

CORRIGÉ

Exercice 1 (Évolution suivie)

1. Plaçons-nous dans le système où l'on ferme K_1 à $t = 0$ et où K_2 reste ouvert.

- (a) La maille de droite a atteint son régime permanent et le courant traversant la bobine (équivalente à un fil) à $t = 0^-$ vaut $i_1(0^-) = E/R_1$. La maille de gauche en revanche est initialement ouverte donc $i_2(0^-) = 0$. Par continuité du courant dans chaque bobine, on a donc

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad i_2(0) = 0$$

Un nouveau régime permanent s'installe dans lequel chaque bobine est équivalente à un fil et chaque résistance est donc soumise à une tension E . Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2}$$

- (b) Après fermeture de K_1 , on peut écrire indépendamment la loi des mailles dans la maille de gauche et dans celle de droite. Ainsi, après quelques lignes non détaillées ici (loi des mailles et équations d'évolution aux bornes des dipôles),

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{E}{L_1} \quad \text{et} \quad \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{L_2} i_2 = \frac{E}{L_2}$$

- (c) La maille de droite n'est pas perturbée par la fermeture de K_1 (elle était soumise à la même équation différentielle auparavant) et reste donc dans le régime permanent déjà atteint¹ :

$$i_1(t) = i_1 = \frac{E}{R_1} = C^{te}$$

La maille de gauche est soumise au classique échelon de tension avec condition initiale nulle dont la solution est

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} (1 - e^{-t/\tau_2}) \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

qui vérifie bien la condition initiale nulle ainsi que la limite quand t tend vers l'infini. La courbe de $i_2(t)$ est proposée à la fin de l'exercice.

2. On ferme à présent K_2 en ayant attendu l'installation du régime permanent précédent.

- (a) Les nouvelles conditions initiales correspondent aux valeurs prises précédemment pour $t \rightarrow \infty$ du fait de la continuité du courant dans les deux bobines

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad i_2(0) = \frac{E}{R_2}$$

Lorsqu'on atteint le régime permanent, la bobine L_1 se comportant comme un fil, c'est toujours la tension E qui est appliquée aux bornes de R_1 , d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1}$$

Comme L_2 se transforme aussi en fil, la résistance R_2 est aussi soumise à la tension E . Mais le courant traversant L_2 est la somme du courant $i'_2 = E/R_2$ traversant R_2 et de celui η produit par la source de courant (court-circuitée par le fil/bobine), d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2} + \eta$$

1. La résolution de l'équation implique que la constante devant l'exponentielle de la solution homogène est nulle.

(b) La loi des mailles dans la maille de droite permet d'écrire la même équation pour i_1 , à savoir

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{E}{L_1}}$$

La loi des mailles dans la maille de gauche permet d'obtenir l'autre équation en prenant garde au fait que le courant $i'_2(t)$ traversant la résistance R_2 vaut, d'après la loi des noeuds, $i'_2(t) = i_2(t) - \eta$, d'où

$$E = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i'_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - R_2 \eta$$

Et finalement,

$$\boxed{\frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{L_2} i_2 = \frac{E + R_2 \eta}{L_2}}$$

(c) L'équation pour i_1 est toujours la même avec les mêmes conditions initiales, celui-ci reste donc

$$\boxed{i_1(t) = i_1 = \frac{E}{R_1} = C^{te}}$$

L'équation pour i_2 mérite néanmoins qu'on s'y arrête quelque peu. Une solution particulière est

$$i_{2p} = \frac{E}{R_2} + \eta$$

La solution de l'équation homogène s'écrit quant à elle

$$i_{2h} = A e^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

La condition initiale appliquée à $i_{2p} + i_{2h}$ impose que

$$\frac{E}{R_2} + \eta + A = \frac{E}{R_2}$$

d'où

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{R_2} + \eta \left(1 - e^{-t/\tau_2}\right) \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}}$$

La solution démarre bien de E/R_2 et tend exponentiellement vers sa valeur limite $E/R_2 + \eta$.

