Centre d'intérêt 0

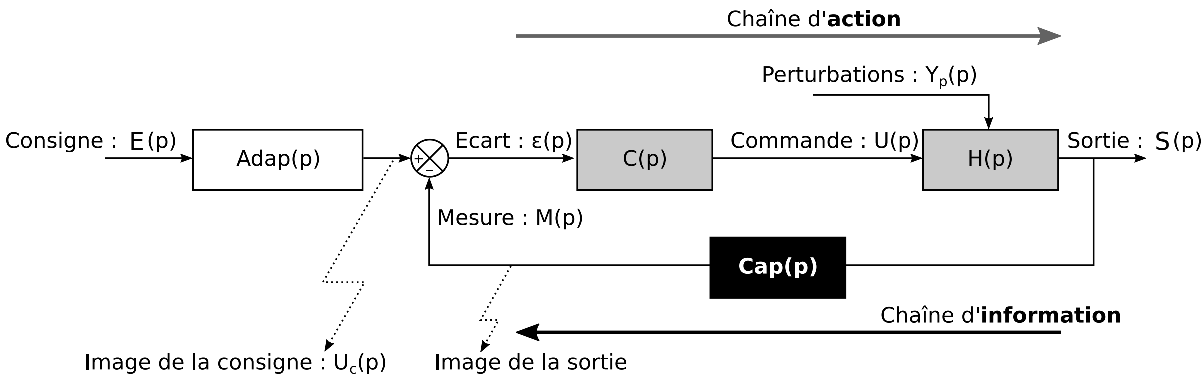
Modélisation des systèmes asservis

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Rappel du fonctionnement d'un système asservi

Un système est dit asservi lorsque la commande du processus est élaborée à partir de la différence entre l'image de la consigne et celle de la sortie. Les principaux éléments que l'on retrouve sur un système asservi sont les suivants :

- Un processus que l'on cherche à commandé. Ce processus est essentiellement constitué d'actionneurs (vérins, moteurs, servovannes, etc...). Ce processus peut être soumis à des perturbations.
- Un adaptateur qui permet de prendre en compte la consigne imposée par l'utilisateur. Le choix de cet adaptateur joue un rôle essentiel, nous le verrons dans la suite.
- Un capteur qui permet de mesurer la grandeur de sortie. On appellera m cette mesure qui est une image de la sortie.
- Un sommateur (ou comparateur) qui permet de calculer la différence entre l'image de la consigne et la mesure. Cette différence sera appelée écart et on la notera ε.
- Un correcteur qui permet d'élaborer un signal de commande à partir de l'écart ε.



Pourquoi faire les calculs dans le domaine symbolique de Laplace ? La plupart des phénomènes observés peuvent se modéliser par des équations différentielles dont la variable est le temps t. On pourra par exemple lier une sortie $s(t)$ à une entrée $e(t)$ par une équation différentielle de la forme :

$$a_0.e(t) + a_1.\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) + a_2.\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}(t) + ... = b_0.s(t) + b_1.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) + b_2.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) + ...$$

Notons $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathscr{L}[s(t)]$ les transformées de Laplace de e et s. Une propriété de la transformée de Laplace est que :

$$\mathscr{L}[\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t)] = p.E(p) - e(0^+) \quad \text{et donc } \textbf{si la condition initiale est nulle} \quad \mathscr{L}[\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t)](p) = p.E(p)$$

Lorsque toutes les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), on peut alors écrire :

$$a_0.E(p) + a_1.p.E(p) + a_2.p^2.E(p) + ... = b_0.S(p) + b_1.p.S(p) + b_2.p^2.S(p) + ...$$

Et donc :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1.p + a_2.p^2 + ...}{b_0 + b_1.p + b_2.p^2 + ...}$$

Il ne reste qu'à étudier une fraction de polynômes ce qui est plus aisé que l'étude de l'équation différentielle.

