée directe, appelée base principale d'inertie, dans laquelle les produits d'inerties sont nuls.

- Les vecteurs propres de la matrice ont même direction que ceux de la base principale d'inertie (axes principaux d'inertie).
- Les moments d'inertie sont les valeurs propres (moments principaux d'inertie).

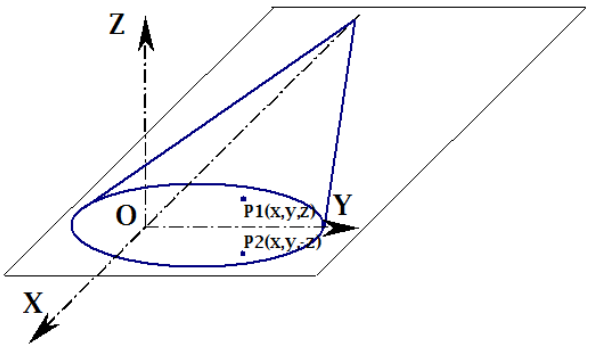
Symétries matérielles du solide

Pour avoir une matrice d'inertie la plus simple possible, il faut choisir le point et la base d'expression en tenant compte des plans, axes ou centres de symétrie matérielle.

— Si le solide **S** admet le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ comme plan de symétrie alors les deux produits d'inertie D et E sont nuls. La matrice d'inertie du solide **S** exprimée au point O est de la forme dans la base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$[I_O(S)] = \underset{\mathscr{B}}{\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}$$

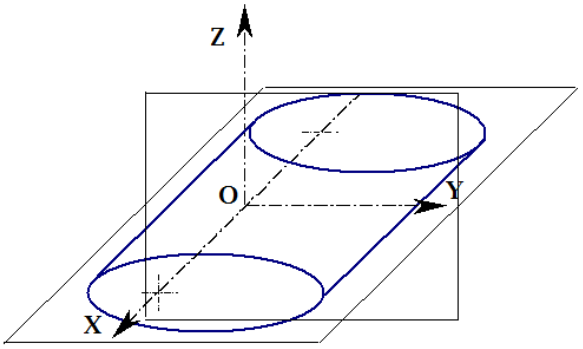
L'axe $(O,\vec{z})$ est un axe principal d'inertie.



— Si le solide **S** présente 2 plans de symétrie $(O,\vec{x},\vec{y})$ et $(O,\vec{y},\vec{z})$ alors tous les deux produits d'inertie sont nuls. La matrice d'inertie du solide **S** exprimée au point O est diagonale dans la base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

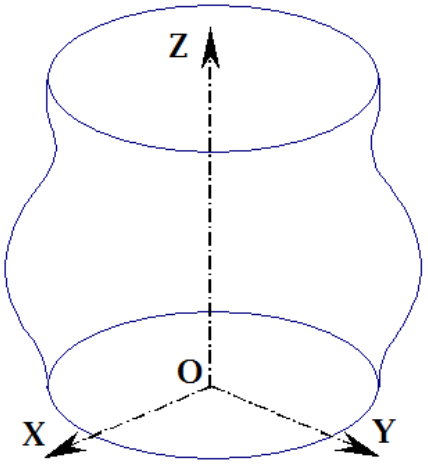
$$[I_O(S)] = \underset{\mathscr{B}}{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}$$

la base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une base principal d'inertie.



— Si le solide **S** présente 1 axe de révolution $(O,\vec{z})$ alors la matrice d'inertie du solide **S** exprimée au point O est diagonale dans toutes les base comportant l'axe $\vec{z}$:

$$[I_O(S)] = \underset{(-,-,\vec{z})}{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}$$



Exemple

Q2. Déterminer la matrice d'inertie en A dans la base du repère $\mathscr{R}_1$ du cylindre homogène de rayon R et de hauteur h.

Comme le volume a pour axe de révolution $(A,\vec{x}_0)$, la matrice d'inertie sera de la forme :

$$[I_A(S)] = \underset{(\vec{x}_0,-,-)}{\begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & B_S \end{bmatrix}}$$

Exemple

Calcul de A_S :

$A_S = \int_S (y^2+z^2)dm = \int_S \rho^2 dm$ avec $dm = \mu\rho\, d\rho\, d\alpha\, dx$ et $\rho \in [0,R]$, $\alpha \in [0,2\pi]$, $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$

$$A_S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \mu\rho\, d\rho\, d\alpha\, dx = 2\pi\mu h \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi\mu h \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi\mu h R^4}{2}$$

Sachant que la masse du cylindre est $m_s = \mu\pi R^2 h$, nous obtenons : $\boxed{A_S = m_S \frac{R^2}{2}}$

Calcul de B_S :

$2B_S = \int_S (x^2+z^2)dm + \int_S (x^2+y^2)dm = 2\int_S x^2 dm + \int_S (y^2+z^2)dm = 2\int_S x^2 dm + A_S$

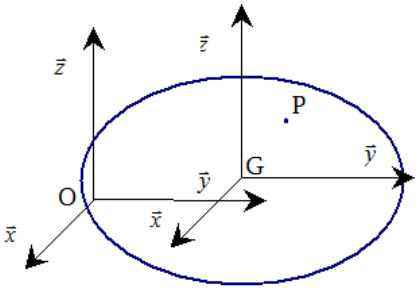
$$\int_S x^2 dm = \mu\pi R^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dx = \mu\pi R^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\mu\pi R^2 h^3}{12} = \frac{m_S h^2}{12}$$

Nous obtenons alors : $\boxed{B_S = m_S\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)}$

2.5 Théorème de Huyghens

Recherchons la relation liant l'opérateur d'inertie réduit à un point O quelconque et au centre d'inertie G.

Considérons un point P de **S**.



$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta}) = \int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right)\right) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right)\right) dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta}) = \int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OG}\right) dm + \int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OG}\right) dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta}) = m\overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OG}\right) + \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \int_S \overrightarrow{GP} dm\right) + \int_S \overrightarrow{GP} dm \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OG}\right) + \overrightarrow{J_G}(S,\vec{\delta})$$

G étant le centre d'inertie du solide S alors $\int_S \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$.

Il reste : $\boxed{\overrightarrow{J_O}(S,\vec{\delta}) = m\overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OG}\right) + \overrightarrow{J_G}(S,\vec{\delta})}$

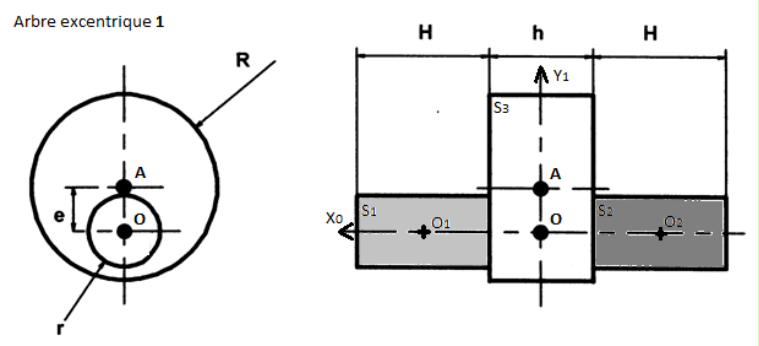
Dans la base $\mathscr{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, en posant $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$, les matrices d'inertie en O et en G sont liées par :

$$[I_O(S)] = [I_G(S)] + [I_O(mG)]$$

$$_{\mathscr{B}}\begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix} = {}_{\mathscr{B}}\begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix} + m\,{}_{\mathscr{B}}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

Q3. Calculer le moment d'inertie de l'arbre excentrique par rapport à l'axe de rotation $(O, \vec{x}_0)$.

