

Devoir surveillé n°1

12 septembre 2026

Consignes de présentation :

- Laissez une marge de quelques centimètres à gauche ou à droite.
- Encadrez systématiquement tous vos résultats, même ceux qui sont donnés dans l'énoncé.
- Si vous devez raturer, raturez proprement. Les gribouillis seront pénalisés.
- Sautez régulièrement des lignes. Votre copie doit être aérée.
- **La propreté de la copie et la lisibilité de l'écriture seront prises en compte dans l'évaluation.**

Consignes de rédaction :

- Citez les théorèmes utilisés en mentionnant toutes leurs hypothèses et rien que leurs hypothèses.
- Lesdites hypothèses doivent apparaître clairement. Préférez une énumération verticale à l'aide d'astérisques, de points, de flèches... à des phrases qui n'en finissent pas.
- La première récurrence rencontrée doit être complètement rédigée, même si vous la jugez évidente.
- N'utilisez le symbole $\iff$ qu'avec parcimonie et lorsque c'est justifié. Toute utilisation abusive de ce symbole sera sanctionnée.
- Le symbole $\implies$ ne sert pas d'abréviation pour « donc ».
- N'écrivez pas « la fonction $f(x)$ » mais « la fonction f », n'écrivez pas « la suite u_n » mais « la suite (u_n) ». En deux mots, respectez-vous !
- **La qualité de la rédaction, notamment sa précision et sa concision, ainsi que la rigueur de l'argumentation seront des critères décisifs d'évaluation.**

Exercice 1 : Equivalent d'une suite définie par récurrence.

Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \cos(x)$. Considérons une suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in]0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

1. Montrer que $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$.
2. Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in]0, 1[$.
3. Montrer que (x_n) converge vers 0.
4. Déterminer un développement limité de $\frac{1}{\cos(x)^2}$ en 0 à l'ordre 2.
5. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2}$.
6. Déterminer un équivalent de x_n . On pourra utiliser sans démonstration le théorème de Césaro.

Exercice 2 : Suite définie implicitement

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution réelle x_n .
2. Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim \ln(n)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $y_n = x_n - \ln(n)$. Montrer que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
5. Déterminer un développement asymptotique de x_n à deux termes significatifs.

Problème : un théorème de Polya

Ce problème est constitué de cinq parties : la première partie est complètement indépendante du reste du problème, les questions 5 et 6 de la partie 2 sont utilisées dans la partie 4, la question 8 est utilisée dans la conclusion. Il est recommandé de traiter la partie 3 avant la partie 4. On pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier fixé supérieur ou égal à 1 et P désigne un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes.

- On pose $\Omega_P = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leq 2\}$.
- On note $\mathcal{R}_P = \{\operatorname{Re}(z) \mid z \in \Omega_P\}$ la projection orthogonale de Ω_P sur l'axe réel.

On se propose de démontrer que l'ensemble $\mathcal{R}_P$ peut toujours être recouvert par un nombre fini de segments disjoints dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à 4. C'est un résultat démontré par George Polya en 1928.

I. Exemples

1. Montrer que l'ensemble Ω_P est non vide.
2. On suppose que $P = X - a$ où $a \in \mathbb{C}$. Posons $a_1 = \operatorname{Re}(a)$.
 - (a) Déterminer la nature géométrique de Ω_P .
 - (b) Montrer que $\mathcal{R}_P = [a_1 - 2, a_1 + 2]$.
3. On suppose que $P = X^2 - 2$.

- (a) Montrer que $\Omega_P \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$.
- (b) Montrer que $\mathcal{R}_P = [-2, 2]$.

4. On suppose que $P = X^2 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 2$. Montrer que $\mathcal{R}_P$ n'est pas un intervalle.

La suite du problème est consacrée à la démonstration du théorème de Polya

II. Préliminaires

Les questions 5 et 6 sont indépendantes, les questions 7 et 8 sont indépendantes des questions 5 et 6. On pourra au besoin admettre le résultat de la question 7.d pour traiter la question 8.

Dans les questions 5 et 6, on considère un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé sur $\mathbb{R}$, on note $y_1 < y_2 < \dots < y_p$ ses racines distinctes, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leurs multiplicités respectives. On note aussi λ son coefficient dominant, de sorte que :

$$R = \lambda \prod_{i=1}^p (X - y_i)^{\alpha_i}.$$

5. On rappelle la décomposition en éléments simples de $\frac{R'}{R}$ (on ne demande pas de la démontrer) :

$$\frac{R'}{R} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{X - y_k}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x)R''(x) \leq R'(x)^2$.

