

Centre d'intérêt 1

# Dynamique et énergétique

## Géométrie des masses

PSI - MP : Lycée Rabelais



### Pré-requis

- Géométrie vectorielle
- Notions de centre d'inertie, de masses et de matrice d'inertie

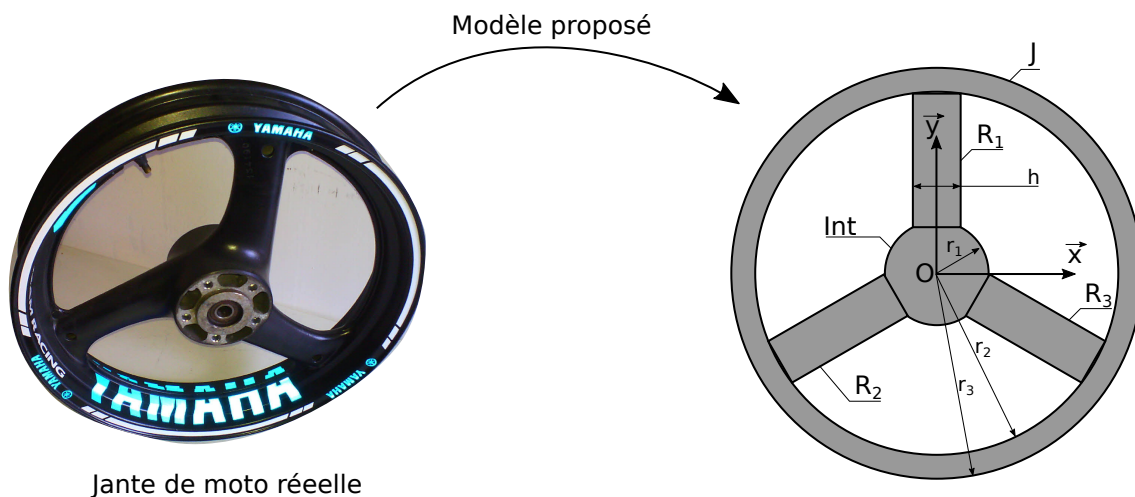


### Objectifs

- Savoir calculer une masse
- Savoir localiser un centre d'inertie
- Savoir simplifier et manipuler une matrice d'inertie

## 1 Jante de roue de moto ★

Une jante de moto est étudiée. On cherche à déterminer ses caractéristiques inertielles dans le but de réaliser une étude dynamique. Un modèle est proposé sur le schéma ci-dessous.



Les hypothèses ci-dessous sont réalisées :

- Cette jante, notée  $J_c$ , est composée :
  - D'un cylindre intérieur, noté  $Int$  ;
  - De trois bâtons parallélépipédiques, notés  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  ;
  - D'un cylindre creux à l'extérieur, noté  $J$ .
- La jante possède une masse volumique homogène  $\rho$ . Sa masse totale est notée  $m$ .
- On considère qu'il y a une symétrie matérielle de plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . La profondeur de la jante (notée  $p$ ) est supposée constante.

Des annexes sont fournies en fin de sujet et pourront être utilisées.

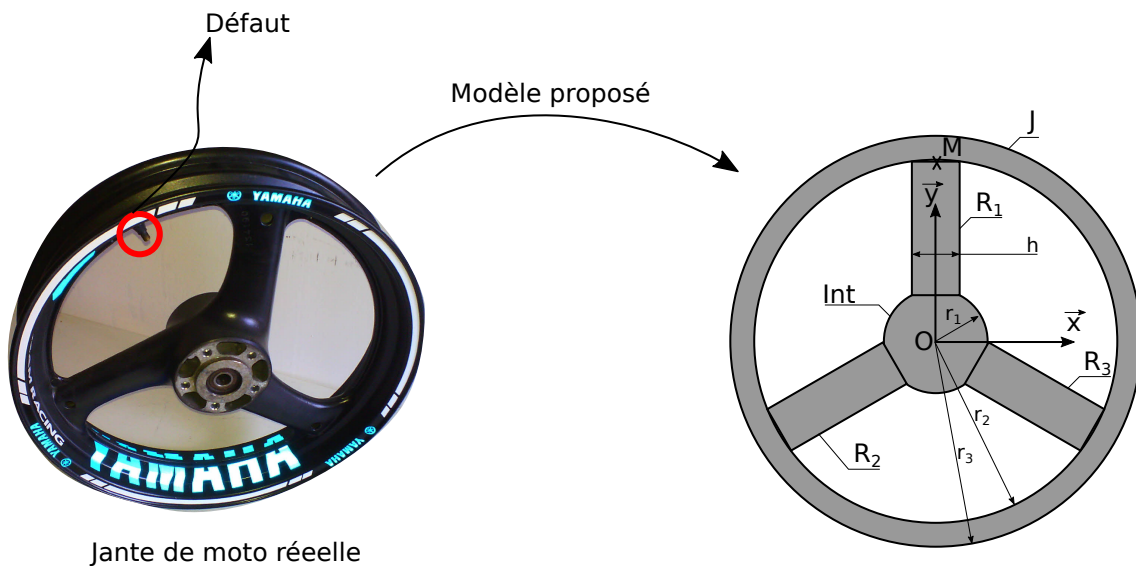
Q1 : Quelle est la position du centre de gravité de la jante complète ? Donner ensuite la forme de la matrice d'inertie en ce point.