On décompose le solide en 3 volumes pour lesquels on connait les éléments d'inerties (voir question précédente).



Calcul de A_1 :

D'après le théorème de Huyghens :

$$I_{Ox_0}(1) = I_{Ox_0}(S_1) + I_{Ox_0}(S_2) + I_{Ox_0}(S_3) \text{ avec } \begin{cases} I_{Ox_0}(S_1) = I_{O_1x_0}(S_1) = \mu\dfrac{\pi r^4 H}{2} \\ I_{Ox_0}(S_2) = \mu\dfrac{\pi r^4 H}{2} \\ I_{Ox_0}(S_3) = I_{Ax_0}(S_3) + \mu\pi R^2 h e^2 = \mu\pi R^2 h\left(\dfrac{R^2}{2} + e^2\right) \end{cases}$$

Finalement : $\boxed{A_1 = I_{Ox_0}(1) = \mu\pi\left(r^4 H + R^2 h\left(\dfrac{R^2}{2} + e^2\right)\right)}$

Q4. Calculer les autres éléments de la matrice d'inertie de l'arbre excentrique **1** au point O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Le volume est homogène est présente 2 plans de symétrie $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

La matrice d'inertie du solide 1 sera diagonale en O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$[I_O(1)] = {}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

En utilisant la même démarche que pour le calcul de A_1, nous obtenons :

$$B_1 = I_{Oy_1}(1) = I_{Oy_1}(S_1) + I_{Oy_1}(S_2) + I_{Oy_1}(S_3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} I_{Oy_1}(S_1) = I_{O_1y_1}(S_1) + \mu\pi r^2 H\dfrac{(H+h)^2}{4} = \mu\dfrac{\pi r^2 H}{4}\left(\dfrac{H^2}{3} + r^2 + (H+h)^2\right) \\ I_{Oy_1}(S_2) = \mu\dfrac{\pi r^2 H}{4}\left(\dfrac{H^2}{3} + r^2 + (H+h)^2\right) \\ I_{Oy_1}(S_3) = I_{Ay_1}(S_3) = \mu\dfrac{\pi R^2 h}{4}\left(\dfrac{h^2}{3} + R^2\right) \end{cases}$$

Exemple

Exemple

Finalement : $\boxed{B_1 = I_{Oy_1}(1) = \mu\pi\left(\frac{r^2H}{2}\left(\frac{H^2}{3}+r^2+(H+h)^2\right)+\frac{R^2h}{4}\left(\frac{h^2}{3}+R^2\right)\right)}$

De même : $\boxed{C_1 = I_{Oz_1}(1) = \mu\pi\left(\frac{r^2H}{2}\left(\frac{H^2}{3}+r^2+(H+h)^2\right)+\frac{R^2h}{4}\left(\frac{h^2}{3}+R^2+e^2\right)\right)}$

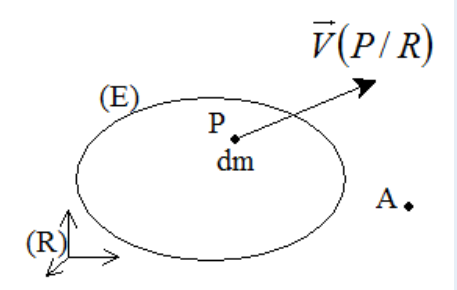
3 Cinétique

3.1 Torseur cinétique

Définition

Le système matériel **E** peut être considéré comme un ensemble de points P, chacun de masse élémentaire dm. Lorsque cet ensemble est en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$, on définit la quantité de mouvement élémentaire d'un point P par rapport au repère $\mathscr{R}$ par le vecteur $\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm$.

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel **E** dans son mouvement par rapport au repère $\mathscr{R}$ s'exprime en un point A quelconque par :



$$\boxed{\{\mathscr{C}(E/\mathscr{R})\} = \left\{\begin{array}{c}\int\limits_{P\in E}\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \\ \int\limits_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm\end{array}\right\}_A}$$

3.1.1 Résultante cinétique ou quantité de mouvement

Si O est l'origine du repère $\mathscr{R}$, la position du centre d'inertie G de l'ensemble matériel **E** est donné par la relation :

$$m_E\overrightarrow{OG} = \int\limits_{P\in E}\overrightarrow{OP}dm \Rightarrow \left[\frac{dm_E\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \left[\frac{d\int\limits_{P\in E}\overrightarrow{OP}dm}{dt}\right]_{\mathscr{R}} \Rightarrow m_E\left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \int\limits_{P\in E}\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{\mathscr{R}}dm \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{R}_c(E/\mathscr{R}) = \int\limits_{P\in E}\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm = m_E\vec{V}(G/\mathscr{R})}$$ (dimension : $M\cdot L\cdot T^{-1}$)

Pour un ensemble **E** formé de n éléments disjoints **ei** respectivement de masses m_i et des centres d'inertie G_i, la résultante cinétique a pour expression :

$$\boxed{m_E\vec{V}(G/\mathscr{R}) = \sum_1^n\left(m_i\vec{V}(G_i/\mathscr{R})\right)}$$

3.1.2 Moment cinétique

La quantité $\boxed{\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm}$ est appelé moment cinétique en A de l'ensemble matériel **E** dans son mouvement par rapport à$\mathscr{R}$ (dimension : $M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$).

Champ de moment :

$$\overrightarrow{\sigma}(B,E/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\sigma}(B,E/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\sigma}(B,E/\mathscr{R}) = \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R}) \Rightarrow$$
$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(B,E/\mathscr{R}) = \overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \vec{V}(G/\mathscr{R})}$$

Les éléments de réductions du torseur cinétique vérifient bien la relation de champ de moments d'un torseur.

Cas particulier du solide :

Considérons un solide **S** de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$

Considérons un point A quelconque.

$$\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} dm \wedge \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) + \overline{\overline{I}}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \Rightarrow$$
$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) + \overline{\overline{I}}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})}$$

Remarque

- Si A peut être un point quelconque de l'espace, $\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})$ représente la vitesse d'entrainement de ce point dans le mouvement de **S** par rapport à $\mathscr{R}$;
- Pour effectuer le produit matriciel $\overline{\overline{I}}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})$ il faut exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})$ dans la même base que la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}(A,S)$.
- Si $\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R}) = \overline{\overline{I}}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})}$
- Si A est confondu avec $G \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\sigma}(G,S/\mathscr{R}) = \overline{\overline{I}}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})}$

Exemple

Q5. Calculer le torseur cinétique au point O du mouvement de l'arbre excentrique **1** par rapport au bâti **O**.

Calcul de la résultante cinétique :

$\overrightarrow{R}_c(1/0) = m_1\vec{V}(G_1/0)$ ou $\overrightarrow{R}_c(1/0) = \sum_1^3 \left(m_i\vec{V}(G_i/0)\right)$

Comme les vitesse des centres d'inertie O_1 et O_2 respectivement des volumes S_1 et S_2 sont nulles, nous allons utiliser la seconde expression.

$\overrightarrow{R}_c(1/0) = \mu\pi R^2 h\cdot\vec{V}(A/0)$ avec $\vec{V}(A/0) = \vec{V}(O/0) + \overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{\Omega}(1/0) = e\dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{R}_c(1/0) = \mu\pi R^2 h e\dot{\theta}(t)\vec{z}_1 = m_{S_3}\dot{\theta}(t)\vec{z}_1}$

Calcul du moment cinétique :

Comme $\overrightarrow{V}(O\in 1/0) = \vec{0}$,nous utiliserons l'expression simplifiée :

$\overrightarrow{\sigma}(O,1/0) = \overline{\overline{I}}(O,1)\cdot\overrightarrow{\Omega}(1/0)$ avec $[I_O(1)] = {}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}(t)\vec{x}_0 \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O,1/0) = A_1\dot{\theta}(t)\vec{x}_0}$

Finalement : $\boxed{\{\mathscr{C}(1/0)\} = \left\{\begin{matrix} m_{S_3}\dot{\theta}(t)\vec{z}_1 \\ A_1\dot{\theta}(t)\vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_O}$

Q6. Calculer le torseur cinétique au point O du mouvement du poussoir **2** par rapport au bâti **O**.