1.1 Choix du bloc d'adaptation

Pour qu'un système asservi fonctionne correctement, il faut que l'écart $\varepsilon(p)$ soit une bonne image (proportionnelle) de la différence entre l'entrée et la sortie. Il faut donc que l'écart puisse s'écrire :

$$\varepsilon(p) = k \cdot (E(p) - S(p)) \text{ avec } k \text{ une constante}$$

À retenir

Si le bloc d'adaptation et le bloc de mesure sont des constantes, on a donc : $Cap(p) = K_{cap}$ et $Adap(p) = K_{adap}$. On a :

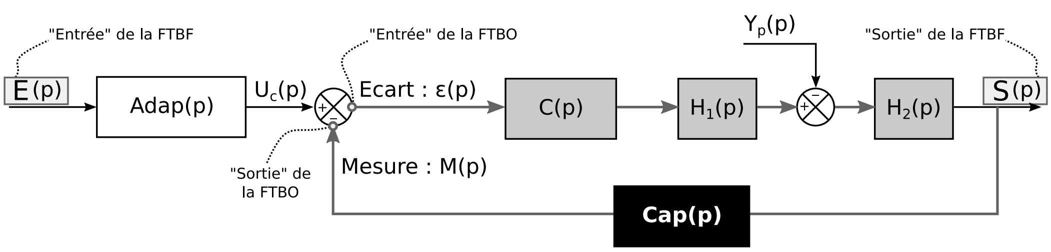
$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= U_c(p) - M(p)\\ &= K_{adap}.E(p) - K_{cap}.S(p)\\ &= \left(K_{adap} - K_{cap}\right).E(p) \;\text{ si }\; E(p) = S(p)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = 0 \;\text{ si }\; E(p) = S(p) \Longleftrightarrow K_{adap} = K_{cap}$$

Ce résultat n'est pas à apprendre par cœur, mais il faut être capable de le retrouver, par la même méthode, en fonction de la forme du schéma-blocs proposé.

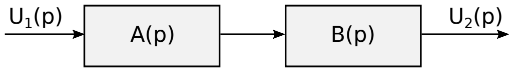
1.2 Notion de fonctions de transfert :



À retenir : Théorème de superposition

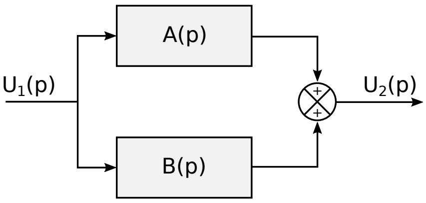
1.3 Modifications d'un schéma-bloc

Blocs en série :



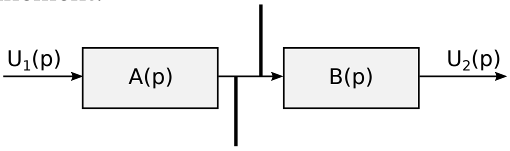
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)} = A(p).B(p)$

Blocs en parallèle :

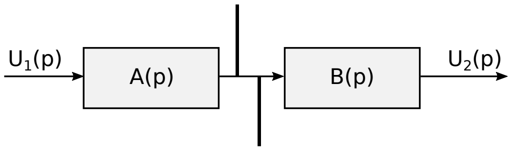


$\Leftrightarrow$ $\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)} = A(p) + B(p)$

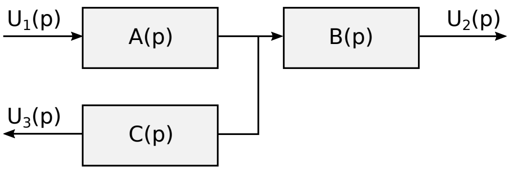
Déplacement d'une jonction (cas simple) : il est possible d'intervertir deux fils du schéma bloc sans modification du fonctionnement.



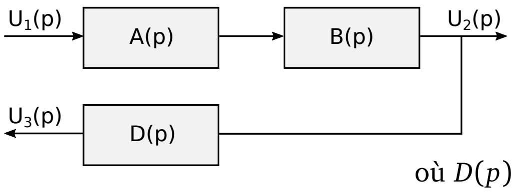
$\Leftrightarrow$



Déplacement d'une jonction (cas plus complexe) : il est possible de permuter un fil et un bloc. Dans ce cas, il faut modifier le bloc lié à la jonction déplacée. Cette modification doit vérifier la forme initiale, c'est-à-dire qu'ici, on doit toujours conserver : $U_3(p) = A(p).C(p)$.

