# DM0 ⋆ Retour sur la sup



## CORRIGÉ

### Exercice 1 (Évolution suivie)

1. Plaçons-nous dans le système où l'on ferme $K_1$ à $t = 0$ et où $K_2$ reste ouvert.

   (a) La maille de droite a atteint son régime permanent et le courant traversant la bobine (équivalente à un fil) à $t = 0^-$ vaut $i_1(0^-) = E/R_1$. La maille de gauche en revanche est initialement ouverte donc $i_2(0^-) = 0$. Par continuité du courant dans chaque bobine, on a donc

$$\boxed{i_1(0) = \frac{E}{R_1} \qquad \text{et} \qquad i_2(0) = 0}$$

   Un nouveau régime permanent s'installe dans lequel chaque bobine est équivalente à un fil et chaque résistance est donc soumise à une tension E. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2}}$$

   (b) Après fermeture de $K_1$, on peut écrire indépendamment la loi des mailles dans la maille de gauche et dans celle de droite. Ainsi, après quelques lignes non détaillées ici (loi des mailles et équations d'évolution aux bornes des dipôles),

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{E}{L_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R_2}{L_2} i_2 = \frac{E}{L_2}}$$

   (c) La maille de droite n'est pas perturbée par la fermeture de $K_1$ (elle était soumise à la même équation différentielle auparavant) et reste donc dans le régime permanent déjà atteint [1] :

$$\boxed{i_1(t) = i_1 = \frac{E}{R_1} = C^{\text{te}}}$$

   La maille de gauche est soumise au classique échelon de tension avec condition initiale nulle dont la solution est

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}}$$

   qui vérifie bien la condition initiale nulle ainsi que la limite quand $t$ tend vers l'infini. La courbe de $i_2(t)$ est proposée à la fin de l'exercice.

2. On ferme à présent $K_2$ en ayant attendu l'installation du régime permanent précédent.

   (a) Les nouvelles conditions initiales correspondent aux valeurs prises précédemment pour $t \to \infty$ du fait de la continuité du courant dans les deux bobines

$$\boxed{i_1(0) = \frac{E}{R_1} \qquad \text{et} \qquad i_2(0) = \frac{E}{R_2}}$$

   Lorsqu'on atteint le régime permanent, la bobine $L_1$ se comportant comme un fil, c'est toujours la tension E qui est appliquée aux bornes de $R_1$, d'où

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1}}$$

   Comme $L_2$ se transforme aussi en fil, la résistance $R_2$ est aussi soumise à la tension E. Mais le courant traversant $L_2$ est la somme du courant $i_2' = E/R_2$ traversant $R_2$ et de celui $\eta$ produit par la source de courant (court-circuitée par le fil/bobine), d'où

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2} + \eta}$$

1. La résolution de l'équation implique que la constante devant l'exponentielle de la solution homogène est nulle.

(b) La loi des mailles dans la maille de droite permet d'écrire la même équation pour $i_1$, à savoir

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{L}_1}\, i_1 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}_1}}$$

La loi des mailles dans la maille de gauche permet d'obtenir l'autre équation en prenant garde au fait que le courant $i_2'(t)$ traversant la résistance $\mathrm{R}_2$ vaut, d'après la loi des nœuds, $i_2'(t) = i_2(t) - \eta$, d'où

$$\mathrm{E} = \mathrm{L}_2\, \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}_2\, i_2' = \mathrm{L}_2\, \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}_2\, i_2 - \mathrm{R}_2\, \eta$$

Et finalement,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{L}_2}\, i_2 = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{R}_2\, \eta}{\mathrm{L}_2}}$$

(c) L'équation pour $i_1$ est toujours la même avec les mêmes conditions initiales, celui-ci reste donc

$$\boxed{i_1(t) = i_1 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_1} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$$

L'équation pour $i_2$ mérite néanmoins qu'on s'y arrête quelque peu. Une solution particulière est

$$i_{2\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_2} + \eta$$

La solution de l'équation homogène s'écrit quant à elle

$$i_{2\mathrm{h}} = \mathrm{A}\, \mathrm{e}^{-t/\tau_2} \qquad \text{avec} \qquad \tau_2 = \frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{R}_2}$$

La condition initiale appliquée à $i_{2\mathrm{p}} + i_{2\mathrm{h}}$ impose que

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_2} + \eta + \mathrm{A} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_2}$$

d'où

$$\boxed{i_2(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_2} + \eta \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau_2 = \frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{R}_2}}$$

La solution démarre bien de $\mathrm{E}/\mathrm{R}_2$ et tend exponentiellement vers sa valeur limite $\mathrm{E}/\mathrm{R}_2 + \eta$.