Exercice 2 (Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre)

- Système : {bille (M, m) assimilée à un point matériel } ;
 - Référentiel : terrestre supposé galiléen ;
 - Bilan des forces :
 - le poids $\vec{P} = m \vec{g} = m g \vec{u}_z$
 - frottements de l'air et poussée d'Archimède : négligés
 - Théorème de l'énergie cinétique entre $z = -h$ et $z = 0$:

$$\Delta E_c = W(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2} m (v_0^2 - 0^2) = m g (0 - (-h))$$

d'où

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Application numérique :

$$\boxed{h = 1,3 \text{ cm}}$$

- Les forces dans le liquide sont

- Le poids : $\vec{P} = m \vec{g} = m g \vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\pi}_{\text{eau}} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{eau}} \vec{g} = -m \vec{g} = -m g \vec{u}_z = -\vec{P}$ car $\rho_{\text{eau}} = \rho$
- Les frottements : $\vec{f} = -6 \pi \eta r \vec{v} = -6 \pi \eta r \dot{z} \vec{u}_z$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{P} + \vec{\pi}_{\text{eau}}}_{=0} + \vec{f}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -6 \pi \eta r \vec{v}$$

d'où

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6 \pi \eta r}{m} \vec{v} = \vec{0}$$

3. L'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire, du 1^{er} ordre en \vec{v} , à coefficients constants et de second terme nul. La solution s'écrit

$$\vec{v} = \vec{V} \exp\left(-\frac{6 \pi \eta r}{m} t\right) \quad \text{où } \vec{V} = \vec{C}^{\text{te}}$$

On détermine \vec{V} grâce aux conditions initiales :

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \vec{V} = v_0 \vec{u}_z$$

et on exprime m en fonction des données :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho = m$$

Donc finalement

$$\vec{v} = v_0 \exp\left(-\frac{9 \eta}{2 \rho r^2} t\right) \vec{u}_z$$

On voit donc que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\vec{v}(t)) = \vec{0}$$

Au bout de quelques $\tau = \frac{2 \rho r^2}{9 \eta}$, la bille s'immobilise.

4. Écrivons $\vec{v} = v \vec{u}_z = \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$; on peut projeter sur \vec{u}_z l'expression de \vec{v} :

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On peut intégrer cette équation entre $(t=0, z=0)$ et $(t>0, z>0)$:

$$z(t) = v_0 \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Donc, lorsque la bille s'immobilise, elle a parcouru dans l'eau une distance

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} (z(t)) - z(0) = v_0 \tau$$

d'où

$$d = \frac{2 \rho v_0 r^2}{9 \eta}$$

Application numérique :

$$d = 1,0 \text{ m}$$

5. La durée T est telle que $z(T) = d - \delta = d \left(1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right)$ avec $\delta = 10^{-6}$ m

$$\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) = \frac{\delta}{d}$$

d'où

$$T = \frac{2\rho r^2}{9\eta} \ln\left(\frac{d}{\delta}\right)$$

Application numérique :

$$T = 28 \text{ s}$$

6. Cherchons la dimension de a à partir de l'expression de dm :

$$[dm] = [a] [m] [v] [dt]$$

$$M = [a] M (L T^{-1}) T$$

$$[a] = L^{-1}$$

On en déduit que a s'exprime en m^{-1} .

7. • Système : {particule (M, m) assimilée à un point matériel } ;
 • Référentiel : terrestre supposé galiléen ;
 • Bilan des forces :
 — le poids $\vec{P} = m \vec{g} = m g \vec{u}_z$
 — forces dues à l'air : négligées
 • Relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P}$$

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = m \vec{g}$$

8. On projette la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u}_z , en tenant compte de $\vec{v} = v \vec{u}_z = \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$:

$$\frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} = m g$$

On remplace dm par son expression et on a $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} v$ par dérivation composée :

$$a m v^2 + m \frac{v dv}{dz} = m g$$

d'où

$$dz = \frac{v dv}{g - a v^2}$$

9. On va intégrer la relation précédente. Pour cela, posons $u = g - a v^2$. On a donc $du = -2 a v dv$.

La relation se réécrit $dz = -\frac{1}{2a} \frac{du}{u}$

On peut alors l'intégrer entre $(z = 0, v = 0)$ (donc $u = g$) et (z, u) :