Q2 : Déterminer la masse de la jante complète en fonction de  $\rho$  et des paramètres géométriques.

Q3 : Expliquer la méthode pour calculer la matrice d'inertie de la jante complète.

Q4 : Calculer le moment d'inertie de la jante complète autour de l'axe  $(O, \vec{z})$ . On s'aidera des annexes fournies.

Q5 : On introduit maintenant un défaut, voir figure ci-dessous. On considèrera le défaut comme une masse ponctuelle de masse  $m$ . Donner la nouvelle position du centre de gravité puis la forme de la matrice d'inertie dans ce cas-là et l'exprimer en fonction de la matrice sans défaut.



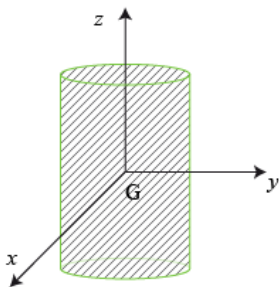
Q6 : On fait un test, dit d'équilibrage, sur la roue en la faisant tourner autour de son axe à vitesse constante. Quel défaut pourrait apparaître ?

\_\_\_\_\_

ANNEXES

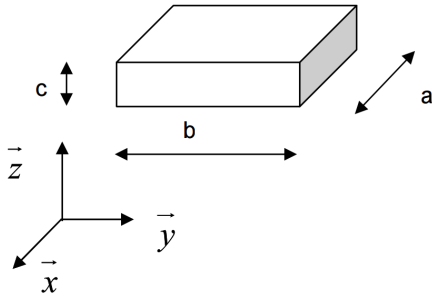
\_\_\_\_\_

Pour les deux résultats fournis,  $G$  est le centre d'inertie de la pièce concernée.



Pour un cylindre de rayon  $R$ , de hauteur  $H$  et de masse  $m$ , on a :

$$I_G(\text{Cylindre}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}m(R^2 + \frac{h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m(R^2 + \frac{h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



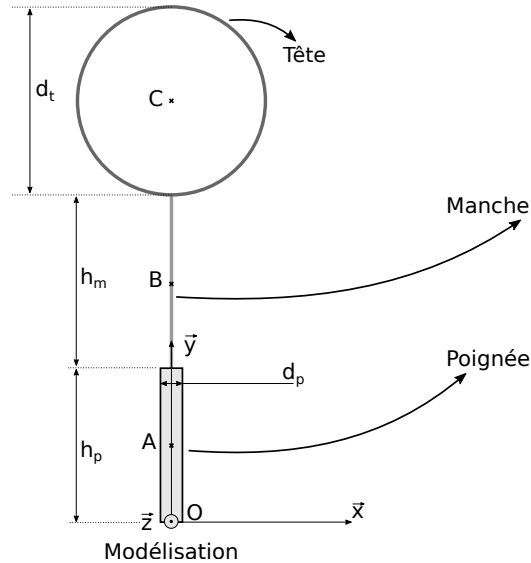
Pour un parallélépipède de longueur  $a$ , de largeur  $b$ , de hauteur  $c$  et de masse  $m$ , on a :

$$I_G(\text{Pavé}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

## 2 Estimation du "swingweight" d'une raquette de badminton ★



Raquette réelle



Modélisation

En badminton, la technicité de la raquette se doit d'être adaptée au type de jeu du joueur. Outre le poids de la raquette, la position de son centre d'inertie ainsi que son moment d'inertie autour de l'axe de rotation du poignet du joueur (appelé "swingweight" en anglais) sont des paramètres indispensables à connaître.