## Exercice 2 (Mouvements dans le champ de pesanteur terrestre)

1. 
   - Système : {bille (M,$m$) assimilée à un point matériel } ;
   - Référentiel : terrestre supposé galiléen ;
   - Bilan des forces :
     - le poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\, \overrightarrow{g} = m\, g\, \overrightarrow{u_z}$
     - frottements de l'air et poussée d'Archimède : négligés
   - Théorème de l'énergie cinétique entre $z = -h$ et $z = 0$ :

$$\Delta \mathrm{E_c} = \mathrm{W}\left(\overrightarrow{\mathrm{P}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\, m\, \left({v_0}^2 - 0^2\right) = m\, g\, \left(0 - (-h)\right)$$

d'où

$$\boxed{h = \frac{{v_0}^2}{2\, g}}$$

*Application numérique* : $\boxed{h = 1{,}3 \text{ cm}}$

2. Les forces dans le liquide sont

- Le poids : $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = m\,g\,\overrightarrow{u_z}$
- La poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi}_{\text{eau}} = -\dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho_{\text{eau}}\,\overrightarrow{g} = -m\,\overrightarrow{g} = -m\,g\,\overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{\mathrm{P}}$ car $\rho_{\text{eau}} = \rho$
- Les frottements : $\overrightarrow{f} - 6\,\pi\,\eta\,r\,\overrightarrow{v} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\pi}_{\text{eau}}}_{=0} + \overrightarrow{f}$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\overrightarrow{v}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{6\,\pi\,\eta\,r}{m}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

3. L'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire, du 1^er^ ordre en $\overrightarrow{v}$, à coefficients constants et de second terme nul. La solution s'écrit

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{V}}\,\exp\left(-\frac{6\,\pi\,\eta\,r}{m}\,t\right) \qquad \text{où } \overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}$$

On détermine $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ grâce aux conditions initiales :

$$\overrightarrow{v}\,(t=0) = \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{\mathrm{V}} = v_0\,\overrightarrow{u_z}$$

et on exprime $m$ en fonction des données :

$$\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho = m$$

Donc finalement
$$\boxed{\overrightarrow{v} = v_0\,\exp\left(-\frac{9\,\eta}{2\,\rho\,r^2}\,t\right)\,\overrightarrow{u_z}}$$

On voit donc que
$$\lim_{t\to\infty}\left(\overrightarrow{v}\,(t)\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\text{Au bout de quelques } \tau = \frac{2\,\rho\,r^2}{9\,\eta}\text{, la bille s'immobilise.}}$$

4. Écrivons $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}$ ; on peut projeter sur $\overrightarrow{u_z}$ l'expression de $\overrightarrow{v}$ :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_0\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On peut intégrer cette équation entre $(t=0, z=0)$ et $(t>0, z>0)$ :

$$\boxed{z\,(t) = v_0\,\tau\,\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

Donc, lorsque la bille s'immobilise, elle a parcouru dans l'eau une distance

$$d = \lim_{t\to\infty}\left(z\,(t)\right) - z\,(0) = v_0\,\tau$$

d'où
$$\boxed{d = \frac{2\,\rho\,v_0\,r^2}{9\,\eta}}$$

*Application numérique* :
$$\boxed{d = 1{,}0\ \mathrm{m}}$$

5. La durée T est telle que $z(\mathrm{T}) = d - \delta = d\left(1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{T}}{\tau}\right)\right)$ avec $\delta = 10^{-6}$ m

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{T}}{\tau}\right) = \frac{\delta}{d}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\,\rho\,r^2}{9\,\eta}\,\ln\left(\frac{d}{\delta}\right)}$$

*Application numérique* : $\boxed{\mathrm{T} = 28\ \mathrm{s}}$

6. Cherchons la dimension de $a$ à partir de l'expression de d$m$ :

$$[\mathrm{d}m] = [a]\ [m]\ [v]\ [\,\mathrm{d}t]$$

$$\mathrm{M} = [a]\ \mathrm{M}\ (\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1})\ \mathrm{T}$$

$$[a] = \mathrm{L}^{-1}$$

$\boxed{\text{On en déduit que } a \text{ s'exprime en m}^{-1}.}$

7. 
   - <u>Système</u> : {particule (M,$m$) assimilée à un point matériel } ;
   - <u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen ;
   - <u>Bilan des forces</u> :
     - le poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = m\,g\,\overrightarrow{u_z}$
     - forces dues à l'air : négligées
   - <u>Relation fondamentale de la dynamique</u> :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{P}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left(m\,\overrightarrow{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\,\overrightarrow{g}}$$

8. On projette la relation fondamentale de la dynamique sur $\overrightarrow{u_z}$, en tenant compte de $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}$ :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,v + m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g$$

On remplace d$m$ par son expression et on a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}v$ par dérivation composée :

$$a\,m\,v^2 + m\,\frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = m\,g$$

d'où $$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{v\,\mathrm{d}v}{g - a\,v^2}}$$

9. On va intégrer la relation précédente. Pour cela, posons $u = g - a\,v^2$. On a donc d$u = -2\,a\,v\,\mathrm{d}v$.

La relation se réécrit $$\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\,a}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

On peut alors l'intégrer entre ($z = 0$,$v = 0$) (donc $u = g$) et ($z$,$u$) :

$$z = -\frac{1}{2\,a}\,\ln\left(\frac{u}{g}\right)$$

$$u = g\,\exp\left(-2\,a\,z\right) = g - a\,v^2$$

$$v^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)\right)$$

Or, la particule descend donc $v > 0$, de sorte que

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g}{a}\,\left[1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)\right]}}$$

