

Exercice 1 : Equivalent d'une suite définie par récurrence

1. Soit $x \in]0, 1[$. Comme $]0, 1[\subset]0, \pi/2[$, alors $0 < \cos(x) < 1$, donc $0 < x \cos(x) < x < 1$.

$$f(]0, 1[) \subset]0, 1[.$$

2. Pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) - x = x(1 - \cos(x))$. Comme $-1 < \cos(x) - 1 < 0$ (d'après la question précédente), alors $f(x) - x < 0$.

$$\forall x \in]0, 1[, f(x) - x < 0$$

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0, 1[$.

Le résultat est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons-le vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors comme $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$, $x_{n+1} = f(x_n) \in]0, 1[$.

On a bien $x_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ (d'après la question 2). La suite (x_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $l \geq 0$. Comme de plus $x_n \leq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $l \leq x_0$ par passage à la limite dans les inégalités, donc $l < 1$.

D'une part, $x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, et d'autre part, par continuité de f , $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$. Par unicité de la limite, $f(l) = l$. Comme $f(x) - x < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, f n'a pas de point fixe dans $]0, 1[$, donc son seul point fixe dans $[0, 1]$ est 0. Ainsi (x_n) tend vers 0.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

4. Rappelons que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{-2} = 1 + x^2 + o(x^2).$$

$$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

5. Ainsi :

$$\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) = 1 + o(1)$$

donc :

$$\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

6. D'après la question précédente, comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème de Césaro :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{-1} \frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc par télescopage :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi :

$$x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Suite définie implicitement

1. Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x + x$. La fonction f est continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\infty$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} +\infty$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = n$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'équation } e^x + x = n \text{ possède une unique solution } x_n.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ (inégalité de convexité), donc $e^x \geq x$, donc $n = e^{x_n} + x_n \leq 2e^{x_n}$, donc :

$$x_n \geq \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

Ainsi :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. Comme $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, alors $\frac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc :

$$\frac{n}{e^{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{e^{x_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $e^{x_n} \sim n$. Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, classiquement, $x_n \sim \ln(n)$ (en détails :

$\ln\left(\frac{e^{x_n}}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, soit $x_n - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc en divisant par $\ln(n)$,

$\frac{x_n}{\ln(n)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, soit $x_n \sim \ln(n)$).

$$x_n \sim \ln(n)$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\ln(n)+y_n} + x_n = n$, soit encore $ne^{y_n} = n - x_n$. Après division par n , il vient :

$$e^{y_n} = 1 - \frac{x_n}{n}.$$

Comme $x_n \sim \ln(n)$, alors $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $e^{y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc :

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Comme (y_n) tend vers 0, alors $e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n)$, donc la relation $e^{y_n} = 1 - \frac{x_n}{n}$ donne :

$$y_n + o(y_n) = -\frac{x_n}{n}$$

soit :

$$y_n \sim -\frac{x_n}{n} \sim -\frac{\ln(n)}{n}.$$

Ainsi :

$$x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Problème : Un théorème de Polya

Partie 1 : Exemples

1. Comme $\deg(P) \geq 1$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P possède au-moins une racine $z \in \mathbb{C}$. Comme $|P(z)| = 0$, alors $z \in \Omega_P$. Ainsi :

$$\Omega_P \text{ est non vide.}$$

2. a. $\Omega_P = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq 2\}$. Ainsi :

$$\Omega_P \text{ est le disque fermé de centre } a \text{ et de rayon } 2.$$

- b. Montrons que $\mathcal{R}_P = [a_1 - 2, a_1 + 2]$.

- $\subseteq$: Soit $x \in \mathcal{R}_P$. Il existe $z \in \Omega_P$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. Alors :

$$|x - a_1| \leq |z - a| \leq 2$$

donc $x \in [a_1 - 2, a_1 + 2]$.