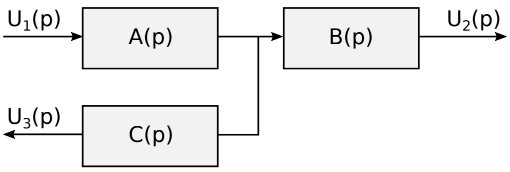


$\Leftrightarrow$

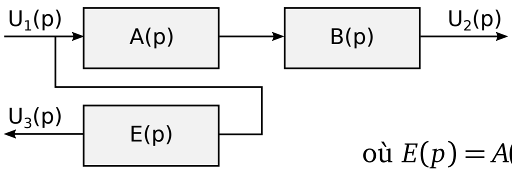


où $D(p) = \dfrac{C(p)}{B(p)}$

Justification :

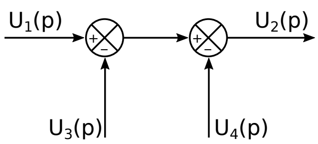


$\Leftrightarrow$

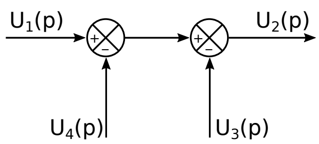


où $E(p) = A(p).C(p)$

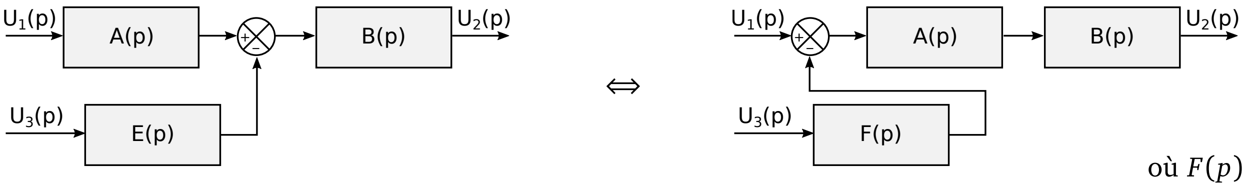
Déplacement d'un sommateur (cas simple) : on peut permuter deux sommateurs.



$\Leftrightarrow$

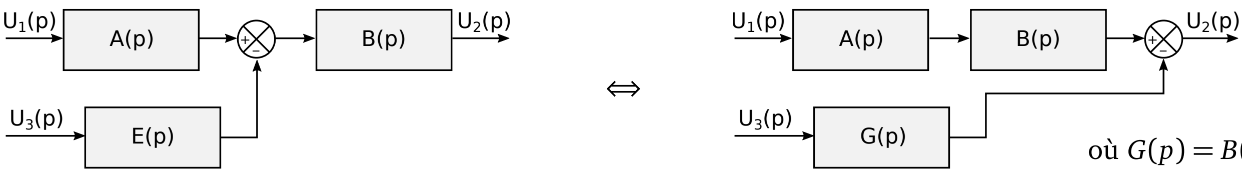


Déplacement d'un sommateur (cas plus complexe) : il est possible de permuter un sommateur et un bloc. Dans ce cas, il faut modifier le bloc lié au sommateur déplacé. Cette modification doit vérifier la forme initiale, c'est-à-dire qu'ici, on doit toujours conserver : $U_2(p) = A(p).B(p).U_1(p) - E(p).B(p).U_3(p)$.