*Application numérique* : $\boxed{v\,(100\text{ m}) = 29\text{ m.s}^{-1}}$

10. La variation élémentaire d'altitude $\mathrm{d}z$ est telle que

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$\mathrm{d}z = v\ \mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{g}{a}\,\left[1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)\right]}\ \mathrm{d}t}$$

11. On intègre l'expression précédente grâce au changement de variable proposé par l'énoncé (on prendra $\varphi > 0$) :

$$\varphi^2 = 1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)$$

$$2\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\,a\,\exp\left(-2\,a\,z\right)\ \mathrm{d}z = 2\,a\,\left(1 - \varphi^2\right)\ \mathrm{d}z$$

L'expression de $\mathrm{d}z$ devient alors

$$\frac{\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{a\,\left(1 - \varphi^2\right)} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,\varphi\ \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a\,g}}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{1 - \varphi^2}$$

On intègre alors entre $(t = 0, z = 0)$ (donc $\varphi = 0$) et $(t, \varphi)$ :

$$t = \frac{1}{\sqrt{a\,g}}\,\frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1 + \varphi}{1 - \varphi}\right|$$

Or, $0 \leqslant \varphi < 1$, donc $\dfrac{1 + \varphi}{1 - \varphi} > 0$.

Finalement

$$\boxed{t = \frac{1}{2\,\sqrt{a\,g}}\,\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)}}{1 - \sqrt{1 - \exp\left(-2\,a\,z\right)}}\right)}$$

*Application numérique* : $\boxed{t = 5{,}3\text{ s pour } z = 100\text{ m}}$

12. On s'intéresse ici au cas où $a$ tend vers zéro (pas de condensation). Le plus simple est de repartir de l'expression obtenue à la question 8), qui devient lorsque $a \to 0$ :

$$\mathrm{d}z = \frac{v\,\mathrm{d}v}{g} = v\ \mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{d}v = g\ \mathrm{d}t$$

On intègre entre $(t = 0, v = 0)$ et $(t, v)$ : $\boxed{v\,(t) = g\,t}$

## Exercice 3 (Oscillateur en régime sinusoïdal forcé)

1. Il s'agit d'un simple diviseur de tension utilisé ici avec deux condensateurs. On a donc directement

$$\boxed{\frac{\underline{\mathrm{V}}_2}{\underline{\mathrm{V}}} = \frac{\underline{\mathrm{Z}}_2}{\underline{\mathrm{Z}}_1 + \underline{\mathrm{Z}}_2} = \frac{\underline{\mathrm{Y}}_1}{\underline{\mathrm{Y}}_2 + \underline{\mathrm{Y}}_1} = \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1}}$$

Le rapport des deux amplitudes complexes étant réel, les deux tensions $v(t)$ et $v_2(t)$ sont en phase.

2. L'impédance $\underline{Z}$ est constituée de deux condensateurs en série, le tout en parallèle d'une inductance,

$$\begin{aligned}
\underline{Z} = \underline{Z}_{L//(C_1+C_2)} &= \frac{\underline{Z}_L\,\underline{Z}_{C_1+C_2}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{C_1+C_2}} \\
&= \frac{j\,L\omega\left(\dfrac{1}{j\,C_1\omega} + \dfrac{1}{j\,C_2\omega}\right)}{j\,L\omega + \dfrac{1}{j\,C_1\omega} + \dfrac{1}{j\,C_2\omega}} \\
&= \frac{j\,L\omega\,(j\,C_2\omega + j\,C_1\omega)}{j\,L\omega\,j\,C_1\omega\,j\,C_2\omega + j\,C_2\omega + j\,C_1\omega} && \frac{\times\underline{Y}_{C_1}\,\underline{Y}_{C_2}}{\times\underline{Y}_{C_1}\,\underline{Y}_{C_2}} \\
&\boxed{\underline{Z} = \frac{j\,L\omega\,(C_1+C_2)}{C_1+C_2-L\,C_1\,C_2\,\omega^2}} && \text{simplification par } j\omega
\end{aligned}$$

3. Cette fois-ci, il s'agit d'un diviseur de tension aux bornes de $\underline{Z}$

$$\boxed{\frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+R}}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} = \frac{j\,L\omega\,(C_1+C_2)}{j\,L\omega\,(C_1+C_2) + R\,(C_1+C_2-L\,C_1\,C_2\,\omega^2)}}$$