$$z = -\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u}{g}\right)$$

$$u = g \exp(-2 a z) = g - a v^2$$

$$v^2 = \frac{g}{a} (1 - \exp(-2 a z))$$

Or, la particule descend donc $v > 0$, de sorte que

$$v = \sqrt{\frac{g}{a} [1 - \exp(-2 a z)]}$$

Application numérique :

$$v(100 \text{ m}) = 29 \text{ m.s}^{-1}$$

10. La variation élémentaire d'altitude dz est telle que

$$v = \frac{dz}{dt}$$

donc

$$dz = v dt$$

d'où

$$dz = \sqrt{\frac{g}{a} [1 - \exp(-2 a z)]} dt$$

11. On intègre l'expression précédente grâce au changement de variable proposé par l'énoncé (on prendra $\varphi > 0$) :

$$\varphi^2 = 1 - \exp(-2 a z)$$

$$2 \varphi d\varphi = 2 a \exp(-2 a z) dz = 2 a (1 - \varphi^2) dz$$

L'expression de dz devient alors $\frac{\varphi d\varphi}{a (1 - \varphi^2)} = \sqrt{\frac{g}{a}} \varphi dt$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{a g}} \frac{d\varphi}{1 - \varphi^2}$$

On intègre alors entre $(t = 0, z = 0)$ (donc $\varphi = 0$) et (t, φ) :

$$t = \frac{1}{\sqrt{a g}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} \right|$$

Or, $0 \leq \varphi < 1$, donc $\frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} > 0$.

Finalement

$$t = \frac{1}{2 \sqrt{a g}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \exp(-2 a z)}}{1 - \sqrt{1 - \exp(-2 a z)}} \right)$$

Application numérique :

$$t = 5,3 \text{ s pour } z = 100 \text{ m}$$

12. On s'intéresse ici au cas où a tend vers zéro (pas de condensation). Le plus simple est de repartir de l'expression obtenue à la question 8), qui devient lorsque $a \rightarrow 0$:

$$dz = \frac{v dv}{g} = v dt$$

donc

$$dv = g dt$$

On intègre entre $(t = 0, v = 0)$ et (t, v) :

$$v(t) = g t$$

Exercice 3 (Oscillateur en régime sinusoïdal forcé)

1. Il s'agit d'un simple diviseur de tension utilisé ici avec deux condensateurs. On a donc directement

$$\frac{V_2}{V} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_1}{Y_2 + Y_1} = \frac{C_1}{C_2 + C_1}$$

Le rapport des deux amplitudes complexes étant réel, les deux tensions $v(t)$ et $v_2(t)$ sont en phase.

2. L'impédance \underline{Z} est constituée de deux condensateurs en série, le tout en parallèle d'une inductance,

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{Z}_L // (C_1 + C_2) = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_{C_1+C_2}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{C_1+C_2}} \\ &= \frac{jL\omega \left(\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} \right)}{jL\omega + \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} \\ &= \frac{jL\omega (jC_2\omega + jC_1\omega)}{jL\omega jC_1\omega jC_2\omega + jC_2\omega + jC_1\omega} \quad \begin{array}{l} \times \underline{Y}_{C_1} \underline{Y}_{C_2} \\ \times \underline{Y}_{C_1} \underline{Y}_{C_2} \end{array} \\ \underline{Z} &= \frac{jL\omega (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 - L C_1 C_2 \omega^2} \quad \text{simplification par } j\omega\end{aligned}$$

3. Cette fois-ci, il s'agit d'un diviseur de tension aux bornes de \underline{Z}

$$\frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}$$

d'où
$$\frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \frac{jL\omega (C_1 + C_2)}{jL\omega (C_1 + C_2) + R (C_1 + C_2 - L C_1 C_2 \omega^2)}$$

4. La fonction de transfert se décompose avec les deux rapports calculés précédemment.

$$\begin{aligned}\underline{T} &= \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}} \times \frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} \\ &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} \times \frac{jL\omega (C_1 + C_2)}{jL\omega (C_1 + C_2) + R (C_1 + C_2 - L C_1 C_2 \omega^2)} \\ \underline{T} &= \frac{jL\omega C_1}{jL\omega (C_1 + C_2) + R (C_1 + C_2 - L C_1 C_2 \omega^2)}\end{aligned}$$