Calcul de la résultante cinétique :

$\overrightarrow{R}_c(2/0) = m_2\vec{V}(G_2/0)$ avec $\vec{V}(G_2/0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d(e\sin(\theta)+R+a)\vec{z}_0}{dt}\right]_0 = e\cos(\theta)\dot{\theta}(t)\vec{z}_0$

Calcul du moment cinétique :

Comme O n'est ni un point fixe dans le mouvement de **2/0** ni le centre d'inertie de **2**, nous allons utiliser l'expression générale :

$\overrightarrow{\sigma}(O,2/0) = m\overrightarrow{OG_2}\wedge\overrightarrow{V}(O\in 2/0) + \overline{\overline{I}}(O,2)\cdot\overrightarrow{\Omega}(2/0)$

Le mouvement de **2/0** étant une translation ($\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \vec{0}$) de direction $\vec{z}_0$ ($\overrightarrow{OG_2} \backslash\backslash \overrightarrow{V}(O\in 2/0)$) le moment cinétique est nul au point O.

Finalement : $\boxed{\{\mathscr{C}(2/0)\} = \left\{\begin{matrix} m_2 e\cos(\theta)\dot{\theta}(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_O}$

3.2 Torseur dynamique

Définition

Le système matériel **E** peut être considéré comme un ensemble de points P, chacun de masse élémentaire dm. Lorsque cet ensemble est en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$, on définit la quantité d'accélération élémentaire d'un point P par rapport au repère $\mathscr{R}$ par le vecteur $\overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm$.

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel **E** dans son mouvement par rapport au repère $\mathscr{R}$ s'exprime en un point A quelconque par :

$$\boxed{\{\mathscr{D}(E/\mathscr{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm \\ \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm \end{array} \right\}_A}$$

3.2.1 Résultante dynamique

En utilisant la même démarche que pour le calcul de la résultante cinétique nous obtenons :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_d(E/\mathscr{R}) = \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm = m_E\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R})} \text{ (dimension : } M\cdot L\cdot T^{-2}\text{)}$$

Pour un ensemble **E** formé de n éléments disjoints **ei** respectivement de masses m_i et des centres d'inertie G_i, la résultante cinétique a pour expression :

$$\boxed{m_E\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R}) = \sum_1^n \left(m_i\vec{\Gamma}(G_i/\mathscr{R})\right)}$$

3.2.2 Moment dynamique

La quantité $\boxed{\overrightarrow{\delta}(A,E/\mathscr{R}) = \int\limits_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm}$ est appelé moment dynamique en A de l'ensemble matériel **E** dans son mouvement par rapport à$\mathscr{R}$ (dimension : $M\cdot L^2\cdot T^{-2}$).

Champ de moment :

En utilisant la même démarche que pour le calcul du moment cinétique nous obtenons :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(B,E/\mathscr{R}) = \overrightarrow{\delta}(A,E/\mathscr{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge m_E\vec{\Gamma}(G/\mathscr{R})}$$

Les éléments de réductions du torseur cinétique vérifient bien la relation de champ de moments d'un torseur.

3.2.3 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique (théorème du moment cinétique)

La détermination directe du moment dynamique nécessite la connaissance du champ des accélérations. Il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique (le calcul des vitesses est souvent plus simple que celui des accélérations).

$$\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \Rightarrow$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \left[\frac{d\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm}{dt}\right]_{\mathscr{R}} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \int_{P\in E} \left[\frac{d\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} dm \Rightarrow$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \int_{P\in E} \left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} dm$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \int_{P\in E} \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm - \int_{P\in E} \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = -m_E \overrightarrow{V}(A/\mathscr{R}) \wedge \overrightarrow{V}(G/\mathscr{R}) + \overrightarrow{\delta}(A,E/\mathscr{R})$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta}(A,S/\mathscr{R}) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}} + m_E \overrightarrow{V}(A/\mathscr{R}) \wedge \overrightarrow{V}(G/\mathscr{R})}$$

Remarque

- Ici le point A n'est lié à aucun solide, par conséquent $\overrightarrow{V}(A/\mathscr{R})$ représente la vitesse du point géométrique ;
- Si $\overrightarrow{V}(A/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta}(A,S/\mathscr{R}) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(A,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}}}$;
- Si A est confondu avec $G \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta}(G,S/\mathscr{R}) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G,E/\mathscr{R})}{dt}\right]_{\mathscr{R}}}$.

Exemple

Q7. Calculer le torseur dynamique au point O du mouvement de l'arbre excentrique **1** par rapport au bâti **O**.

Calcul de la résultante dynamique :

$\overrightarrow{R}_d(1/0) = m_1\vec{\Gamma}(G_1/0)$ ou $\overrightarrow{R}_d(1/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{R}c(1/0}{dt}\right]_0$

$\overrightarrow{R}_d(1/0) = \mu\pi R^2 he\left[\frac{\dot{\theta}(t)\vec{z}_1}{dt}\right]_0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{R}_d(1/0) = \mu\pi R^2 he\left(\ddot{\theta}(t)\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1\right) = m_{S_3}\left(\ddot{\theta}(t)\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1\right)}$

Calcul du moment dynamique :

Comme $\overrightarrow{V}(O/0) = \vec{0}$, nous utiliserons l'expression simplifiée :

$\overrightarrow{\delta}(O,1/0) = \left[\frac{d\sigma(O,1/0)}{dt}\right]_0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta}(O,1/0) = A_1\ddot{\theta}(t)\vec{x}_0}$

Finalement : $\boxed{\{\mathscr{D}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{c} m_{S_3}\left(\ddot{\theta}(t)\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1\right) \\ A_1\ddot{\theta}(t)\vec{x}_0 \end{array}\right\}_O}$

Q8. Calculer le torseur dynamique au point O du mouvement du poussoir **2** par rapport au bâti **O**.

Exemple

Calcul de la résultante dynamique :
$\overrightarrow{R}_d(2/0) = m_2\vec{\Gamma}(G_2/0) = m_2 e\left(-\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) + \cos(\theta)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{z}_0$

Calcul du moment dynamique :
Comme O est un point fixe du référentiel 0, nous pouvons utiliser la formule simplifiée :
$\overrightarrow{\delta}(O,2/0) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma}(O,2/0)}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{0}$

Finalement : $\boxed{\{\mathscr{D}(2/0)\} = \left\{\begin{array}{c} m_2 e\left(-\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) + \cos(\theta)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array}\right\}_O}$

4 Principe Fondamental de la Dynamique

Enoncé pour la première fois par Newton vers la fin du XVIIeme siècle.
Relation entre le mouvement d'un ensemble et les actions mécaniques qui lui sont appliquées.
Excellente précision pour des phénomènes de mécanique classique.

4.1 Définition

Définition

Il existe au moins un espace-temps appelé référentiel galiléen tel que pour tout sous-ensemble matériel **e** d'un ensemble **E**, le torseur dynamique de **e** dans cet espace est constamment égal au torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à **e**.

$$\boxed{\left\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R}_g)\right\} = \{\mathscr{T}(\overline{e} \to e)\}\ \forall e \subset E}$$

Un espace-temps est défini en associant :
— A l'espace ambiant, un espace affine euclidien à trois dimensions dont la norme est appelée longueur ;
— au temps, un espace affine à une dimension et une échelle de temps.