4. La fonction de transfert se décompose avec les deux rapports calculés précédemment.

$$\begin{aligned}
\underline{T} &= \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}} \times \frac{\underline{V}}{\underline{V}_1} \\
&= \frac{C_1}{C_1+C_2} \times \frac{j\,L\omega\,(C_1+C_2)}{j\,L\omega\,(C_1+C_2) + R\,(C_1+C_2-L\,C_1\,C_2\,\omega^2)} \\
\underline{T} &= \frac{j\,L\omega\,C_1}{j\,L\omega\,(C_1+C_2) + R\,(C_1+C_2-L\,C_1\,C_2\,\omega^2)}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la forme voulue, il suffit de diviser par $j\,L\omega\,C_1$ et on obtient bien

$$\boxed{\underline{T} = \frac{1}{a + \dfrac{1}{b\,j\omega} + d\,j\omega} \qquad \text{avec} \qquad a = 1 + \frac{C_2}{C_1}, \quad b = \frac{L}{R}\,\frac{C_1}{C_1+C_2} \quad \text{et} \quad d = R\,C_2}$$

Le coefficient $a$ est sans dimension, cohérent avec le fait que la fonction de transfert elle-même est sans dimension comme rapport de deux tensions. Pour conserver cette adimensionnalité, il faut que $b$ et $d$ soit des temps puisqu'on les multiplie par des pulsations homogènes à l'inverse de temps. C'est bien ce que l'on a puisque l'on reconnaît les constantes de temps RC et L/R caractéristiques en régime transitoire.

5. À **basse fréquence**, c'est le terme $\dfrac{1}{b\,j\omega}$ qui l'emporte au dénominateur, d'où

$$\boxed{\underline{T}(\omega) \approx j\,b\,\omega^1}$$

À **haute** fréquence, au contraire, c'est le terme $d\,j\omega$ qui domine, d'où

$$\boxed{\underline{T}(\omega) \approx \frac{1}{d\,j\omega} = \left(-\frac{j}{d}\right)\omega^{-1}}$$

6. À **basse** fréquence

$$|\underline{T}(\omega)| = b\,\omega \qquad \text{et} \qquad \boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log(b\,\omega) = 20\log b + 20\log\omega}$$

Dans le diagramme de Bode donnant $G_{dB}$ en fonction de $\log\omega$, la droite asymptote à basse fréquence est donc une droite de pente 20dB/decade et d'ordonnée à l'origine $20\log b$.

À **haute** fréquence

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{1}{d\,\omega} \qquad \text{et} \qquad \boxed{G_{dB}(\omega) = -20\log(d\,\omega) = -20\log d - 20\log\omega}$$

Dans le diagramme de Bode donnant $G_{dB}$ en fonction de $\log\omega$, la droite asymptote à basse fréquence est donc une droite de pente -20dB/decade et d'ordonnée à l'origine $-20\log d$.

DM0

## Exercice 4 (Premier principe)

### Ressorts identiques : $k_D = k_G = k_1$

1. La résistance chauffante n'est pas alimentée.

   (a) Intéressons-nous tout d'abord au piston de gauche :

   — Référentiel : laboratoire, considéré galiléen ;
   — Système : piston de gauche noté $\pi_G$ ;
   — Repère : $(O;x)$ de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$ ;
   — Hypothèses : on néglige les frottements, la masse et l'épaisseur du piston ;
   — Bilan des forces à l'équilibre : force de pression du gaz dans le cylindre $\overrightarrow{F}_{gazG} = -P_A\pi r_{int}^2\overrightarrow{e_x}$ et force de rappel du ressort gauche $\overrightarrow{F}_{rG} = -k_1\,(x_{G,A} - x_{G,0})\,\overrightarrow{e_x}$.

   À l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{gazG} + \overrightarrow{F}_{rG} = \overrightarrow{0}$$

   En projection sur $(O,x)$ $\qquad -P_A\pi r_{int}^2 + -k_1\,(x_{G,A} - x_{G,0}) = 0$

   d'où
$$\boxed{x_{G,A} = x_{G,0} - \frac{\pi r_{int}^2\,P_A}{k_1}} \qquad (\mathbf{1})$$

   Intéressons-nous ensuite au piston de droite, sachant que référentiel, repère et hypothèses restent inchangés :

   — Système : piston de droite noté $\pi_D$ ;
   — Bilan des forces à l'équilibre :
      — force de pression du gaz dans le cylindre $\overrightarrow{F}_{gazD} = P_A\pi r_{int}^2\overrightarrow{e_x}$ ;
      — force de rappel du ressort droit $\overrightarrow{F}_{rD} = k_1\,(d - x_{D,A} - (d - x_{D,0}))\,\overrightarrow{e_x} = -k_1\,(x_{D,A} - x_{D,0})\,\overrightarrow{e_x}$.