Le poids de la raquette est toujours bien renseigné par les constructeur mais la position du centre d'inertie et son moment d'inertie sont souvent inconnus. On se propose ici d'estimer ces deux paramètres sur une géométrie de raquette donnée. La raquette est composée : d'une poignée, d'un manche et d'une tête. On donne les dimensions et masses suivantes :

- Poignée (notée  $p$ ), modélisée par un cylindre de masse  $m_p = 40$  g, de hauteur  $h_p = 20$  cm et de rayon  $r_p = 0.9$  cm. Son centre d'inertie est  $A$  et sa matrice d'inertie est :

$$I[A, p] = \frac{m_p}{12} \begin{bmatrix} 3r_p^2 + h_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6r_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r_p^2 + h_p^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Manche (noté  $m$ ), modélisé par une tige de masse  $m_m = 13$  g et de hauteur  $h_m = 19$  cm. Son centre d'inertie est  $B$  et sa matrice d'inertie est :

$$I[B, m] = \frac{m_m}{12} \begin{bmatrix} h_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_m^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Tête (notée  $t$ ), modélisée par un anneau circulaire de masse  $m_t = 22$  g et de rayon  $r_t = 14.5$  cm. Son centre d'inertie est  $C$  et sa matrice d'inertie est :

$$I[C, t] = \frac{m_t}{12} \begin{bmatrix} \frac{r_t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & r_t^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

**Question 1.** Donner la position du centre de gravité de l'ensemble de la raquette. Expliquer qualitativement l'influence de ce paramètre sur le comportement de la raquette.

**Question 2.** Estimer maintenant le "swingweight" de la raquette. Quel élément de la raquette est le plus important

pour limiter le "swingweight" de la raquette ? L'ordre de grandeur du "swingweight" d'une raquette de tennis est  $0.05 \text{ kg.m}^2$ . Comparer ces valeurs et commenter.

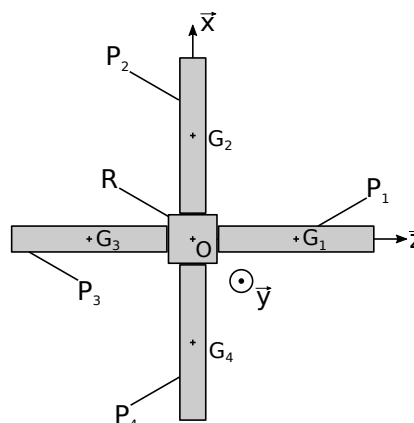
### 3 Inertie d'un boomerang ★

Les aborigènes fabriquent et lancent des boomerangs depuis des millénaires. Mais les principes physiques sur lesquels repose son fascinant retour leur sont longtemps restés inconnus. Et pour cause, les premières explications datent de 1837, et il a fallu attendre 1968 pour qu'une théorie plus étoffée soit véritablement mise au point.

On se limite dans ce problème à l'étude des paramètres inertiels du boomerang.

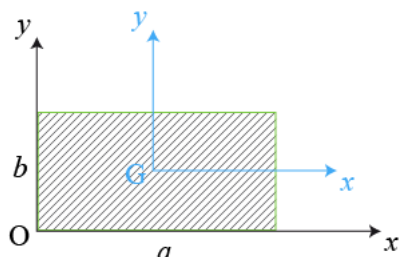
On propose la modélisation définie ci-dessous qui fixe la géométrie. La partie centrale du boomerang, notée  $R$  est assimilée à une plaque carrée d'épaisseur  $e = 8 \text{ mm}$  et de largeur  $l_R = 50 \text{ mm}$ . Les pâles, notées  $P_i$ , sont modélisées par des plaques rectangulaires d'épaisseur  $e$ , de longueur  $l_p = 160 \text{ mm}$  et de largeur  $h_p = 40 \text{ mm}$ .

Le boomerang est en plastique de masse volumique  $\rho$  dont la valeur est inconnue. Le constructeur annonce une masse de 65 grammes.



**Question 1.** Déterminer la masse du boomerang en fonction des paramètres donnés. En utilisant la masse annoncée par le constructeur, donner la valeur de la masse volumique du plastique utilisé. Expliquer pourquoi ce boomerang est adapté à une utilisation sur la plage.