L'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps, constitue un référentiel. En mécanique classique, les deux repères espace et temps sont indépendants contrairement à la mécanique relativiste.

4.2 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Considérons un repère galiléen $\mathscr{R}_g$ et un repère $\mathscr{R}$ ayant un mouvement connu par rapport à $\mathscr{R}_g$. Le P.F.D appliqué au mouvement de $\forall e \subset E$ dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}_g$ s'écrit :

$$\left\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R}_g)\right\} = \{\mathscr{T}(\overline{e} \to e)\} \text{ avec } \left\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R}_g)\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} m_e\,\overrightarrow{\Gamma}(G/\mathscr{R}_g) \\ \int\limits_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)dm \end{array}\right\}_A$$

En utilisant la relation de composition des accélération :

$\overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g) = \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}) + \overrightarrow{\Gamma}(P \in \mathscr{R}/\mathscr{R}_g) + 2\overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_g) \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})$ nous obtenons :

$$\left\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R}_g)\right\}_A = \left\{\begin{array}{l} m_e\,\overrightarrow{\Gamma}(G/\mathscr{R}) \\ \int\limits_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R})dm \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{l} m_e\,\overrightarrow{\Gamma}(G \in \mathscr{R}/\mathscr{R}_g) \\ \int\limits_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P \in \mathscr{R}/\mathscr{R}_g)dm \end{array}\right\}_A +$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_g) \wedge m_e\,\overrightarrow{V}(G/\mathscr{R}) \\ \int\limits_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \left(2\overrightarrow{\Omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_g) \wedge \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})\right)dm \end{array}\right\}_A \Rightarrow \left\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R}_g)\right\}_A = \{\mathscr{D}(e/\mathscr{R})\}_A + \left\{\mathscr{D}_{ie}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A + \left\{\mathscr{D}_{ic}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A$$

Finalement : $\boxed{\{\mathscr{D}(e/\mathscr{R})\}_A = \{\mathscr{T}(\overline{e} \to e)\} - \left\{\mathscr{D}_{ie}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A - \left\{\mathscr{D}_{ic}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A}$

avec $\left\{\begin{array}{l} \left\{\mathscr{D}_{ie}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A \text{ Torseur des effets d'inertie d'entrainement} \\ \left\{\mathscr{D}_{ic}(e,\mathscr{R}/\mathscr{R}_g)\right\}_A \text{ Torseur des effets d'inertie de Coriolis} \end{array}\right.$

Remarque : Si $\mathscr{R}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}_g$ alors $\mathscr{R}$ est également un repère galiléen.

4.3 Espaces galiléens « approchés »

- **Repère de Copernic :**
  - Origine : centre d'inertie du système solaire (centre du soleil) .
  - Directions : directions stellaires.

  L'approximation du repère galiléen par un repère de Copernic convient à l'étude des fusées interplanétaires.
- **Repère géocentrique :**
  - Origine : centre d'inertie de la terre.
  - Directions : directions stellaires.

  L'approximation du repère galiléen par un repère géocentrique convient à l'étude de corps restant au voisinage de la terre ou expériences de longue durée.
- **Repère terrestre :** L'approximation du repère galiléen par un repère terrestre convient aux études couramment abordées en bureau d'études.

4.4 Théorèmes généraux de la dynamique

En exprimant que les deux torseurs intervenant dans le P.F.D ont même résultante et même moment en tout point, il vient :

- **Théorème de la résultante dynamique :** $\boxed{m_e\,\overrightarrow{\Gamma}(G/\mathscr{R}_g) = \overrightarrow{R}(\overline{e} \to e)}$
- **Théorème du moment dynamique :** $\boxed{\overrightarrow{\delta}(A,e/\mathscr{R}_g) = \overrightarrow{M}(A,\overline{e} \to e)}$

Remarque : Le P.F.S est un cas particulier du P.F.D (équilibre ; mouvement de translation rectiligne uniforme ; masse et inerties négligées).

4.5 Théorème des actions mutuelles

Considérons un ensemble matériel **E** en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_g$. Notons e_1 et e_2 un partitionnement de **E**.

— P.F.D appliqué à e_1 :

$\{\mathscr{D}(e_1/\mathscr{R}_g)\} = \{\mathscr{T}(\overline{e_1} \to e_1)\}$ avec $\overline{e_1} = \overline{E} + e_2 \Rightarrow$

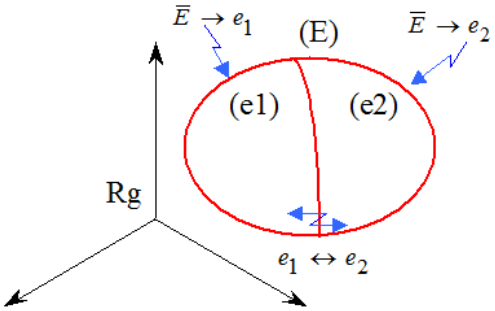
$\{\mathscr{D}(e_1/\mathscr{R}_g)\} = \{\mathscr{T}(\overline{E} \to e_1)\} + \{\mathscr{T}(e_2 \to e_1)\}$ (1)

— P.F.D appliqué à e_2 :

$\{\mathscr{D}(e_2/\mathscr{R}_g)\} = \{\mathscr{T}(\overline{E} \to e_2)\} + \{\mathscr{T}(e_1 \to e_2)\}$ (2)

— P.F.D appliqué à E :

$\{\mathscr{D}(E/\mathscr{R}_g)\} = \{\mathscr{T}(\overline{E} \to e_1)\} + \{\mathscr{T}(\overline{E} \to e_2)\}$ (3)



Sachant que $\{\mathscr{D}(E/\mathscr{R}_g)\} = \{\mathscr{D}(e_1/\mathscr{R}_g)\} + \{\mathscr{D}(e_2/\mathscr{R}_g)\}$ il vient : $\boxed{\{\mathscr{T}(e_2 \to e_1)\} = -\{\mathscr{T}(e_1 \to e_2)\}}$

Exemple

Q9. Tracer le graphe de stucture du modèle puis préciser les torseurs des actions mécaniques intérieures et extérieures

$$L_{01} : \{\mathscr{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0 \to 1) \\ \overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) \end{array} \right\}_0$$

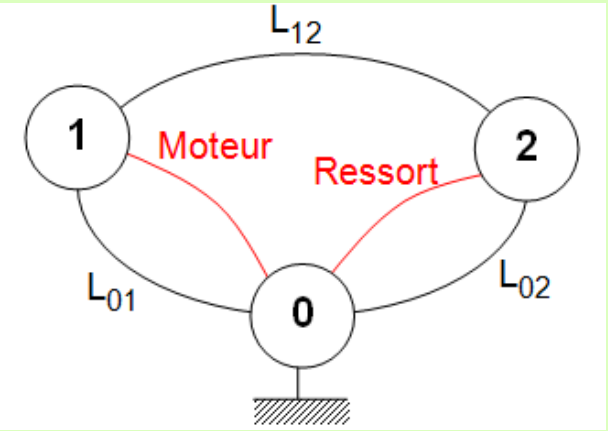
avec $\overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) \cdot \vec{x}_0 = 0$

$$L_{02} : \{\mathscr{T}(0 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0 \to 2) \\ \overrightarrow{M}(O, 0 \to 2) \end{array} \right\}_O$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \overrightarrow{R}(0 \to 2) \cdot \vec{z}_0 = 0 \end{array} \right.$

$$L_{12} : \{\mathscr{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(1 \to 2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

avec $\overrightarrow{R}(1 \to 2) = N_{12}\vec{z}_0 + T_{12}\vec{y}_0$



$$Ressort : \{\mathscr{T}(ressort \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} -(ke\sin(\theta) + F_0)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0 \qquad Moteur : \{\mathscr{T}(moteur \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C\vec{x}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$$

Q10. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide 1 puis au solide 2. Exprimer les relations en projection sur la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en supposant que le problème est plan.