Pour obtenir la forme voulue, il suffit de diviser par $jL\omega C_1$ et on obtient bien

$$\underline{T} = \frac{1}{a + \frac{1}{bj\omega} + dj\omega} \quad \text{avec} \quad a = 1 + \frac{C_2}{C_1}, \quad b = \frac{L}{R} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \text{et} \quad d = R C_2$$

Le coefficient a est sans dimension, cohérent avec le fait que la fonction de transfert elle-même est sans dimension comme rapport de deux tensions. Pour conserver cette adimensionnalité, il faut que b et d soit des temps puisqu'on les multiplie par des pulsations homogènes à l'inverse de temps. C'est bien ce que l'on a puisque l'on reconnaît les constantes de temps RC et L/R caractéristiques en régime transitoire.

5. À **basse fréquence**, c'est le terme $\frac{1}{bj\omega}$ qui l'emporte au dénominateur, d'où

$$\underline{T}(\omega) \approx j b \omega^1$$

À **haute fréquence**, au contraire, c'est le terme $dj\omega$ qui domine, d'où

$$\underline{T}(\omega) \approx \frac{1}{dj\omega} = \left(-\frac{j}{d} \right) \omega^{-1}$$

6. À **basse fréquence**

$$|\underline{T}(\omega)| = b\omega \quad \text{et} \quad G_{dB}(\omega) = 20 \log(b\omega) = 20 \log b + 20 \log \omega$$

Dans le diagramme de Bode donnant G_{dB} en fonction de $\log \omega$, la droite asymptote à basse fréquence est donc une droite de pente 20dB/decade et d'ordonnée à l'origine $20 \log b$.

À haute fréquence

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{1}{d\omega} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{dB}(\omega) = -20 \log(d\omega) = -20 \log d - 20 \log \omega}$$

Dans le diagramme de Bode donnant G_{dB} en fonction de $\log \omega$, la droite asymptote à basse fréquence est donc une droite de pente $-20\text{dB}/\text{decade}$ et d'ordonnée à l'origine $-20 \log d$.

DM0

Exercice 4 (Premier principe)

Ressorts identiques : $k_D = k_G = k_1$

1. La résistance chauffante n'est pas alimentée.

(a) Intéressons-nous tout d'abord au piston de gauche :

- Référentiel : laboratoire, considéré galiléen ;
- Système : piston de gauche noté π_G ;
- Repère : $(O; x)$ de vecteur unitaire \vec{e}_x ;
- Hypothèses : on néglige les frottements, la masse et l'épaisseur du piston ;
- Bilan des forces à l'équilibre : force de pression du gaz dans le cylindre $\vec{F}_{\text{gazG}} = -P_A \pi r_{\text{int}}^2 \vec{e}_x$ et force de rappel du ressort gauche $\vec{F}_{rG} = -k_1 (x_{G,A} - x_{G,0}) \vec{e}_x$.

À l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{gazG}} + \vec{F}_{rG} = \vec{0}$$

En projection sur (O, x) $-P_A \pi r_{\text{int}}^2 + -k_1 (x_{G,A} - x_{G,0}) = 0$

d'où
$$\boxed{x_{G,A} = x_{G,0} - \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1}} \quad (1)$$

Intéressons-nous ensuite au piston de droite, sachant que référentiel, repère et hypothèses restent inchangés :

- Système : piston de droite noté π_D ;
- Bilan des forces à l'équilibre :
 - force de pression du gaz dans le cylindre $\vec{F}_{\text{gazD}} = P_A \pi r_{\text{int}}^2 \vec{e}_x$;
 - force de rappel du ressort droit $\vec{F}_{rD} = k_1 (d - x_{D,A} - (d - x_{D,0})) \vec{e}_x = -k_1 (x_{D,A} - x_{D,0}) \vec{e}_x$.

À l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{gazD}} + \vec{F}_{rD} = \vec{0}$$

En projection sur (O, x) $P_A \pi r_{\text{int}}^2 + -k_1 (x_{D,A} - x_{D,0}) = 0$

d'où
$$\boxed{x_{D,A} = x_{D,0} + \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1}} \quad (2)$$

NB : les expressions (1) et (2) seront valables aussi à l'état B, en remplaçant A par B.