- $\supseteq$: Soit $x \in [a_1 - 2, a_1 + 2]$, posons $z = x + i \operatorname{Im}(a_1)$. On a $|z - a| = |x - a_1| \leq 2$. D'où $z \in \Omega_P$, d'où $x \in \mathcal{R}_P$.

$$\mathcal{R}_P = [a_1 - 2, a_1 + 2].$$

3. a. Soit $z \in \Omega_P$. Alors $|z|^2 - 2 \leq |z^2 - 2| \leq 2$ par la minoration de l'inégalité triangulaire, donc $|z|^2 \leq 4$, d'où $|z| \leq 2$.

$$\Omega_P \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$$

- b. • $\subseteq$: Soit $x \in \mathcal{R}_P$, il existe $z \in \Omega_P$ tel que $x = \operatorname{Re}(z)$. Alors :

$$|x| \leq |z| \leq 2$$

donc $x \in [-2, 2]$.

- $\supseteq$: Soit $x \in [-2, 2]$. Alors $x^2 - 2 \leq 4 - 2 = 2$ donc $x \in \Omega_P$, d'où $x \in \mathcal{R}_P$.

$$\mathcal{R}_P = [-2, 2]$$

4. Remarquons que $-\sqrt{a}, \sqrt{a} \in \mathcal{R}_P$. Montrons que $0 \notin \mathcal{R}_P$. Pour cela, montrons que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $iy \notin \Omega_P$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$|P(iy)| = |-y^2 - a| = y^2 + a \geq a > 2$$

donc $iy \notin \Omega_P$. On en déduit que $0 \notin \mathcal{R}_P$.

Ainsi, $\mathcal{R}_P$ contient $-\sqrt{a}, \sqrt{a}$ mais pas 0 : ce n'est donc pas un intervalle.

$$\mathcal{R}_P \text{ n'est pas un intervalle.}$$

Partie 2 : Préliminaires

5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$, posons $f(x) = \frac{R'(x)}{R(x)}$. Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^p -\frac{\alpha_k}{(x - y_k)^2} \leq 0.$$

D'autre part :

$$f'(x) \frac{R''(x)R(x) - R'(x)^2}{R(x)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$, $R''(x)R(x) \leq R'(x)^2$. Comme la fonction $RR'' - R'^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, cette inégalité reste vraie par passage à la limite dans les inégalités pour $x \in \{y_1, \dots, y_p\}$. Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x)R''(x) \leq R'(x)^2.$$

6. a. Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Appliquons le théorème de Rolle sur $[y_k, y_{k+1}]$: R est continue sur $[y_k, y_{k+1}]$, dérivable sur $]y_k, y_{k+1}[$ et $R(y_k) = R(y_{k+1}) = 0$ donc il existe $z_k \in]y_k, y_{k+1}[$ tel que $Q'(z_k) = 0$. Ainsi, R possède au-moins $p-1$ racines distinctes et distinctes des y_k .

Pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, R' possède une racine z_i dans $]y_i, y_{i+1}[$.

- b. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, y_k est racine de R de multiplicité $\alpha_k - 1$. Les polynômes $(X - y_i)^{\alpha_i - 1}$ divisent donc R' . De même, les polynômes $(X - z_i)$ divisent R' . et Comme les réels $y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{p-1}$ sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - y_i)^{\alpha_i - 1}$ et les polynômes $(X - z_i)$ sont deux à deux premiers entre eux. Ainsi, le polynôme :

$$\left[\prod_{k=1}^{p-1} (X - z_k) \right] \left[\prod_{k=1}^p (X - y_k)^{\alpha_k - 1} \right]$$

divise R'' . Son degré vaut :

$$p - 1 + \sum_{k=1}^p (\alpha_k - 1) = p - 1 + \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \right) - p = n - 1 = \deg(R')$$

puisque $\sum_{k=1}^p \alpha_k = n$. Ainsi, R' est scindé sur $\mathbb{R}$. Comme son coefficient dominant vaut λn , alors :

$$R' = \lambda n \left[\prod_{i=1}^p (X - y_i)^{\alpha_i - 1} \right] \cdot \left[\prod_{i=1}^{p-1} (X - z_i) \right].$$

- c. Les réels $z_1, \dots, z_{p-1}$ sont des racines simples de R . Ainsi, les seules racines multiples possibles de R sont $y_1, \dots, y_p$, et ce sont donc des racines de R .