où $F(p) = \dfrac{E(p)}{A(p)}$

Justification :



où $G(p) = B(p).E(p)$

1.4 Gain, ordre et classe d'une fonction de transfert

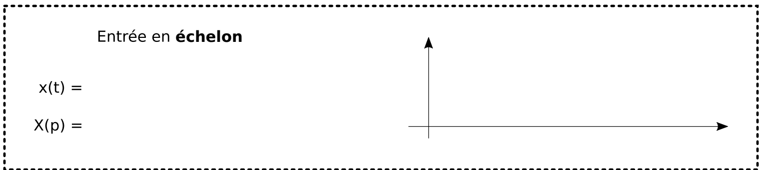
Il sera commode d'écrire les fonctions de transfert sous forme canonique, c'est-à-dire de la manière suivante :

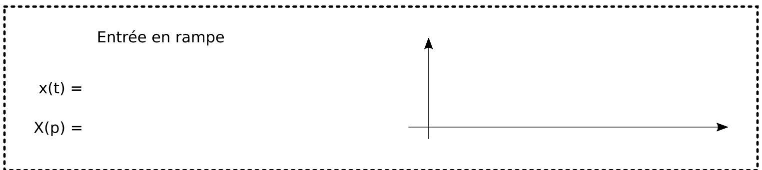
$$H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_1 p + c_2 p^2 ... + c_q p^q}{1 + d_1 p + d_2 p^2 ... + d_r p^r}$$

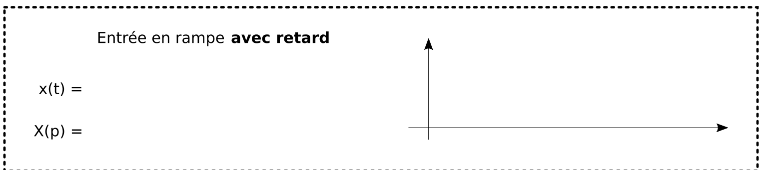
- K sera appelé gain statique de la fonction de transfert ;
- α est la classe de la fonction de transfert ;
- et $\alpha + r$ est l'ordre de la fonction de transfert.

1.5 Entrées types d'un système asservi

Les entrées types sont des entrées théoriques qui représentent des situations classiques de fonctionnement du système étudié. Dans la plupart des études que l'on traitera, on se limitera à ces entrées types. À partir de l'étude de la réponse d'un système pour ces entrées types, il va être possible de faire des prévisions concernant son comportement réel (et donc pour des entrées plus variées).







1.6 Théorèmes des valeurs initiale et finale

Le théorème de la valeur initiale permet de calculer la valeur initiale d'une fonction temporelle si elle existe. On a dans ce cas :

$$\lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to +\infty} p.S(p)$$

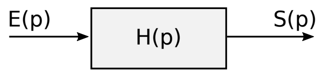
Le théorème de la valeur finale permet de calculer la valeur finale d'une fonction temporelle si elle existe. On a dans ce cas :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} p.S(p)$$

2 Réponse temporelle à un échelon pour un système d'ordre 1

On considère une fonction de transfert H du premier ordre de la forme ci-dessous dont l'entrée est $\mathscr{L}[e(t)] = E(p)$ et la sortie $\mathscr{L}[s(t)] = S(p)$.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$



On appelle toujours K, le gain statique de la fonction de transfert. On nomme également τ la constante de temps de cette fonction de transfert. On souhaite connaître l'évolution de la sortie s en fonction du temps pour une entrée e en échelon d'amplitude e_0. On a donc $e(t) = e_0.u(t)$ (u est la fonction échelon unitaire) ce qui donne, dans le domaine de Laplace : $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} S(p) &= H(p).E(p) \\ &= \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

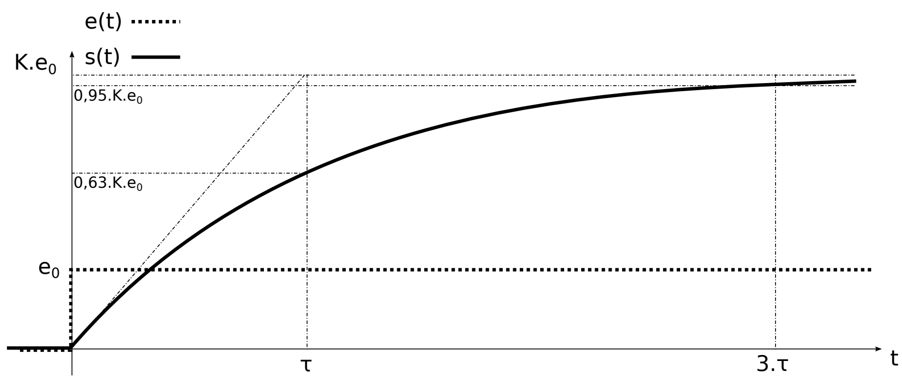
À partir des théorèmes de la valeur initiale et finale, on a directement :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} p.S(p) = K.e_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{p \to +\infty} p.(p.S(p)) = \frac{K.e_0}{\tau}$$