(b) Le volume V_A occupé par le gaz est

$$V_A = (x_{D,A} - x_{G,A}) \pi r_{\text{int}}^2$$

Soit donc
$$V_A = \left[x_{D,0} - x_{G,0} + \frac{2\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1} \right] \pi r_{\text{int}}^2 \quad \text{avec } x_{D,0} - x_{G,0} = L$$

d'où
$$\boxed{V_A = \left[L + \frac{2\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1} \right] \pi r_{\text{int}}^2}$$

Application numérique :

$$\boxed{V_A = 5,6 \text{ L}}$$

(c) La température T_A est donnée par l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_A = \frac{P_A V_A}{n_g R}$$

Soit

$$T_A = \frac{P_A \pi r_{\text{int}}^2}{n_g R} \left[L + \frac{2\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1} \right]$$

Application numérique :

$$T_A = 3,4 \cdot 10^2 \text{ K}$$

2. On alimente électriquement la résistance chauffante pendant une durée déterminée.

(a) Le nouveau volume est

$$V_B = \alpha V_A$$

avec $\alpha > 1$

Ou encore

$$\pi r_{\text{int}}^2 (x_{D,B} - x_{G,B}) = \alpha V_A \quad (3)$$

La symétrie du problème ($k_D = k_G = k_1$) est telle que entre les états A et B, le piston π_G s'est décalé vers la gauche de la même distance que le piston π_D s'est décalé vers la droite.

On en déduit

$$x_{D,B} + x_{G,B} = x_{D,A} + x_{G,A} = x_{G,0} + x_{D,0} \quad (4)$$

Les relations (3) et (4) constituent un système de deux équation à deux inconnues. On en déduit directement :

$$x_{G,B} = \frac{1}{2} \left(x_{G,0} + x_{D,0} - \frac{\alpha V_A}{\pi r_{\text{int}}^2} \right) \quad \text{et} \quad x_{D,B} = \frac{1}{2} \left(x_{G,0} + x_{D,0} + \frac{\alpha V_A}{\pi r_{\text{int}}^2} \right)$$

Application numérique :

$$V_B = 7,3 \text{ L}$$

(b) On exploite la relation (1) en remplaçant A par B (nouvel état d'équilibre) :

$$x_{G,B} = x_{G,0} - \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_B}{k_1}$$

Donc

$$P_B = \frac{k_1}{\pi r_{\text{int}}^2} (x_{G,0} - x_{G,B})$$

Ou encore

$$P_B = \alpha P_A + \frac{(\alpha - 1) k_1 L}{2\pi r_{\text{int}}^2}$$

Application numérique :

$$P_B = 1,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

(c) On a à l'état B

$$T_B = \frac{P_B V_B}{n_g R}$$

Application numérique :

$$T_B = 7,4 \cdot 10^2 \text{ K}$$

(d) Au niveau du piston gauche, le travail reçu par le gaz est

$$W_G = \int_A^B \vec{F}_{rG} \cdot dx_G \vec{u}_x$$

Ou encore

$$W_G = - \int_A^B k_1 (x_G - x_{G,0}) \cdot d(x_G - x_{G,0})$$

D'où

$$W_G = - \frac{k_1}{2} \left((x_{G,B} - x_{G,0})^2 - (x_{G,A} - x_{G,0})^2 \right)$$

Compte tenu des symétries du problème, le travail total reçu est $W_{A \rightarrow B} = 2W_G$, soit donc

$$W_{A \rightarrow B} = -k_1 \left((x_{G,B} - x_{G,0})^2 - (x_{G,A} - x_{G,0})^2 \right)$$

Soit donc

$$W_{A \rightarrow B} = -k_1 \left[\left(\frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_B}{k_1} \right)^2 - \left(\frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_A}{k_1} \right)^2 \right]$$

Et finalement

$$W_{A \rightarrow B} = -\frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{k_1} (P_B^2 - P_A^2)$$