PFD appliqué à 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0 \to 1) + \overrightarrow{R}(2 \to 1) + \overrightarrow{R}(moteur \to 1) = \overrightarrow{R}_d(1/0) \\ \overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) + \overrightarrow{M}(B, 2 \to 1) + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R}(2 \to 1) + \overrightarrow{M}(O, moteur \to 1) = \overrightarrow{\delta}(1/0) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0 \to 1) - (N_{12}\vec{z}_0 + T_{12}\vec{y}_0) + \vec{0} = m_{S_3}(\ddot{\theta}(t)\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1) \\ \overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) - (e\vec{y}_1 + R\vec{z}_0) \wedge (N_{12}\vec{z}_0 + T_{12}\vec{y}_0) + C\vec{x}_0 = A_1\ddot{\theta}(t)\vec{x}_0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0 \to 1) - (N_{12}\vec{z}_0 + T_{12}\vec{y}_0) + \vec{0} = m_{S_3}(\ddot{\theta}(t)\vec{z}_1 - \dot{\theta}^2(t)\vec{y}_1) \\ \overrightarrow{M}(O, 0 \to 1) - (eN_{12}\cos(\theta) - eT_{12}\sin(\theta) - RT_{12})\vec{x}_0 + C\vec{x}_0 = A_1\ddot{\theta}(t)\vec{x}_0 \end{array} \right.$$

En projetant l'équation issue du théorème de la résultante dynamique sur les axes $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ ainsi que l'équation issue du théorème du moment sur $\vec{x}_0$, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & \left\{\begin{array}{l} Y_{01}-T_{12}=m_{S_3}\left(-\ddot{\theta}(t)\sin(\theta)-\dot{\theta}^2(t)\cos(\theta)\right) \\ Z_{01}-N_{12}=m_{S_3}\left(\ddot{\theta}(t)\cos(\theta)-\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta)\right) \\ -eN_{12}\cos(\theta)+eT_{12}\sin(\theta)+RT_{12}+C=A_1\ddot{\theta}(t) \end{array}\right. \\ (2) & \\ (3) & \end{array}}$$

PFD appliqué à 2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0\to 2)+\overrightarrow{R}(1\to 2)+\overrightarrow{R}(ressort\to 2)=\overrightarrow{R}_d(2/0) \\ \overrightarrow{M}(O,0\to 2)+\overrightarrow{M}(B,1\to 2)+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{R}(1\to 2)+\overrightarrow{M}(O,ressort\to 2)=\overrightarrow{\delta}(2/0) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R}(0\to 2)+\left(N_{12}\vec{z}_0+T_{12}\vec{y}_0\right)-(ke\sin(\theta)+F_0)\vec{z}_0=m_2e\left(-\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t)+\cos(\theta)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M}(O,0\to 2)+\left(eN_{12}\cos(\theta)-eT_{12}\sin(\theta)-RT_{12)}\right)\vec{x}_0+\vec{0}=\vec{0} \end{array}\right. \Rightarrow$$

En projetant l'équation issue du théorème de la résultante dynamique sur les axes $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ ainsi que l'équation issue du théorème du moment sur $\vec{x}_0$, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (4) & \left\{\begin{array}{l} Y_{02}+T_{12}=0 \\ N_{12}-(ke\sin(\theta)+F_0)=m_2e\left(-\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t)+\cos(\theta)\ddot{\theta}(t)\right) \\ M_{02}+(eN_{12}\cos(\theta)-eT_{12}\sin(\theta)-RT_{12})=0 \end{array}\right. \\ (5) & \\ (6) & \end{array}}$$

Q11. En utilisant les lois de Coulomb (relatif au frottement sec), donner une relation liant les composantes de l'action de contact en B.

Comme il y a glissement en B dans le mouvement de 2/1, nous pouvons écrire : $|T_{12}|=fN_{12}$ avec $N_{12}>0$

Calcul de $\overrightarrow{V}(B\in 2/1)$:

— $\overrightarrow{V}(B\in 2/1)=\overrightarrow{V}(B\in 2/0)-\overrightarrow{V}(B\in 1/0)=\overrightarrow{V}(B\in 2/0)+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{\Omega}(1/0)=e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\vec{z}_0+\left(e\cos(\theta)\vec{y}_0+(e\sin(\theta)+R)\vec{z}_0\right)\wedge\dot{\theta}(t)\vec{x}_0=(e\sin(\theta)+R)\dot{\theta}(t)\vec{y}_0$

Ou

— $\overrightarrow{V}(B\in 2/1)=\overrightarrow{V}(B/1)-\overrightarrow{V}(B/2)=\left[\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1-\left[\dfrac{d\overrightarrow{G_2B}}{dt}\right]_2=\left[\dfrac{dR\vec{z}_0}{dt}\right]_1-\left[\dfrac{d\left(a\vec{z}_0+e\cos(\theta)\vec{y}_0\right)}{dt}\right]_0=-R\dot{\theta}(t)\vec{x}_0\wedge\vec{z}_0+e\dot{\theta}(t)\sin(\theta)\vec{y}_0=(e\sin(\theta)+R)\dot{\theta}(t)\vec{y}_0$

Comme $R>e$ et $\dot{\theta}(t)>0$: $|\overrightarrow{V}(B\in 2/1)|>0\Rightarrow\boxed{(7)\ T_{12}=-fN_{12}}$

Q12. En déduire l'équation de mouvement.

$$\begin{array}{ll} (3) & \left\{\begin{array}{l} -eN_{12}\cos(\theta)+eT_{12}\sin(\theta)+RT_{12}+C=A_1\ddot{\theta}(t) \\ N_{12}-(ke\sin(\theta)+F_0)=m_2e\left(-\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t)+\cos(\theta)\ddot{\theta}(t)\right) \\ T_{12}=-fN_{12} \end{array}\right. \\ (5) & \\ (7) & \end{array}$$

$$\boxed{\left[\frac{A}{e\cos(\theta)+f(e\sin(\theta)+R)}+m_2e\cos(\theta)\right]\ddot{\theta}(t)-m_2e\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t)=\frac{C}{e\cos(\theta)+f(e\sin(\theta)+R)}-(ke\sin(\theta)+F_0)}$$

Exemple

Exemple

Q13. Proposer alors une démarche de résolution permettant d'obtenir cette relation en développant un minimum de calculs

— On isole l'arbre excentrique 1 et on applique le théorème du moment dynamique en O, en projection sur l'axe $\vec{x}_0$ (pour ne pas faire apparaitre les inconnues de la liaison avec le bâti) ;
— On isole le poussoir 2 et on applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{z}_0$ (pour ne pas faire apparaitre les inconnues de la liaison avec le bâti) ;
— on utilise les lois de Coulomb pour avoir une relation entre les composantes tangentielle et normale de l'action de contact en B.

5 Energétique

5.1 Energie cinétique

Définition

L'énergie cinétique d'un ensemble matériel **E** dans son mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$ est définie par : $\boxed{T(E/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})\right)^2 dm}$ (dimension : $M\cdot L^2\cdot T^{-2}$).

Remarque : La valeur de l'énergie cinétique dépend du repère dans lequel elle est calculée.