Toute racine multiple de R' est racine multiple de R

- Existence : Soit $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) \\ &= \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} (-1)^{k/2} \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta) + \right. \\ &\quad \left. i \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} (-1)^{(k-1)/2} \sin^k(\theta) \cos^{n-k}(\theta)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \cos^{n-2k}(\theta) \\ &= T_n(\cos(\theta)) \end{aligned} \quad (1)$$

avec :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - X^2)^k X^{n-2k}.$$

- Unicité : Soient T_n, S_n deux polynômes tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = S_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Alors comme $\cos$ est une surjection de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$, pour tout $x \in [-1, 1]$, $(T_n - S_n)(x) = 0$, donc $T_n - S_n$ possède une infinité de racines, donc $S_n = T_n$.

Il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

- b. Les termes de la somme sont tous de degré inférieur ou égal à n , et la somme des termes de degré n vaut :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k}.$$

On rappelle que :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} = 0$$

et donc que :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

Ainsi :

$$T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \frac{1}{2^{n-1}}.$$

c. Soit $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Alors :

$$|T_n(x)| = 1 \iff |\cos(n\theta)| = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n}.$$

$$\text{Ainsi, } |T_n(x)| = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\text{Les réels } x \text{ tels que } |T_n(x)| = 1 \text{ sont les } x_k.$$

d. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|R(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. On a :

$$\frac{T_n(x_k)}{2^{n-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi, comme $-\frac{1}{2^{n-1}} < R(x_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$, on a :

$$R(x_k) - \frac{T_n(x_k)}{2^{n-1}} \begin{cases} > 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ < 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Comme $R - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est continu sur $\mathbb{R}$ et change de signe entre x_k et x_{k+1} , il s'annule au-moins une fois sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, $R - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ possède au-moins n racines distinctes.

Or, comme R et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ sont unitaires, ce polynôme est de degré au plus $n-1$.

Il est donc nul, donc $R = \frac{T_n}{2^{n-1}}$. Ceci est absurde car alors :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |R(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |R(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

8. Le polynôme S est unitaire (le coefficient dominant de $R\left(\frac{b-a}{2}X + \frac{a+b}{2}\right)$ vaut $\frac{(b-a)^n}{2^n}$). Ainsi, d'après la question précédente :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |S(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Comme S est continue, il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $|S(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors :

$$\frac{2^n}{(b-a)^n} \left| R\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

soit encore :

$$(b-a)^n \leq 2^{2n-1} \left| R\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) \right|.$$

Or, on a :

$$a = \frac{b-a}{2} \cdot (-1) + \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = b.$$

Ainsi, $\left| R\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) \right| \leq 2$ d'où $(b-a)^n \leq 4^n$. On en déduit que $b-a \leq 4$.

$$\text{Si } R \text{ est unitaire et } \forall x \in [a, b], |R(x)| \leq 2, \text{ alors } b-a \leq 4.$$

Partie 3 : On se ramène au cas réel

9. Soit $x \in \mathcal{R}_P$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + iy \in \Omega_P$, i.e. $|P(z)| \leq 2$. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x - x_i| \leq |z - z_i|$, on a

$$|Q(x)| = \prod_{i=1}^n |x - x_i| \leq \prod_{i=1}^n |z - z_i| = |P(z)| \leq 2 \Rightarrow x \in E_Q.$$

Supposons maintenant que $x \in E_Q$, donc $|Q(x)| \leq 2$. On a alors par définition $x \in \Omega_Q$, et ainsi $\text{Re}(x) = x \in \mathcal{R}_Q$.