Application numérique :

$$W_{A \rightarrow B} = -23 \text{ J}$$

(e) Le premier principe appliqué au système gaz, fermé, s'écrit :

$$\underbrace{\Delta E_{\text{mA} \rightarrow \text{B}}}_{=0} + \Delta U_{A \rightarrow B} = Q_1 + W_{A \rightarrow B}$$

Par ailleurs, la première loi de Joule s'écrit

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = \frac{n_g R}{\gamma - 1} (T_B - T_A)$$

On en déduit

$$Q_1 = \frac{n_g R}{\gamma - 1} (T_B - T_A) + \frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{k_1} (P_B^2 - P_A^2)$$

Application numérique :

$$Q_1 = 1,9 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Ressorts distincts : $k_D = k_1$ et $k_G = 2k_1$

3. De manière analogue à ce qui a été fait en début du problème et en prenant bien en compte le fait que la constante de raideur du ressort gauche vaut $2k_1$ et celle du ressort de droite k_1 :

$$x_{G,C} = x_{G,0} - \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{2k_1} \quad \text{et} \quad x_{D,C} = x_{D,0} + \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{k_1}$$

Le volume V_C s'écrit alors

$$V_C = (x_{D,C} - x_{G,C}) \pi r_{\text{int}}^2$$

$$V_C = \left(x_{D,0} + \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{k_1} - x_{G,0} + \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{2k_1} \right) \pi r_{\text{int}}^2$$

Soit

$$V_C = \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{2k_1} P_C + \underbrace{(x_{D,0} - x_{G,0})}_{=L} \pi r_{\text{int}}^2$$

De la forme

$$V_C = \beta P_C + V_0$$

en posant

$$\beta = \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{2k_1} \quad \text{et} \quad V_0 = L \pi r_{\text{int}}^2$$

Application numérique :

$$\beta = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{Pa}^{-1} \quad V_0 = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

4. La variation d'énergie interne entre les états B et C s'écrit

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{n_g R}{\gamma - 1} (T_C - T_B) \quad \text{1}^{\text{e}} \text{ loi de Joule}$$

Soit donc

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{P_C V_C - n_g R T_B}{\gamma - 1}$$

Et finalement

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{(\beta P_C + V_0) P_C - n_g R T_B}{\gamma - 1} \quad (5)$$

5. En reproduisant le même calcul d'intégrale que dans la question I.2.d, le travail W'_G reçu par le gaz au niveau du piston gauche est

$$W'_G = -\frac{2k_1}{2} \left((x_{G,C} - x_{G,0})^2 - (x_{G,B} - x_{G,0})^2 \right)$$

avec
$$x_{G,C} - x_{G,0} = -\frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{2k_1} \quad \text{et} \quad x_{G,B} - x_{G,0} = -\frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_B}{k_1}$$

Donc
$$W'_G = -\frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{k_1} \left(\frac{P_C^2}{4} - P_B^2 \right)$$

Il faut en revanche oublier le contexte de symétries dans lequel nous nous trouvons dans la partie I.1. Le travail W'_D reçu par le gaz au niveau du piston droit est

$$W'_D = -\frac{k_1}{2} \left((x_{D,C} - x_{D,0})^2 - (x_{D,B} - x_{D,0})^2 \right)$$

avec
$$x_{D,C} - x_{D,0} = \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_C}{k_1} \quad \text{et} \quad x_{D,B} - x_{D,0} = \frac{\pi r_{\text{int}}^2 P_B}{k_1}$$

Donc
$$W'_D = -\frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{2k_1} (P_C^2 - P_B^2)$$

Et finalement
$$W_{B \rightarrow C} = -\frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{k_1} \left(\frac{3}{4} P_C^2 - \frac{3}{2} P_B^2 \right) \quad (6)$$

6. La résistance électrique n'est plus alimentée et les parois délimitant le gaz sont calorifugées, de même que les pistons. Ainsi, le premier principe appliqué au gaz dans l'enceinte macroscopiquement au repos s'écrit

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = \underbrace{Q_{B \rightarrow C}}_{=0} + W_{B \rightarrow C}$$