Cas particulier d'un solide

Considérons un solide **S** de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$.
Pour tout point P de **S** nous pouvons écrire : $\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}) = \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) + \overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})$

L'énergie cinétique de **S** dans son mouvement par rapport à R peut donc être exprimée par la relation :

$$T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}) + \overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\right)\cdot\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm \Rightarrow$$
$$T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\left(\int_{P\in E}\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})\cdot\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \int_{P\in E}\left(\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\right)\cdot\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm\right)\Rightarrow$$
$$T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})\cdot\int_{P\in E}\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\cdot\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})dm\right)\right)\Rightarrow$$
$$T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})\cdot m\overrightarrow{V}(G/\mathscr{R}) + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\cdot\overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R})\right)$$

Dans cette expression apparaît les deux éléments de réduction des torseurs cinématique et cinétique exprimés en A :

$$\{\mathscr{V}(S/\mathscr{R})\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\\ \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R})\end{array}\right\}_A \qquad \{\mathscr{C}(S/\mathscr{R})\} = \left\{\begin{array}{c}m\overrightarrow{V}(G/\mathscr{R})\\ \overrightarrow{\sigma}(A,S/\mathscr{R})\end{array}\right\}_A$$

L'énergie cinétique du solide **S** dans son mouvement par rapport au repère $\mathscr{R}$ s'exprime par le comoment des torseurs cinématique et cinétique du mouvement de **S** par rapport à $\mathscr{R}$:

$$\boxed{T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\{\mathscr{V}(S/\mathscr{R})\} \otimes \{\mathscr{C}(S/\mathscr{R})\}}$$

Remarque

- Si les deux torseurs doivent impérativement être exprimés en un même point pour effectuer le calcul du comoment, le résultat est indépendant du point considéré ;
- Si $\overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{\sigma}(A, S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overline{I}(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})}$
- Si $\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V}(G/\mathscr{R})^2}$
- Si A est confondu avec $G \Rightarrow$
$$\boxed{T(S/\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\left(m\overrightarrow{V}(G/\mathscr{R})^2 + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{\sigma}(G, S/\mathscr{R})\right) = \frac{1}{2}\left(m\overrightarrow{V}(G/\mathscr{R})^2 + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overline{I}(G,S) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\right)}$$

Exemple

Q14. Calculer l'énergie cinétique de l'arbre excentrique par rapport au bâti.

Comme $\overrightarrow{V}(O \in 1/0) = \vec{0}$, nous utiliserons l'expression simplifiée : $T(1/0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}(1/0) \cdot \overline{I}(O,1) \cdot \overrightarrow{\Omega}(1/0)$

avec $[I_O(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ et $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}(t)\vec{x}_0 \Rightarrow \boxed{T(1/0) = \frac{1}{2}A_1\dot{\theta}^2(t)}$

Q15. Calculer l'énergie cinétique du poussoir par rapport au bâti.

Comme le mouvement de 2/0 est une translation, nous utiliserons l'expression simplifiée : $T(2/0) = \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{V}(G_2/0)^2$ avec $\overrightarrow{V}(G_2/0) = e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\vec{z}_0 \Rightarrow \boxed{T(2/0) = \frac{1}{2}m_2\left(e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\right)^2}$

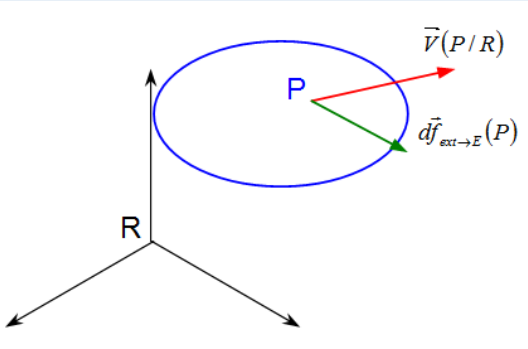
5.2 Puissance

Définition

Considérons un ensemble matériel **E** en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$. En chaque point P de **E** on peut définir un vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})$ et un vecteur force élémentaire $d\vec{f}_{ext \to E}(P)$ des actions mécaniques extérieures sur **E**.

la puissance développée à la date t, par les efforts extérieurs sur **E** dans son mouvement par rapport au repère $\mathscr{R}$ est : $\boxed{\mathscr{P}(ext \to E/\mathscr{R}) = \int_{P \in E} \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}) \cdot d\vec{f}_{ext \to E}(P)}$

(dimension : $M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$)



Remarque

- La puissance dépend du repère choisi ;
- Il existe de nombreux exemples de champ de forces :
  - Champ des forces de pesanteur ;
  - Champ des forces de pression d'un fluide ;
  - Champ des forces de contact entre deux solides ;
  - ...

Cas particulier d'un solide

Si **E** est un solide **S**, le champ des vecteur vitesses peut être représenté par un torseur :

$\{\mathscr{V}(S/\mathscr{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \\ \overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) \end{array} \right\}_A$. On peut alors exprimer $\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R})$ en fonction de $\overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R})$.

$$\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \int_{P \in E} \left(\overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R})\right) \cdot d\vec{f}_{ext \to E}(P) \Rightarrow$$

$$\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) \cdot \int_{P \in E} d\vec{f}_{ext \to S}(P) + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \int_{P \in E} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{f}_{ext \to S}(P) \Rightarrow$$

$$\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{R}(ext \to S) + \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{M}(A, ext \to S) \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \{\mathscr{T}(ext \to S)\} \otimes \{\mathscr{V}(S/\mathscr{R})\}}$$

Remarque

- Si $\overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{M}(A, ext \to S)}$
- Si $\overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\mathscr{P}(ext \to S/\mathscr{R}) = \overrightarrow{V}(A \in S/\mathscr{R}) \cdot \overrightarrow{R}(ext \to S)}$
- Pour déterminer la puissance extérieure des efforts s'exerçant sur un système de solides, il est conseillé de calculer séparément les puissances développées par chaque effort agissant sur chacun des solides. Ainsi, pour chaque comoment, on peut choisir le point de réduction le mieux adapté.

Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels

La puissance développée, à la date t, par les actions mutuelles entre les ensembles E_1 et E_2 dans leur mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}$ est :

$$\boxed{\mathscr{P}(E_1 \longleftrightarrow E_2/\mathscr{R}) = \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}) + \mathscr{P}(E_2 \to E_1/\mathscr{R})}$$

Montrons que cette puissance est indépendante du repère de référence.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}) = \int_{P \in E_2} \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}) \cdot d\vec{f}_{1 \to 2}(P) \\ \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}_1) = \int_{P \in E_2} \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_1) \cdot d\vec{f}_{1 \to 2}(P) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}) - \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}_1 = \int_{P \in E_2} \left(\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}) - \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_1)\right) \cdot d\vec{f}_{1 \to 2}(P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}) - \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}_1 = \int_{P \in E_2} \overrightarrow{V}(P \in \mathscr{R}_1/\mathscr{R}) \cdot d\vec{f}_{1 \to 2}(P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}) - \mathscr{P}(E_1 \to E_2/\mathscr{R}_1 = \{\mathscr{T}(E_1 \to E_2)\} \otimes \{\mathscr{V}(S\mathscr{R}_1/\mathscr{R})\} \ (1)$$

Remarque : E_1 et E_2 ne sont pas forcément des solides.

De même : $\Rightarrow \mathscr{P}(E_2 \rightarrow E_1/\mathscr{R}) - \mathscr{P}(E_2 \rightarrow E_1/\mathscr{R}_1 = \{\mathscr{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} \otimes \{\mathscr{V}(S\mathscr{R}_1/\mathscr{R})\}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow \mathscr{P}(E_1 \longleftrightarrow E_2/\mathscr{R}) - \mathscr{P}(E_1 \longleftrightarrow E_2/\mathscr{R}_1) = 0$ car $\{\mathscr{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathscr{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}$

Par la suite la puissance des actions mutuelles sera notée : $\boxed{\Rightarrow \mathscr{P}(E_1 \longleftrightarrow E_2)}$

Cas particulier de la liaison entre 2 solides

Considérons une liaison entre 2 solides S_1 et S_2.