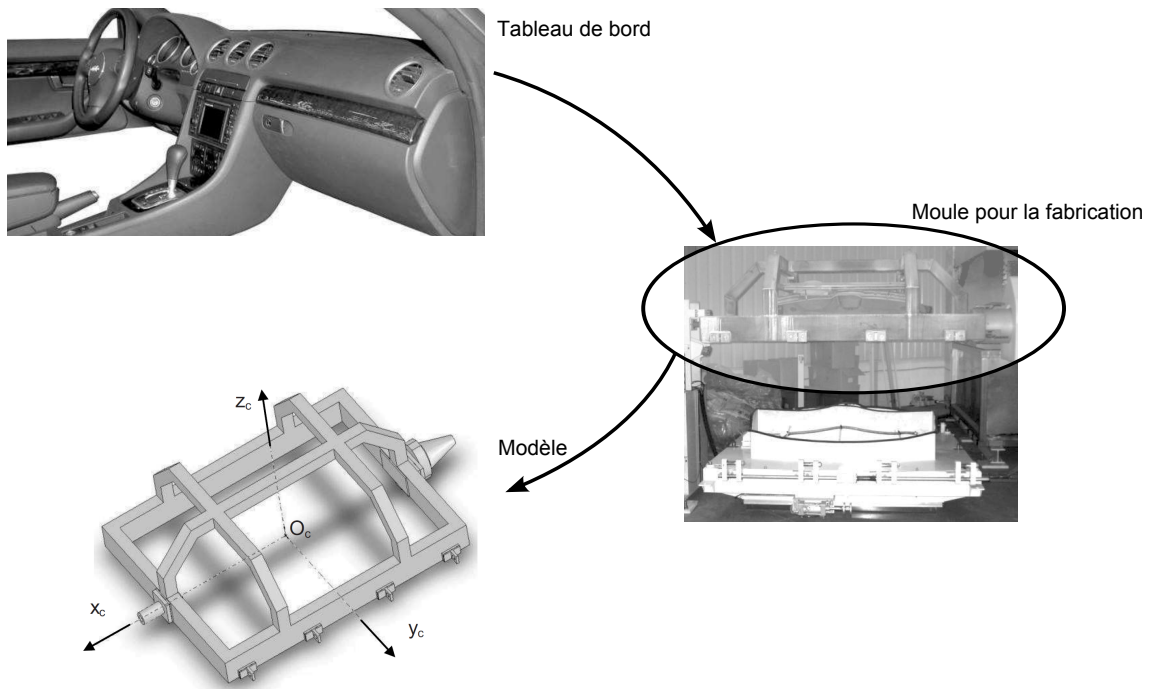
**Question 2.** En vous aidant du formulaire ci-dessous, déterminer la matrice d'inertie du boomerang. Faire les applications numériques.



$$I[G, \text{plaque}] = m_{\text{plaque}} \begin{bmatrix} \frac{b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

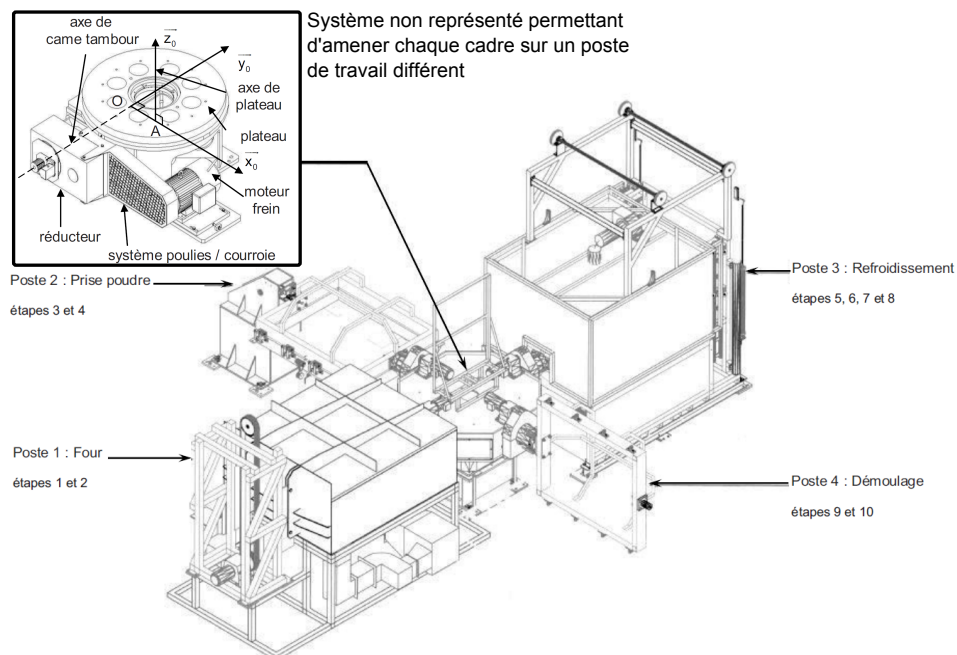
## 4 Moulage d'un tableau de bord ★★

Un tableau de bord automobile se compose d'une coque rigide revêtue d'une peau, entre lesquelles se trouve la mousse qui en adoucit et en assouplit le contact.