   À l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{gazD} + \overrightarrow{F}_{rD} = \overrightarrow{0}$$

   En projection sur $(O,x)$ $\qquad P_A\pi r_{int}^2 + -k_1\,(x_{D,A} - x_{D,0}) = 0$

   d'où
$$\boxed{x_{D,A} = x_{D,0} + \frac{\pi r_{int}^2\,P_A}{k_1}} \qquad (\mathbf{2})$$

   **NB :** les expressions (1) et (2) seront valables aussi à l'état B, en remplaçant A par B.

   (b) Le volume $V_A$ occupé par le gaz est

$$V_A = (x_{D,A} - x_{G,A})\,\pi r_{int}^2$$

   Soit donc
$$V_A = \left[x_{D,0} - x_{G,0} + \frac{2\pi r_{int}^2\,P_A}{k_1}\right]\pi r_{int}^2 \qquad \text{avec } x_{D,0} - x_{G,0} = L$$

   d'où
$$\boxed{V_A = \left[L + \frac{2\pi r_{int}^2\,P_A}{k_1}\right]\pi r_{int}^2}$$

   *Application numérique* : $\boxed{V_A = 5{,}6\ L}$

(c) La température $T_A$ est donnée par l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_A = \frac{P_A V_A}{n_g R}$$

Soit
$$\boxed{T_A = \frac{P_A\, \pi r_{int}^2}{n_g R}\left[L + \frac{2\pi r_{int}^2\, P_A}{k_1}\right]}$$

*Application numérique* : $\boxed{T_A = 3{,}4.10^2 \text{ K}}$

2. On alimente électriquement la résistance chauffante pendant une durée déterminée.

(a) Le nouveau volume est $V_B = \alpha V_A$ avec $\alpha > 1$

Ou encore
$$\pi r_{int}^2 \left(x_{D,B} - x_{G,B}\right) = \alpha V_A \qquad (\mathbf{3})$$

La symétrie du problème ($k_D = k_G = k_1$) est telle que entre les états A et B, le piston $\pi_G$ s'est décalé vers la gauche de la même distance que le piston $\pi_D$ s'est décalé vers la droite.

On en déduit
$$x_{D,B} + x_{G,B} = x_{D,A} + x_{G,A} = x_{G,0} + x_{D,0} \qquad (\mathbf{4})$$

Les relations (**3**) et (**4**) constituent un système de deux équation à deux inconnues. On en déduit directement :

$$\boxed{x_{G,B} = \frac{1}{2}\left(x_{G,0} + x_{D,0} - \frac{\alpha V_A}{\pi r_{int}^2}\right) \qquad \text{et} \qquad x_{D,B} = \frac{1}{2}\left(x_{G,0} + x_{D,0} + \frac{\alpha V_A}{\pi r_{int}^2}\right)}$$

*Application numérique* : $\boxed{V_B = 7{,}3 \text{ L}}$

(b) On exploite la relation (**1**) en remplaçant A par B (nouvel état d'équilibre) :

$$x_{G,B} = x_{G,0} - \frac{\pi r_{int}^2\, P_B}{k_1}$$

Donc
$$P_B = \frac{k_1}{\pi r_{int}^2}\left(x_{G,0} - x_{G,B}\right)$$

Ou encore
$$\boxed{P_B = \alpha P_A + \frac{(\alpha - 1)\, k_1 L}{2\pi r_{int}^2}}$$

*Application numérique* : $\boxed{P_B = 1{,}7.10^4 \text{ Pa}}$

(c) On a à l'état B
$$T_B = \frac{P_B V_B}{n_g R}$$

*Application numérique* : $\boxed{T_B = 7{,}4.10^2 \text{ K}}$

(d) Au niveau du piston gauche, le travail reçu par le gaz est

$$W_G = \int_A^B \overrightarrow{F}_{rG}.dx_G \overrightarrow{u_x}$$

Ou encore
$$W_G = -\int_A^B k_1 \left(x_G - x_{G,0}\right).d\left(x_G - x_{G,0}\right)$$

D'où
$$W_G = -\frac{k_1}{2}\left(\left(x_{G,B} - x_{G,0}\right)^2 - \left(x_{G,A} - x_{G,0}\right)^2\right)$$

Compte tenu des symétries du problème, le travail total reçu est $W_{A\to B} = 2W_G$, soit donc

$$\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -k_1\left((x_{\mathrm{G,B}} - x_{\mathrm{G,0}})^2 - (x_{\mathrm{G,A}} - x_{\mathrm{G,0}})^2\right)$$

Soit donc
$$\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -k_1\left[\left(\frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2 \mathrm{P_B}}{k_1}\right)^2 - \left(\frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2 \mathrm{P_A}}{k_1}\right)^2\right]$$

Et finalement
$$\boxed{\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\frac{\left(\pi r_{\mathrm{int}}^2\right)^2}{k_1}\left(\mathrm{P_B^2} - \mathrm{P_A^2}\right)}$$

*Application numérique* : $\boxed{\mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -23\ \mathrm{J}}$

(e) Le premier principe appliqué au système gaz, fermé, s'écrit :

$$\underbrace{\Delta \mathrm{E}_{\mathrm{mA}\to\mathrm{B}}}_{=0} + \Delta \mathrm{U}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{W}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

Par ailleurs, la première loi de Joule s'écrit

$$\Delta \mathrm{U}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{n_{\mathrm{g}}\mathrm{R}}{\gamma - 1}\left(\mathrm{T_B} - \mathrm{T_A}\right)$$

On en déduit
$$\boxed{\mathrm{Q}_1 = \frac{n_{\mathrm{g}}\mathrm{R}}{\gamma - 1}\left(\mathrm{T_B} - \mathrm{T_A}\right) + \frac{\left(\pi r_{\mathrm{int}}^2\right)^2}{k_1}\left(\mathrm{P_B^2} - \mathrm{P_A^2}\right)}$$