On a finalement montré que :

$$\mathcal{R}_P \subset E_Q \subset \mathcal{R}_Q.$$

10. a. La fonction polynomiale Q est dérivable, et sa dérivée Q' est encore polynomiale de degré $n-1$. Q' a donc au plus $(n-1)$ racines réelles distinctes. Si Q' n'a aucune racine réelle, Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Dans le cas contraire, Notons $u_0 < \dots < u_p$ ces racines (avec $p \leq n$). Sur chaque intervalle $]u_k, u_{k+1}[$, la fonction polynomiale Q' est continue et ne s'annule pas, elle est donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) de signe constant. De même, Q' est par le théorème des valeurs intermédiaires de signe constant sur $] -\infty, u_0$ et sur $]u_p, +\infty[$. On en déduit que Q est strictement monotone sur chaque intervalle $[u_k, u_{k+1}]$ (puisque de dérivée strictement positive ou strictement négative à l'intérieur de cet intervalle).

$$Q \text{ est strictement monotone sur chaque intervalle } [u_k, u_{k+1}],] -\infty, u_0], [u_p, +\infty[.$$

- b. On a $E_Q = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq Q(x) \leq 2\}$. Fixons $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Notons $J_k = [u_k, u_{k+1}]$. Supposons que $E_Q \cap J_k \neq \emptyset$ et montrons que c'est alors un segment. La fonction Q est strictement monotone sur J_k , supposons-la par exemple strictement croissante.

- $E_Q \cap J_k$ est un intervalle : soient $x, y \in E_Q \cap J_k$ tels que $x \leq y$. Soit $z \in [x, y]$. Comme Q est croissante, $Q(x) \leq Q(z) \leq Q(y)$. Or, $Q(x) \geq -2$ et $Q(y) \leq 2$ d'où $|Q(z)| \leq 2$. Ainsi, $z \in E_Q \cap J_k$.
- $E_Q \cap J_k$ est borné puisque contenu dans $J_k = [u_k, u_{k+1}]$.
- $E_Q \cap J_k$ contient ses bornes par continuité et passage à la limite aux inégalités.

Ainsi, $E_Q \cap J_k$ est un segment.

On montre de même que $E_Q \cap]-\infty, u_0]$ et $[u_p, +\infty[$ sont des segments. La seule difficulté supplémentaire est de montrer que ces ensembles sont bornés, mais cela vient du fait que $|Q|(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$, donc il existe $A > 0$ tel que $E_A \subset [-A, A]$.

Pour finir, si ces segments ne sont pas disjoints, on regroupe ceux qui s'intersectent en utilisant le fait que la réunion de deux segments d'intersection non vide est un segment.

E_Q est une réunion de segments deux à deux disjoints.

- c. On a déjà clairement $Q(a_k), Q(b_k) \in [-2, 2]$ puisque $a_k, b_k \in E_Q$. De plus, supposons par exemple que $-2 < Q(a_k) < 2$. Alors par continuité de Q , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a_k - \eta, a_k + \eta[$, $|Q(x)| < 2$. Mais alors $]a_k - \eta, a_k[\subset E_Q$, ce qui contredit l'écriture de E_Q comme réunion de segments deux à deux disjoints. Donc $Q(a_k) \in \{\pm 2\}$ et de même pour $Q(b_k)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $Q(a_k), Q(b_k) \in \{-2, 2\}$.

- d. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$ tel que par exemple $Q(b_k) = 2$ et $Q(a_{k+1}) = -2$. Alors par continuité de Q et TVI il existe $x \in]b_k, a_{k+1}[$ tel que $Q(x) = 0$. Mais alors $x \in E_Q$ ce qui est absurde par définition des intervalles I_k . On a donc toujours $Q(b_k) = Q(a_{k+1})$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, $Q(b_k) = Q(a_{k+1})$.

- e. Supposons n pair. Dans ce cas, on a $Q(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ (puisque $Q(x) \sim x^n$). Puisque Q ne prend aucune valeur comprise entre -2 et 2 sur les intervalles $] -\infty, a_1[$ et $]b_s, +\infty[$, on en déduit par continuité (et TVI) que nécessairement $Q(a_1) = Q(b_s) = 2$.

Supposons maintenant n impair. On a dans ce cas

$$Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty, \quad \text{et} \quad Q(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par le même argument, on a alors $Q(a_1) = -2$ et $Q(b_s) = 2$.

Si n est pair, $Q(a_1) = Q(b_s) = 2$. Si n est impair, $Q(a_1) = -2$, $Q(b_s) = 2$.