- 6. (a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, R' possède une racine z_i dans l'intervalle $]y_i, y_{i+1}[$.
- (b) Montrer que :

$$R' = \lambda n \left[\prod_{i=1}^p (X - y_i)^{\alpha_i - 1} \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^{p-1} (X - z_i) \right].$$

Ainsi, R' est scindé.

- (c) Montrer que toute racine multiple de R' est racine de R .

7. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

- (b) Montrer que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .
- (c) Déterminer tous les réels $x \in [-1, 1]$ tels que $|T_n(x)| = 1$.
- (d) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Montrer que :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |R(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pourra raisonner par l'absurde et montrer que dans le cas contraire, le polynôme $R - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ change au moins n fois de signe.

8. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré n , soient $a < b$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], |R(x)| \leq 2.$$

Montrer que $(b - a) \leq 4$. On pourra considérer le polynôme :

$$S = \frac{2^n}{(b-a)^n} R\left(\frac{b-a}{2}X + \frac{a+b}{2}\right)$$

et utiliser la question précédente.

III. On se ramène au cas réel

On note $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes de P comptées avec multiplicité. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $x_i = \operatorname{Re}(z_i)$ et on considère le polynôme

$$Q = (X - x_1) \dots (X - x_n) \in \mathbb{R}[X].$$

Pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$, on note $E_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |R(x)| \leq 2\}$.

9. Montrer que $\mathcal{R}_P \subset E_Q \subset \mathcal{R}_Q$.
10. (a) Montrer que soit Q est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, soit il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et des réels $u_0 < \dots < u_p$ tels que la fonction polynomiale Q soit strictement monotone sur les intervalles $]-\infty, u_0]$, $[u_0, u_1]$, ..., $[u_{p-1}, u_p]$, $[u_p, +\infty[$.
(b) Montrer que E_Q est une réunion de segments deux à deux disjoints.

On écrit donc $E_Q = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_s$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $I_k = [a_k, b_k]$ et où pour tout $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, $b_k < a_{k+1}$. On notera :

$$\mu(Q) = \sum_{k=1}^s (b_k - a_k)$$

la somme des longueurs des intervalles I_k .

- (c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $Q(a_k)$ et $Q(b_k)$ appartiennent à $\{-2, 2\}$.
- (d) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, $Q(b_k) = Q(a_{k+1})$.
- (e) Préciser $Q(b_s)$ ainsi que $Q(a_1)$ en fonction de la parité de n .

IV. On se ramène à un seul intervalle

On garde les notations de la partie précédente.

11. On souhaite montrer que chaque intervalle I_k pour $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ contient au moins une racine de Q .
(a) Traiter le cas où $Q(a_k) = -Q(b_k)$.

On suppose dans la suite de la question qu'on a par exemple $Q(a_k) = Q(b_k) = 2$.

- (b) Justifier l'existence de $\alpha \in [a_k, b_k]$ tel que $Q(\alpha) = \inf_{x \in I_k} Q(x)$.
- (c) Prouver que $Q'(\alpha) = 0$ et $Q''(\alpha) \geq 0$.
- (d) Conclure à l'aide des questions 5 et 6.
12. Notons $t_1, \dots, t_m$ les racines de Q qui sont dans l'intervalle I_s , ces racines étant comptées avec multiplicité. On suppose $m < n$ (et donc $s > 1$) et on pose

$$A = (X - t_1) \dots (X - t_m), \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}[X] \quad \text{tel que} \quad Q = AB.$$

On pose enfin $Q_1(X) = A(X + d)B(X)$ où $d = a_s - b_{s-1}$ est l'écart entre les intervalles I_{s-1} et I_s .

- (a) Vérifier que Q_1 est unitaire de degré n et scindé sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que si $k \leq s-1$ et $x \in I_k$, on a $|A(x + d)| \leq |A(x)|$.
En déduire que $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{s-1} \subset E_{Q_1}$.
- (c) Montrer que

$$[a_s - d, b_s - d] = [b_{s-1}, b_s - d] \subset E_{Q_1}.$$

- (d) En déduire que $\mu(Q_1) \geq \mu(Q)$ et que l'intervalle le plus à droite de E_{Q_1} contient strictement plus de m racines de Q_1 .

13. En déduire qu'il existe un polynôme $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\tilde{Q}) \geq \mu(Q)$ et pour lequel $E_{\tilde{Q}}$ est réduit à un unique segment.

V. Conclusion

14. Démontrer le théorème de Polya.