*Application numérique* : $\boxed{\mathrm{Q}_1 = 1{,}9.10^2\ \mathrm{J}}$

**Ressorts distincts : $k_{\mathrm{D}} = k_1$ et $k_{\mathrm{G}} = 2k_1$**

3. De manière analogue à ce qui a été fait en début du problème et en prenant bien en compte le fait que la constante de raideur du ressort gauche vaut $2k_1$ et celle du ressort de droite $k_1$ :

$$x_{\mathrm{G,C}} = x_{\mathrm{G,0}} - \frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2\,\mathrm{P_C}}{2k_1} \qquad \text{et} \qquad x_{\mathrm{D,C}} = x_{\mathrm{D,0}} + \frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2\,\mathrm{P_C}}{k_1}$$

Le volume $\mathrm{V_C}$ s'écrit alors $\qquad \mathrm{V_C} = \left(x_{\mathrm{D,C}} - x_{\mathrm{G,C}}\right)\pi r_{\mathrm{int}}^2$

$$\mathrm{V_C} = \left(x_{\mathrm{D,0}} + \frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2\,\mathrm{P_C}}{k_1} - x_{\mathrm{G,0}} + \frac{\pi r_{\mathrm{int}}^2\,\mathrm{P_C}}{2k_1}\right)\pi r_{\mathrm{int}}^2$$

Soit
$$\mathrm{V_C} = \frac{3\left(\pi r_{\mathrm{int}}^2\right)^2}{2k_1}\mathrm{P_C} + \underbrace{\left(x_{\mathrm{D,0}} - x_{\mathrm{G,0}}\right)}_{=\mathrm{L}}\pi r_{\mathrm{int}}^2$$

De la forme $\qquad \boxed{\mathrm{V_C} = \beta \mathrm{P_C} + \mathrm{V}_0}$

en posant
$$\boxed{\beta = \frac{3\left(\pi r_{\mathrm{int}}^2\right)^2}{2k_1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_0 = \mathrm{L}\pi r_{\mathrm{int}}^2}$$

*Application numérique* : $\boxed{\beta = 1{,}9.10^{-7}\ \mathrm{m^3.Pa^{-1}} \quad \mathrm{V}_0 = 3{,}1.10^{-3}\ \mathrm{m^3}}$

4. La variation d'énergie interne entre les états B et C s'écrit

$$\Delta \mathrm{U}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = \frac{n_{\mathrm{g}}\mathrm{R}}{\gamma - 1}\left(\mathrm{T_C} - \mathrm{T_B}\right) \qquad \text{1}^{\text{re}}\text{ loi de Joule}$$

Soit donc
$$\Delta \mathrm{U}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{P_C V_C} - n_{\mathrm{g}}\mathrm{R T_B}}{\gamma - 1}$$

Et finalement
$$\boxed{\Delta \mathrm{U}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = \frac{\left(\beta \mathrm{P_C} + \mathrm{V}_0\right)\mathrm{P_C} - n_{\mathrm{g}}\mathrm{R T_B}}{\gamma - 1}} \qquad (5)$$

5. En reproduisant le même calcul d'intégrale que dans la question I.2.d, le travail $W'_G$ reçu par le gaz au niveau du piston gauche est

$$W'_G = -\frac{2k_1}{2}\left((x_{G,C} - x_{G,0})^2 - (x_{G,B} - x_{G,0})^2\right)$$

avec $$x_{G,C} - x_{G,0} = -\frac{\pi r_{int}^2 P_C}{2k_1} \quad \text{et} \quad x_{G,B} - x_{G,0} = -\frac{\pi r_{int}^2 P_B}{k_1}$$

Donc $$W'_G = -\frac{(\pi r_{int}^2)^2}{k_1}\left(\frac{P_C^2}{4} - P_B^2\right)$$

Il faut en revanche oublier le contexte de symétries dans lequel nous nous trouvions dans la partie I.1. Le travail $W'_D$ reçu par le gaz au niveau du piston droit est

$$W'_D = -\frac{k_1}{2}\left((x_{D,C} - x_{D,0})^2 - (x_{D,B} - x_{D,0})^2\right)$$

avec $$x_{D,C} - x_{D,0} = \frac{\pi r_{int}^2 P_C}{k_1} \quad \text{et} \quad x_{D,B} - x_{D,0} = \frac{\pi r_{int}^2 P_B}{k_1}$$

Donc $$W'_D = -\frac{(\pi r_{int}^2)^2}{2k_1}\left(P_C^2 - P_B^2\right)$$

Et finalement $$\boxed{W_{B\to C} = -\frac{(\pi r_{int}^2)^2}{k_1}\left(\frac{3}{4}P_C^2 - \frac{3}{2}P_B^2\right)} \qquad (\mathbf{6})$$