Comme la puissance des actions mutuelles est indépendante du repère de référence, nous pouvons écrire : $\Rightarrow \mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = \{\mathscr{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{\mathscr{V}(S_2/S_1)\}) = \overrightarrow{R}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \overrightarrow{V}(A \in S_2/S_1) + \overrightarrow{M}(A, S_1 \rightarrow S_2) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1)$

Remarque

- $\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0$ signifie que les torseurs cinématique et d'action mécanique d'une liaison sont réciproques.
- Si la liaison est « parfaite » alors $\mathscr{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0$

Exemple

Q16. Calculer la puissance exercée par le moteur sur l'arbre excentrique dans son mouvement par rapport au bâti

Comme le mouvement de 1 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \vec{x}_0)$, nous pouvons utiliser l'expression simplifiée de la puissance : $\mathscr{P}(moteur \rightarrow 1/0) = \overrightarrow{\Omega}(1/0) \cdot \overrightarrow{M}(O, moteur \rightarrow 1)$

avec $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}(t)\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{M}(O, moteur \rightarrow 1) = C\vec{x}_0 \Rightarrow \boxed{\mathscr{P}(moteur \rightarrow 1/0) = C\dot{\theta}(t)}$

Q17. Calculer la puissance exercée par le ressort sur le poussoir dans son mouvement par rapport au bâti

Comme le mouvement de 2 par rapport à 0 est une translation, nous pouvons utiliser l'expression simplifiée de la puissance : $\mathscr{P}(ressort \rightarrow 2/0) = \overrightarrow{V}(G_2 \in 2/0) \cdot \overrightarrow{R}(ressort \rightarrow 2)$

avec $\overrightarrow{V}(G_2 \in 2/0) = e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\vec{z}_0$ et $\overrightarrow{R}(ressort \rightarrow 2) = -(ke\sin(\theta) + F_0)\vec{z}_0 \Rightarrow$

$\boxed{\mathscr{P}(ressort \rightarrow 2/0) = -e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)(ke\sin(\theta) + F_0)}$

Q18. Calculer la puissance des actions mutuelles de 1 sur 2

$\mathscr{P}(1 \longleftrightarrow 2) = \{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathscr{V}(2/1)\})$

avec $\{\mathscr{T}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N_{12}\vec{z}_0 + T_{12}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$ et $\{\mathscr{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\theta}(t)\vec{x}_0 \\ (R + e\sin(\theta))\dot{\theta}(t)\vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \Rightarrow$

$\boxed{\mathscr{P}(1 \longleftrightarrow 2) = T_{12}(R + e\sin(\theta))\dot{\theta}(t)}$

Remarque : Pour déterminer T_{12} il faut utiliser les équations (3) et (7) du P.F.D :

$$T_{12} = \frac{(A_1\ddot{\theta}(t) - C)f}{e\cos(\theta) + f(e\sin(\theta) + R)}$$

5.3 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un solide

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide **S** de masse m dans son mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathscr{R}_g$ s'écrit :

$$\left\{\mathscr{D}(S/\mathscr{R}_g)\right\} = \left\{\mathscr{T}(\overline{S} \to S)\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{\mathscr{D}(S/\mathscr{R}_g)\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}(S/\mathscr{R}_g)\right\} = \left\{\mathscr{T}(\overline{S} \to S)\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}(S/\mathscr{R}_g)\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)dm \\ \int\limits_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)dm \end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g) \\ \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}_)) \end{array}\right\}_A = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)dm \cdot \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}_g) + \int\limits_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)dm \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g) = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g) \cdot \overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}_g)dm + \int\limits_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)\right) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g)dm = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g) \cdot \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_g)dm + \int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g) \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g)\right)dm + \int\limits_{P\in S} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g)\right) \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g)dm = \mathscr{P}(\overline{S} \to$$
$S/\mathscr{R}_g)$ car $\overrightarrow{V}(A\in S/\mathscr{R}_g) = \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_g) + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$
$$\int\limits_{P\in S} \overrightarrow{\Gamma}(P/\mathscr{R}_g) \cdot \overrightarrow{V}(P\mathscr{R}_g)dm = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\int\limits_{P\in S} \frac{d}{dt}\tfrac{1}{2}\overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_g)^2 dm = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\tfrac{1}{2}\int\limits_{P\in S} \overrightarrow{V}(P/\mathscr{R}_g)^2 dm = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g) \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{d}{dt}T(S/\mathscr{R}_g) = \mathscr{P}(\overline{S} \to S/\mathscr{R}_g)}$$

la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide **S** est égale à la puissance galiléenne des actions extérieures à **S**.

Pour un ensemble de solides

Notons Σ un système constitué de n solides S_i en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathscr{R}_g$.

Pour chaque solide S_i de Σ nous pouvons écrire : $\frac{d}{dt}T(S_i/\mathscr{R}_g) = \mathscr{P}(\overline{S_i} \to S_i/\mathscr{R}_g)$

En ajoutant membre à membre les n relations, on obtient : $\frac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{n} T(S_i/\mathscr{R}_g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathscr{P}(\overline{S_i} \to S_i/\mathscr{R}_g)$

Finalement : $\boxed{\frac{d}{dt}T(\Sigma/\mathscr{R}_g) = P(\overline{\Sigma} \to \Sigma/\mathscr{R}_g) + \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathscr{P}(\overline{S_i} \longleftrightarrow S_j)}$

Remarque

- Contrairement au PFD, le théorème de l'énergie cinétique prend en compte les actions mutuelles entre les solides ;
- L'équation issue du théorème de l'énergie cinétique n'est pas indépendante des équations algébriques fournies par le PFD ;
- Une seule équation contre six par le PFD, le théorème de l'énergie cinétique n'est pas toujours suffisant.

Exemple

Q19. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système came excentrique/poussoir

Remarque préliminaire :

— Si nous isolons le système complet (0,1,2), il n'y a que des puissances intérieures (y compris celles développées par le moteur et le ressort) car la pesanteur n'est pas prise en compte ;

— Si nous isolons (1,2), il n'y a qu'une seule puissance intérieure, celle de 1 sur 2.

Les 2 propositions mènent au même résultat car le bâti 0 est supposé galiléen.

Nous choisirons d'isoler $\Sigma = (1,2)$ car par principe nous n'isolons pas le référentiel galiléen.

— Energie cinétique galiléenne de Σ :
$T(\Sigma/\mathscr{R}_g) = T(1/\mathscr{R}_g) + T(2/\mathscr{R}_g) = \frac{1}{2}A_1\dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}m_2\left(e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\right)^2$

— Puissances galiléenne des actions mécaniques extérieures :
$\mathscr{P}(moteur \rightarrow 1/\mathscr{R}_g) = C\dot{\theta}(t)$
$\mathscr{P}(ressort \rightarrow 2/\mathscr{R}_g) = -e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)(ke\sin(\theta) + F_0)$
$\mathscr{P}(0 \rightarrow 1/\mathscr{R}_g) = \mathscr{P}(0 \rightarrow 2/\mathscr{R}_g) = 0$ car le bâti 0 est supposé galiléen est les liaisons L_{01} et L_{02} sont supposées parfaites.