Partie 4 : On se ramène à un seul intervalle

11. a. Dans ce cas, $Q(a_k)$ et $Q(b_k)$ sont de signe opposé, donc par continuité et TVI, Q s'annule sur le segment $I_k = [a_k, b_k]$.

Si $Q(a_k) = -Q(b_k)$, le segment $[a_k, b_k]$ contient une racine de Q .

- b. La fonction polynomiale Q est continue sur le segment $[a_k, b_k]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment, ce qui assure l'existence d'un tel $\alpha \in [a_k, b_k]$.

Il existe $\alpha \in [a_k, b_k]$ tel que $Q(\alpha) = \inf_{x \in [a_k, b_k]} Q(x)$.

- c. Comme $Q(\alpha) < 2$ (sinon on aurait pour tout $x \in [a_k, b_k]$ $Q(x) = 2$ et Q serait donc le polynôme constant égal à 2, ce qui contredit le fait que $\deg(Q) \geq 1$), alors $\alpha \in]a_k, b_k[$. Ainsi Q est dérivable sur $[a_k, b_k]$ et α est un point intérieur à l'intervalle donc $Q'(\alpha) = 0$. De plus, supposons que $Q''(\alpha) < 0$, on aurait alors par Taylor-Young

$$Q(x) - Q(\alpha) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{Q''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 < 0,$$

ce qui implique $Q(x) < Q(\alpha)$ au voisinage de α et fournit une contradiction. On a donc $Q''(\alpha) \geq 0$.

$Q'(\alpha) = 0$ et $Q''(\alpha) \geq 0$.

- d. Comme Q est scindé sur $\mathbb{R}$ de degré $n \geq 1$, on a d'après la question 5.b :

$$Q(\alpha)Q''(\alpha) \leq Q'(\alpha)^2 = 0.$$

Il y a deux possibilités :

- Si $Q''(\alpha) > 0$, alors on en déduit $Q(\alpha) \leq 0$ et par conséquent par TVI, puisque $Q(a_k) = 2$, Q s'annule entre a_k et α , d'où le résultat.
- Si $Q''(\alpha) = 0 = Q'(\alpha)$, α est alors racine multiple de Q' , donc également de Q d'après la question 6.b.

Dans tous les cas, on a obtenu une racine de Q sur I_k . Remarquons du reste que cette racine est dans l'intérieur de I_k puisque $Q(a_k), Q(b_k) \in \{\pm 2\}$.

Chaque intervalle I_k contient au-moins une racine de Q .

12. a. Par produit on a $1 = c_D(Q) = c_D(A)c_D(B) = c_D(B)$ donc B est unitaire. De même, $\deg A + \deg B = \deg Q = n$ donc $\deg B = n - m$. Comme

$$\deg(A(X+d)) = \deg A = m \quad \text{et} \quad c_D(A(X+d)) = c_D(A) = 1,$$

on en déduit que Q_1 est unitaire et de degré n .

D'autre part, B divise Q qui est scindé, donc B est également scindé, et

$$A(X+d) = (X+d-t_1) \dots (X+d-t_m) = \prod_{i=1}^m (X-(t_i-d))$$

est également scindé. Donc par produit Q_1 est scindé.

$$\boxed{Q_1 \text{ est unitaire de degré } n \text{ et scindé sur } \mathbb{R}.}$$

b. Si $x \in I_k$ et $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$|x+d-t_i| = t_i-d-x \leq t_i-x = |x-t_i| \Rightarrow |A(x+d)| = \prod_{i=1}^m |x+d-t_i| \leq |A(x)|.$$

$$\boxed{\text{Si } k \leq s-1 \text{ et } x \in I_k, \text{ alors } |A(x+d)| \leq |A(x)|.}$$