6. La résistance électrique n'est plus alimentée et les parois délimitant le gaz sont calorifugées, de même que les pistons. Ainsi, le premier principe appliqué au gaz dans l'enceinte macroscopiquement au repos s'écrit

$$\Delta U_{B\to C} = \underbrace{Q_{B\to C}}_{=0} + W_{B\to C}$$

En égalisant les expressions (**5**) et (**6**), on obtient

$$\frac{(\beta P_C + V_0)P_C - n_g R T_B}{\gamma - 1} = -\frac{(\pi r_{int}^2)^2}{k_1}\left(\frac{3}{4}P_C^2 - \frac{3}{2}P_B^2\right)$$

$$\left(\frac{\beta}{\gamma-1} + \frac{3(\pi r_{int}^2)^2}{4k_1}\right)P_C^2 + \frac{V_0}{\gamma-1}P_C + \left(-\frac{n_g R T_B}{\gamma-1} - \frac{3(\pi r_{int}^2)^2}{2k_1}P_B^2\right) = 0$$

Et donc finalement

$$\boxed{a = \frac{3(\pi r_{int}^2)}{4k_1}\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \qquad b = \frac{\pi r_{int}^2 L}{\gamma-1} \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{n_g R T_B}{\gamma-1} - \frac{3(\pi r_{int}^2)^2}{2k_1}P_B^2}$$

## Exercice 5 (Oxydoréduction : Solubilité et complexation du diiode en phase aqueuse)

### Solubilité et complexation du diiode en phase aqueuse

1. La solubilité est la quantité maximale de diiode solide que l'on peut dissoudre dans 1 L d'eau. Ici, à 25 °C, $s = 0{,}340$ g.L$^{-1}$ ; on peut donc dissoudre au maximum 0,170 g de solide dans 0,5 L d'eau. On ne peut donc pas dissoudre 5 g de diiode.

2. La constante d'équilibre $K_1^0$ s'écrit $$K_1^0 = \frac{\left[I_3^-\right]_{éq} c^0}{[I_2]_{éq}\,[I^-]_{éq}} \qquad \text{avec } c^0 = 1{,}0 \text{ mol.L}^{-1}$$

3. (a) $$C_2 = \frac{n(K^+)}{V_{solution}} = \frac{\frac{m(KI)}{M(KI)}}{V_{solution}} = \frac{m(KI)}{M(KI)\,V_{solution}}$$

D'où $$C_2 = 2{,}4.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

(b) Le tableau d'avancement en concentrations de la réaction (1) est le suivant

| | $I_2$ | + | $I^-$ | = | $I_3^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| E.I. | $[I_2]_0$ | | $[I^-]_0$ | | 0 |
| E.F. | $[I_2]_0 - x$ | | $[I^-]_0 - x$ | | $x$ |

La conservation de matière du diiode s'écrit

$$[I_2]_0 = [I_2] + \left[I_3^-\right]$$

Donc $$[I_2] = [I_2]_0 - \left[I_3^-\right] \qquad \text{avec } [I_2]_0 = 3{,}9.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

La conservation de matière de l'ion iodure s'écrit

$$[I^-]_0 = [I^-] + \left[I_3^-\right]$$

Donc $$[I^-] = C_2 - \left[I_3^-\right] \qquad \text{avec } C_2 = 2{,}4.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

(c) On reporte les expressions précédentes dans l'expression de la constante d'équilibre :

$$K_1^0 = \frac{\left[I_3^-\right] c^0}{[I_2]\,[I^-]} = \frac{\left[I_3^-\right] c^0}{\left([I_2]_0 - \left[I_3^-\right]\right)\left(C_2 - \left[I_3^-\right]\right)}$$

On obtient $$\left[I_3^-\right] = 3{,}9.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

A noter le fait que la solution mathématique $2{,}4.10^{-1}$ mol.L$^{-1}$ est à exclure car la concentration en $I_3^-$ ne peut dépasser la concentration en diiode initiale.

On en déduit $[I^-] = 0{,}20$ mol.L$^{-1}$ et $[I_2] = 2{,}6.10^{-4}$ mol.L$^{-1}$

(d) Pratiquement la totalité du diiode s'est transformé en $I_3^-$. Il ne reste que 1% de diiode. La concentration du diiode restant est bien inférieure à la solubilité du diiode dans l'eau pure. Le diiode est donc totalement solubilisé dans la solution A.

## Préparation d'une solution aqueuse de diiode

4. Réduction $$12H_3O^+{}_{(aq)} + 2IO_3^-{}_{(aq)} + 10e^- \rightleftharpoons I_{2(aq)} + 18H_2O_{(l)}$$

5. Oxydation $$2I^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons I_{2(aq)} + 2e^-$$

6. En combinant les deux demi-équations électroniques précédentes, il vient

$$12H_3O^+{}_{(aq)} + 2IO_3^-{}_{(aq)} + 10I^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons 6I_{2(aq)} + 18H_2O_{(l)}$$

Ou encore $$6H_3O^+{}_{(aq)} + IO_3^-{}_{(aq)} + 5I^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons 3I_{2(aq)} + 9H_2O_{(l)} \qquad (2)$$