— Puissance des actions mécaniques intérieures :
$\mathscr{P}(1 \longleftrightarrow 2) = T_{12}(R + e\sin(\theta))\dot{\theta}(t)$

Le théorème de l'énergie cinétique nous donne :
$A_1\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) + m_2 e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)\left(e\ddot{\theta}(t)\cos(\theta) - e\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta)\right) = C\dot{\theta}(t) - e\dot{\theta}(t)\cos(\theta)(ke\sin(\theta) + F_0) + T_{12}\dot{\theta}(t)(R + e\sin(\theta)) \Rightarrow$

$$\boxed{(A_1 + m_2e^2\cos(\theta))\ddot{\theta}(t) - m_2e^2\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = C - e\cos(\theta)(ke\sin(\theta) + F_0) + T_{12}(R + e\sin(\theta))}$$

Remarque : si $T_{12} = 0$ cas d'une liaison parfaite alors nous obtenons directement l'équation de mouvement.

Intégrale première de l'énergie cinétique

Lorsque les puissances intervenant dans le théorème de l'énergie cinétiques sont nulles ou dérivent d'une énergie potentielle (au signe près) que nous noterons : $V(\Sigma/\mathscr{R}_g)$, ce théorème s'écrit : $\boxed{T(\Sigma/\mathscr{R}_g) = V(\Sigma/\mathscr{R}_g)}$

5.4 Notion de rendement

Définition

— $\mathscr{P}_{motrice} = P_m$ = puissance reçue par le système ($P_m \geq 0$)

— $\mathscr{P}_{dissipe} = P_d$ = puissance perdue sous forme de chaleur ($P_d \leq 0$)

— $\mathscr{P}_{receptrice} = P_r$ = puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur ($P_r \leq 0$)

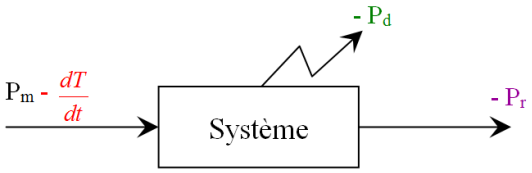
— Le rendement mécanique d'un mécanisme est donné par : $\eta(t) = \frac{|\mathscr{P}_{rceptrice}|}{\mathscr{P}_{motrice}}$ avec $0 \leq \eta(t) \leq 1$

Calcul du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathscr{R}_g$

Le théorème de l'énergie cinétique donne : $\dfrac{d}{dt}T(\Sigma/\mathscr{R}_g) = P_m + P_d + P_r$

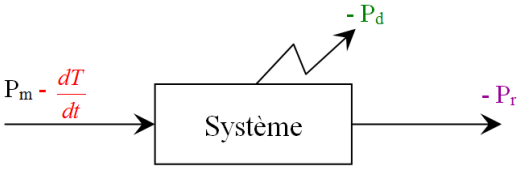
— **1er cas** : $\dfrac{d}{dt}T(\Sigma/\mathscr{R}_g) = 0 : \eta(t) = \dfrac{|P_r|}{P_m} = \dfrac{P_m - |P_d|}{P_m}$

Si la variation d'énergie cinétique est nulle, le système est en régime stationnaire et c'est dans ce cas de figure que sont toujours calculés les rendements aux concours ...



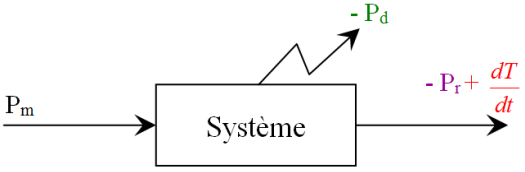
— **2ème cas** : $\dfrac{d}{dt}T(\Sigma/\mathscr{R}_g) \leq 0 : \eta(t) = \dfrac{|P_r|}{P_m - \frac{dT}{dt}}$ (hors programme)

Si la variation d'énergie cinétique est négative, cela signifie que le système restitue de l'énergie précédemment accumulée pour satisfaire le besoin demandé (en sortie). Cette variation d'énergie peut donc être considérée comme une puissance motrice.



— **3ème cas** : $\dfrac{d}{dt}T(\Sigma/\mathscr{R}_g) \geq 0 : \eta(t) = \dfrac{|P_r| + \frac{dT}{dt}}{P_m}$ (hors programme)

Si la variation d'énergie cinétique est positive, cela signifie que le système accumule de l'énergie ; cette énergie n'est pas perdue puisqu'elle est stockée ! Cette variation d'énergie peut donc être considérée comme une puissance reçue.



Remarque

— Le rendement dépend en général du temps ; on calcule donc un rendement moyen pour les mouvements cycliques.

— Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur, le rendement est nul (frein).

6 Bilan

Savoir

je connais :

Caractères d'inertie des solides

- ☐ la définition du centre d'inertie d'un système matériel ;
- ☐ la définition du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe ;
- ☐ la différence entre un moment d'inertie et un produit d'inertie ;
- ☐ les éléments constituant une matrice d'inertie ;
- ☐ le théorème de Huyghens ;

Cinétique

- ☐ la définition du torseur cinétique ;
- ☐ l'expression du moment cinétique pour un solide :
  - — dans le cas général ;
  - — lorsque le calcul est effectué au centre d'inertie ;
  - — lorsque le calcul est effectué en un point fixe du mouvement considéré ;
- ☐ la définition du torseur dynamique ;
- ☐ la relation entre le moment dynamique et le moment cinétique :
  - — dans le cas général ;
  - — lorsque le calcul est effectué au centre d'inertie ;
  - — lorsque le calcul est effectué en un point fixe de l'espace ;

PFD

- ☐ la définition du principe fondamental de la dynamique ;
- ☐ le théorème des actions mutuelles ;
- ☐ la particularité d'une équation de mouvement ;

Energétique

- ☐ la définition de l'énergie cinétique ;
- ☐ la définition de la puissance ;
- ☐ la différence entre puissance intérieure et puissance extérieure ;
- ☐ la puissance dissipée par une liaison parfaite ;
- ☐ le théorème de l'énergie cinétique ;
- ☐ la définition du rendement en régime stationnaire ;

Savoir faire

je sais :

Caractères d'inertie des solides

- ☐ calculer la position du centre d'inertie d'un ensemble de solides ;
- ☐ simplifier une matrice d'inertie en fonction des symétries du solide ;
- ☐ calculer les éléments d'inertie d'un volume élémentaire (cylindre, parallélépipède, sphère)
- ☐ déplacer une matrice d'inertie en utilisant le théorème de Huyghens
- ☐ calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à n'importe quel axe connaissant sa matrice d'inertie ;

Cinétique

- ☐ calculer la résultante cinétique du mouvement d'un solide ;
- ☐ calculer le moment cinétique du mouvement d'un solide au centre d'inertie ;
- ☐ calculer le moment cinétique du mouvement d'un solide en n'importe quel point ;
- ☐ calculer la résultante dynamique du mouvement d'un solide ;
- ☐ calculer le moment dynamique du mouvement d'un solide au centre d'inertie ;
- ☐ calculer le moment dynamique du mouvement d'un solide en n'importe quel point ;

PFD

- ☐ faire le bilan des actions mécaniques extérieures à un système préalablement isolé ;
- ☐ appliquer le principe fondamental de la dynamique à un système isolé
- ☐ mettre en place une démarche de résolution permettant d'obtenir rapidement une équation de mouvement ;

Energétique

- ☐ calculer l'énergie cinétique d'un solide :
  - — dans le cas général ;
  - — lorsque le solide est en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen ;
  - — lorsque le solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à un repère galiléen ;
- ☐ calculer la puissance galiléenne d'une action mécanique :
  - — dans le cas général ;
  - — lorsque le solide est en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen ;
  - — lorsque le solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à un repère galiléen ;
- ☐ identifier et calculer les puissances intérieures d'un mécanisme ;
- ☐ applique le théorème de l'énergie cinétique à un système préalablement isolé.
- ☐ calculer le rendement d'un mécanisme en régime stationnaire ;