Les peaux de tableau de bord sont fabriquées par dépôt d'une poudre de synthèse de polychlorure de vinyle ou polyuréthane sur une empreinte chaude appelée moule.

Le moule donne à la peau sa forme. Le moule fixé sur un bras est généralement double et permet ainsi de fabriquer 2 peaux (identiques ou non) au cours du même processus. Différentes étapes de fabrication sont nécessaires, chacune de ces étapes se déroule sur un poste différent (voir figure ci-dessous). On s'intéresse ici à la manutention du moule. Pour ce faire, une étude dynamique est nécessaire. Cette étude nécessite au préalable une bonne description des caractéristiques inertielles du système.

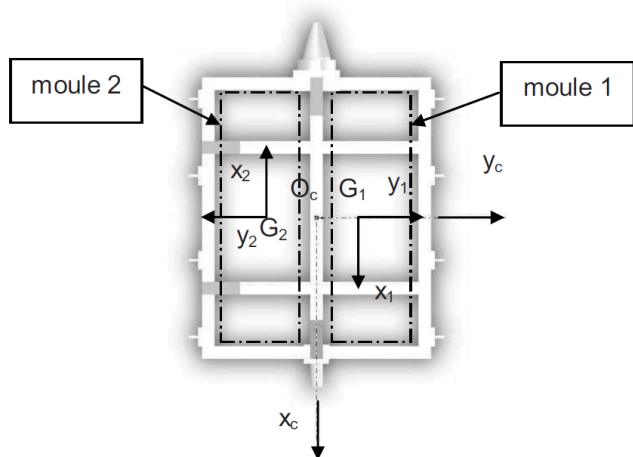


La matrice d'inertie du cadre au point  $O_c$ , milieu du cadre se trouvant sur l'axe de rotation  $(O_c, \vec{x}_c)$  de celui-ci avec le plateau, dans la base  $b_c = (\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$  est la suivante :

$$I(O_c, \text{cadre}) = \begin{bmatrix} A_c & -F_c & -E_c \\ -F_c & B_c & -D_c \\ -E_c & -D_c & C_c \end{bmatrix}_{b_c}$$

**Question 1.** Indiquer les termes nuls de cette matrice. Justifier.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement 1 et 2 montés en opposition (voir bases associées). Les matrices d'inertie des moules 1 et 2 au point  $O_c$ , dans leurs bases respectives  $b_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , sont identiques :



$$I(O_c, \text{moule}_1) = \begin{bmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{bmatrix}_{b_1}$$

$$I(O_c, \text{moule}_2) = \begin{bmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{bmatrix}_{b_2}$$

**Question 2.** Déterminer littéralement, dans la base  $b_c$ , la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point  $O_c$  en fonction des termes des matrices précédentes :

$$I(O_c, \text{cadre} + \text{moules}) = \begin{bmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{bmatrix}_{b_c}$$

**Question 3.** Faire l'application numérique avec :

$$\begin{array}{llll} A_c = 159,22 \text{ kg.m}^2 & B_c = 426,02 \text{ kg.m}^2 & C_c = 531,77 \text{ kg.m}^2 & E_c = 0,06 \text{ kg.m}^2 \\ A_m = 14,38 \text{ kg.m}^2 & B_m = 15,43 \text{ kg.m}^2 & C_m = 21,44 \text{ kg.m}^2 & \\ D_m = 5,32 \text{ kg.m}^2 & E_m = 0,36 \text{ kg.m}^2 & F_m = -0,04 \text{ kg.m}^2 & \end{array}$$

On donne :

- la masse  $m_{cm}$  d'un cadre équipé de ses deux moules,
- le moment d'inertie  $C_{cm}$  d'un cadre équipé de ses deux moules autour de l'axe  $(O_c, \vec{z}_c)$ ,
- le centre de gravité d'un cadre équipé de deux moules est sur l'axe  $(O_c, \vec{z}_c)$  et est situé à une distance  $d$  par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$  du plateau indexeur  $(\vec{z}_0 = \vec{z}_c)$ ,
- le moment d'inertie  $C_p$  du plateau indexeur par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$ ,
- l'inertie des peaux fabriquées est négligée.

**Question 4.** Déterminer littéralement le moment d'inertie  $C$  de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses quatre cadres et des huit moules par rapport à l'axe de rotation  $(A, \vec{z}_0)$  en fonction des termes précédents.

**Question 5.** Faire l'application numérique avec :

$$C_{cm} = 575 \text{ kg.m}^2 ; \quad m_{cm} = 500 \text{ kg} ; \quad d = 2,95 \text{ m} ; \quad C_p = 1500 \text{ kg.m}^2$$