7. La réaction ci-avant est totale. Par ailleurs, le diiode formé sera partiellement transformé en complexe $I_3^-$, de telle sorte que globalement, les ions $IO_3^-$ se transforment en fait en $I_2$ et en ions $I_3^-$, avec

$$n_T = n\left(I_2\right) + n\left(I_3^-\right) = 0{,}020 \text{ mol} \qquad \text{pour V} = 2{,}0 \text{ L de solution}$$

Or, la stoechiométrie de (2) impose $$n\left(IO_3^-\right)_0 = \frac{n_T}{3}$$

Il faut donc peser $$m\left(KIO_3\right) = n\left(IO_3^-\right)_0 \times M\left(KIO_3\right) = 1{,}4 \text{ g}$$

8. (a) La solubilité molaire du diiode, notée $[I_2]_{max}$, s'écrit

$$[I_2]_{max} = \frac{s}{M_{I_2}}$$

Soit $$[I_2]_{max} = 1{,}34.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

(b) On a, avec $[I_2] = [I_2]_{max}$ :

Conservation de la matière $\left[I_3^-\right] = C_T - [I_2] = 8{,}66.10^{-3}$ mol.L$^{-1}$

Équilibre $$K = \frac{\left[I_3^-\right] c^0}{[I_2]\,[I^-]}$$

Donc $$[I^-] = \frac{\left[I_3^-\right] c^0}{K\,[I_2]} = 8{,}62.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

(c) Les ions iodure ont deux utilités : former le diiode à partir des ions iodate (première réaction, totale) et complexer en $I_3^-$ une partie du diiode formé (équilibre d'avancement $\xi$).

On effectue un bilan de matière sur ces deux réactions (tableaux molaires parallèles) :

| | $6H_3O^+{}_{(aq)}$ + | $IO_3^-{}_{(aq)}$ + | $5I^-{}_{(aq)}$ = | $9H_2O_{(l)}$ + | $3I_{2(aq)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t=0$ | Excès | $n\left(IO_3^-\right)_0$ | $n\,(I^-)_0$ | Solvant | 0 |
| $t_{éq}$ | Excès | $\varepsilon$ | $n\,(I^-)_0 - 5n\left(IO_3^-\right)_0 - \xi$ | Solvant | $3n\left(IO_3^-\right)_0 - \xi$ |

| | $I_{2(aq)}$ + | $I^-{}_{(aq)}$ = | $I_3^-{}_{(aq)}$ | $K_1^0 = 750$ |
|---|---|---|---|---|
| $t_{éq}$ | $3n\left(IO_3^-\right)_0 - \xi$ | $n\,(I^-)_0 - 5n\left(IO_3^-\right)_0 - \xi$ | $\xi$ | |

On a donc $$n\,(I^-) = n\,(I^-)_0 - 5n\left(IO_3^-\right)_0 - n\left(I_3^-\right)$$

D'où $$n\,(I^-)_0 = [I^-]\,V + 5n\left(IO_3^-\right)_0 + \left[I_3^-\right] V$$

avec $[I^-] = 8{,}62.10^{-3}$ mol.L$^{-1}$ (concentration calculée en 8.b).

On doit ajouter au minimum la masse $m$ d'iodure de potassium :

$$m = M\,(KI) \times \left([I^-]\,V + 5n\left(IO_3^-\right)_0 + \left[I_3^-\right] V\right) = 11{,}3 \text{ g}$$

Si on ajoute plus d'ions iodure, le diiode réagira d'autant plus (cf. équilibre (1)). On aura alors $[I_2] < [I_2]_{max}$.

## Dosage d'une solution aqueuse de thiosulfate de sodium par la solution C

9. Réduction $$I_{2(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons 2I^-{}_{(aq)}$$

Oxydation $$2S_2O_3^{2-}{}_{(aq)} \rightleftharpoons S_4O_62^-{}_{(aq)} + 2e^-$$

Équation-bilan $$2S_2O_3^{2-} + I_{2(aq)} \rightleftharpoons 2I^-{}_{(aq)} + S_4O_6^{2-} \qquad (3)$$

10. (a) La fin du dosage est repérée par la persistance de la couleur du diiode (libre et complexé). En effet, le diiode est ici l'espèce titrante et non l'espèce titrée !

(b) À l'équivalence $$\left[S_2O_3^{2-}\right] = \frac{2\,[I_2]\,V_e}{V_D} = 3{,}70.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Ici, la concentration $[I_2]$ est égale à $C_T$. En effet, lorsque la solution C est mise en contact avec la solution D, la réaction (3) a lieu, consommant ainsi intégralement le diiode (il reste à l'état de trace). Cependant, dans l'erlenmeyer, il y a alors des ions $I^-$ (produits de la réaction (3) et provenant de la solution C) et des ions $I_3^-$ (provenant de la solution C). L'équilibre (1) va alors être déplacé vers la gauche, formant ainsi du diiode. Au final, pour la relation à l'équivalence, $[I_2] = C_T$.

D'où finalement $$\left[S_2O_3^{2-}\right] = \frac{2C_TV_e}{V_D} = 3{,}70.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$