Il vient donc pour tout $x \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{s-1}$,

$$|Q_1(x)| = |A(x+d)| \cdot |B(x)| \leq |A(x)| \cdot |B(x)| = |Q(x)| \leq 2$$

donc :

$$\boxed{I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{s-1} \subset E_{Q_1}.}$$

c. Soit $x \in [a_s-d, b_s-d] = [b_{s-1}, b_s-d]$. Posons $y = x+d \in I_s$. Comme B est unitaire et scindé sur $\mathbb{R}$, il existe $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{R}$ comptées avec multiplicité telles que

$$B = \prod_{i=1}^l (X-r_i).$$

De plus, les racines de Q étant toutes dans E_Q , donc dans les intervalles I_k , celles de B , qui ne sont pas dans I_s , sont donc dans les I_k pour $k \leq s-1$. Il vient donc pour $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$,

$$|x-r_i| = x-r_i \leq x+d-r_i = |x+d-r_i| = |y-r_i| \Rightarrow |B(x)| \leq |B(y)|.$$

On en déduit que

$$|Q_1(x)| = |A(y)| \cdot |B(x)| \leq |A(y)| \cdot |B(y)| = |Q(y)| \leq 2 \Rightarrow x \in E_{Q_1}.$$

On a démontré que :

$$\boxed{[a_s-d, b_s-d] \subset E_{Q_1}.}$$

d. On déduit des questions précédentes que

$$I'_1 \cup \dots \cup I'_{s-1} \subset E_{Q_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I'_k = I_k & \text{si } k \leq s-2 \\ I'_{s-1} = I_{s-1} \cup (I_s-d) = [a_{s-1}, b_s-d]. \end{cases}$$

Comme Q_1 est encore scindé, unitaire et de degré n , E_{Q_1} s'écrit toujours comme réunion disjointe de segments.

D'après la question 8.d, Q possède une racine dans l'intérieur de I_{s-1} , donc B aussi, donc Q_1 aussi. De plus, Q_1 possède par construction m racines (avec multiplicité) dans I_s-d . Le segment le plus à droite de E_{Q_1} contient donc $[a_{s-1}, b_s-d]$, dans lequel il y strictement plus de m racines de Q_1 (les m racines situées dans I_s-d et au moins une dans I_{s-1}).

$$\boxed{\text{L'intervalle le plus à droite de } E_{Q_1} \text{ contient strictement plus de } m \text{ racines.}}$$

Enfin, puisque $I'_1 \cup \dots \cup I'_{s-1} \subset E_{Q_1}$, on a

$$\mu(Q_1) \geq \sum_{i=1}^{s-2} (b_i-a_i) + (b_s-d-a_{s-1}) = \sum_{i=1}^{s-2} (b_i-a_i) + (b_s-a_s+b_{s-1}-a_{s-1}) = \mu(Q).$$

$$\boxed{\mu(Q_1) \geq \mu(Q).}$$

13. Si E_Q n'est pas réduit à un segment, on itère le procédé précédent jusqu'à obtenir un polynôme $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\tilde{Q}) \geq \mu(Q)$ et pour lequel l'intervalle le plus à droite de $E_{\tilde{Q}}$ possède n racines (comptées avec multiplicité). $\tilde{Q}$ s'écrit toujours comme une réunion disjointe d'intervalles, et possède toutes ses racines dans l'intervalle le plus à droite de $E_{\tilde{Q}}$. D'après la question 8.d, $E_{\tilde{Q}}$ ne comporte donc qu'un unique intervalle : il est réduit à un unique segment.

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } \tilde{Q} \text{ de degré } n \text{ scindé et unitaire tel que } \mu(\tilde{Q}) \geq \mu(Q) \text{ et } E_{\tilde{Q}} \text{ soit un segment.}}$$

Partie 5 : Conclusion

14. D'après la question 5, $\mathcal{R}_P \subset E_Q$ qui est réunion disjointe de segments. La question 10 assure l'existence de $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\tilde{Q}) \geq \mu(Q)$ et $E_{\tilde{Q}}$ soit réduit à un unique segment : il existe $a \leq b$ tels que $E_{\tilde{Q}} = [a, b]$. On applique la question précédente à ce polynôme. Puisque $|\tilde{Q}(x)| \leq 2$ pour tout $x \in [a, b]$, on a $b-a \leq 4$. Il vient donc

$$\mu(Q) \leq \mu(\tilde{Q}) = b-a \leq 4.$$

C'est le résultat que l'on voulait démontrer.

$$\boxed{\text{Le théorème de Polya est démontré.}}$$