En égalisant les expressions (5) et (6), on obtient

$$\frac{(\beta P_C + V_0) P_C - n_g R T_B}{\gamma - 1} = -\frac{(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{k_1} \left(\frac{3}{4} P_C^2 - \frac{3}{2} P_B^2 \right)$$

$$\left(\frac{\beta}{\gamma - 1} + \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{4k_1} \right) P_C^2 + \frac{V_0}{\gamma - 1} P_C + \left(-\frac{n_g R T_B}{\gamma - 1} - \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{2k_1} P_B^2 \right) = 0$$

Et donc finalement

$$a = \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{4k_1} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad b = \frac{\pi r_{\text{int}}^2 L}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad c = -\frac{n_g R T_B}{\gamma - 1} - \frac{3(\pi r_{\text{int}}^2)^2}{2k_1} P_B^2$$

Exercice 5 (Oxydoréduction : Solubilité et complexation du diiode en phase aqueuse)

Solubilité et complexation du diiode en phase aqueuse

1. La solubilité est la quantité maximale de diiode solide que l'on peut dissoudre dans 1 L d'eau. Ici, à 25 °C, $s = 0,340 \text{ g.L}^{-1}$; on peut donc dissoudre au maximum 0,170 g de solide dans 0,5 L d'eau. On ne peut donc pas dissoudre 5 g de diiode.

2. La constante d'équilibre K_1^0 s'écrit
$$K_1^0 = \frac{[I_3^-]_{\text{éq}} c^0}{[I_2]_{\text{éq}} [I^-]_{\text{éq}}} \quad \text{avec } c^0 = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$$

3. (a)
$$C_2 = \frac{n(K^+)}{V_{\text{solution}}} = \frac{m(KI)}{M(KI) V_{\text{solution}}} = \frac{m(KI)}{M(KI) V_{\text{solution}}}$$

D'où
$$C_2 = 2,4 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

(b) Le tableau d'avancement en concentrations de la réaction (1) est le suivant



DM0

La conservation de matière du diiode s'écrit

$$[I_2]_0 = [I_2] + [I_3^-]$$

Donc $[I_2] = [I_2]_0 - [I_3^-]$ avec $[I_2]_0 = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

La conservation de matière de l'ion iodure s'écrit

$$[I^-]_0 = [I^-] + [I_3^-]$$

Donc $[I^-] = C_2 - [I_3^-]$ avec $C_2 = 2,4 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

(c) On reporte les expressions précédentes dans l'expression de la constante d'équilibre :

$$K_1^0 = \frac{[I_3^-] c^0}{[I_2] [I^-]} = \frac{[I_3^-] c^0}{([I_2]_0 - [I_3^-]) (C_2 - [I_3^-])}$$

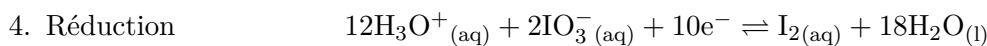
On obtient $[I_3^-] = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

A noter le fait que la solution mathématique $2,4 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ est à exclure car la concentration en I_3^- ne peut dépasser la concentration en diiode initiale.

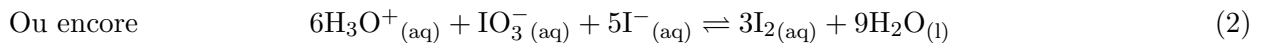
On en déduit $[I^-] = 0,20 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[I_2] = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

(d) Pratiquement la totalité du diiode s'est transformé en I_3^- . Il ne reste que 1% de diiode. La concentration du diiode restant est bien inférieure à la solubilité du diiode dans l'eau pure. Le diiode est donc totalement solubilisé dans la solution A.

Préparation d'une solution aqueuse de diiode



6. En combinant les deux demi-équations électroniques précédentes, il vient



7. La réaction ci-avant est totale. Par ailleurs, le diiode formé sera partiellement transformé en complexe I_3^- , de telle sorte que globalement, les ions IO_3^- se transforment en fait en I_2 et en ions I_3^- , avec

$$n_T = n(I_2) + n(I_3^-) = 0,020 \text{ mol} \quad \text{pour } V = 2,0 \text{ L de solution}$$

Or, la stoechiométrie de (2) impose $n(IO_3^-)_0 = \frac{n_T}{3}$

Il faut donc peser $m(KIO_3) = n(IO_3^-)_0 \times M(KIO_3) = 1,4 \text{ g}$

8. (a) La solubilité molaire du diiode, notée $[I_2]_{\max}$, s'écrit

$$[I_2]_{\max} = \frac{s}{M_{I_2}}$$

Soit $[I_2]_{\max} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

(b) On a, avec $[I_2] = [I_2]_{\max}$:

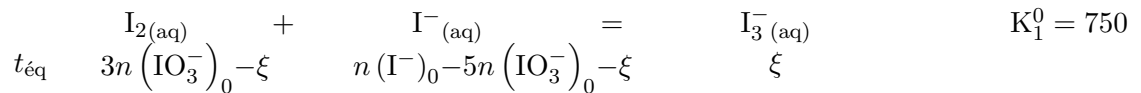
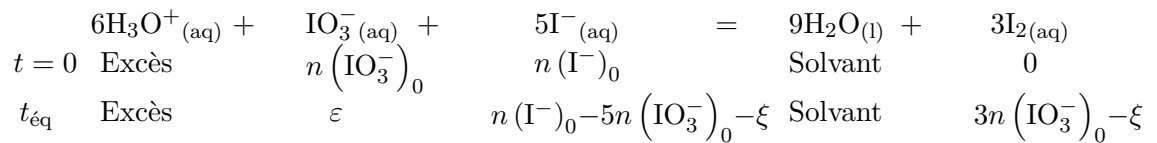
$$\text{Conservation de la matière } [I_3^-] = C_T - [I_2] = 8,66 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{Équilibre} \quad K = \frac{[I_3^-] c^0}{[I_2][I^-]}$$

$$\text{Donc} \quad [I^-] = \frac{[I_3^-] c^0}{K [I_2]} = 8,62 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

(c) Les ions iodure ont deux utilités : former le diiode à partir des ions iodate (première réaction, totale) et complexer en I_3^- une partie du diiode formé (équilibre d'avancement ξ).

On effectue un bilan de matière sur ces deux réactions (tableaux molaires parallèles) :



$$\text{On a donc} \quad n(I^-) = n(I^-)_0 - 5n(IO_3^-)_0 - n(I_3^-)$$

$$\text{D'où} \quad n(I^-)_0 = [I^-]V + 5n(IO_3^-)_0 + [I_3^-]V$$

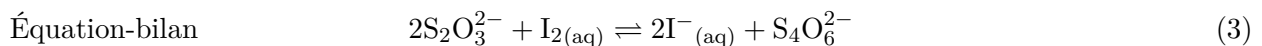
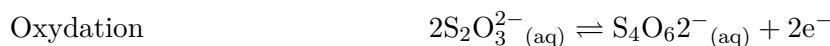
avec $[I^-] = 8,62 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ (concentration calculée en 8.b).

On doit ajouter au minimum la masse m d'iodure de potassium :

$$m = M(KI) \times ([I^-]V + 5n(IO_3^-)_0 + [I_3^-]V) = 11,3 \text{ g}$$

Si on ajoute plus d'ions iodure, le diiode réagira d'autant plus (cf. équilibre (1)). On aura alors $[I_2] < [I_2]_{\max}$.

Dosage d'une solution aqueuse de thiosulfate de sodium par la solution C



10. (a) La fin du dosage est repérée par la persistance de la couleur du diiode (libre et complexé). En effet, le diiode est ici l'espèce titrante et non l'espèce titrée !

$$(b) \text{ À l'équivalence} \quad [S_2O_3^{2-}] = \frac{2[I_2]V_e}{V_D} = 3,70 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Ici, la concentration $[I_2]$ est égale à C_T . En effet, lorsque la solution C est mise en contact avec la solution D, la réaction (3) a lieu, consommant ainsi intégralement le diiode (il reste à l'état de trace). Cependant, dans l'erlenmeyer, il y a alors des ions I^- (produits de la réaction (3) et provenant de la solution C) et des ions I_3^- (provenant de la solution C). L'équilibre (1) va alors être déplacé vers la gauche, formant ainsi du diiode. Au final, pour la relation à l'équivalence, $[I_2] = C_T$.

$$\text{D'où finalement} \quad [S_2O_3^{2-}] = \frac{2C_T V_e}{V_D} = 3,70 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$