On admet que la réponse dans le domaine temporel est :

$$s(t) = K.e_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)$$

On obtient donc la réponse suivante pour une entrée en échelon d'amplitude e_0 :



Pour calculer le temps de réponse à 5%, on cherche $t_{r5\%}$ tel que :

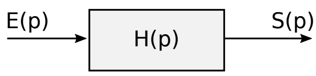
$$\begin{aligned} s(t_{r5\%}) = \frac{95}{100} \lim_{t\to+\infty} s(t) \quad &\Leftrightarrow \quad K.e_0.\left(1 - e^{-\frac{t_{r5\%}}{\tau}}\right) = \frac{95}{100} K.e_0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t_{r5\%}}{\tau}} = \frac{5}{100} \\ &\Leftrightarrow \quad t_{r5\%} = -\ln(\frac{5}{100}).\tau \\ &\Leftrightarrow \quad t_{r5\%} \approx 3.\tau \end{aligned}$$

À retenir concernant la réponse à un échelon pour une fonction de transfert d'ordre 1 :

3 Réponse temporelle à un échelon pour un système d'ordre 2

On considère une fonction de transfert H du deuxième ordre de la forme ci-dessous dont l'entrée est $\mathscr{L}[e(t)] = E(p)$ et la sortie $\mathscr{L}[s(t)] = S(p)$.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$



On appelle toujours K, le gain statique de la fonction de transfert. On nomme également ξ le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation propre de la fonction de transfert. On souhaite connaître l'évolution de la sortie s en fonction du temps pour une entrée e en échelon d'amplitude e_0. Dans le domaine de Laplace, on a donc : $E(p) = \frac{e_0}{p}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} S(p) &= H(p).E(p) \\ &= \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \cdot \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

À partir des théorèmes de la valeur initiale et finale, on a directement :

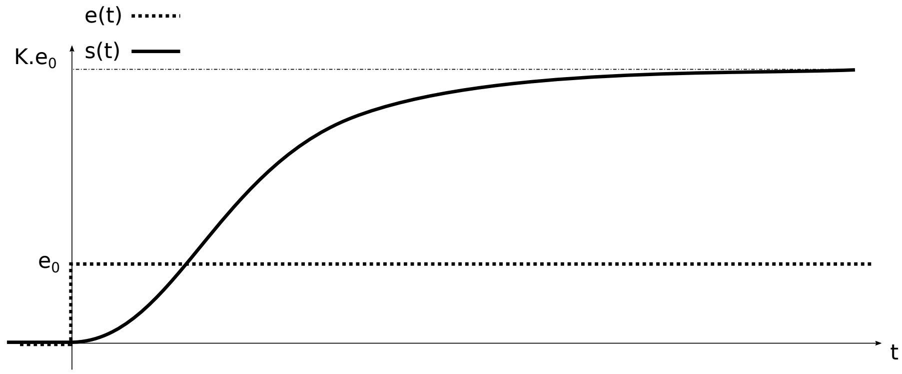
$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0^+} p.S(p) = K.e_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{p\to+\infty} p.(p.S(p)) = 0$$

L'allure de la réponse dans le domaine temporel dépend ensuite du coefficient d'amortissement (les prochains résultats sont admis).

3.1 Cas où $\xi > 1$: fonction de transfert sur-amortie

La sortie s'écrit alors :

$$s(t) = K.e_0.\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right].u(t)$$

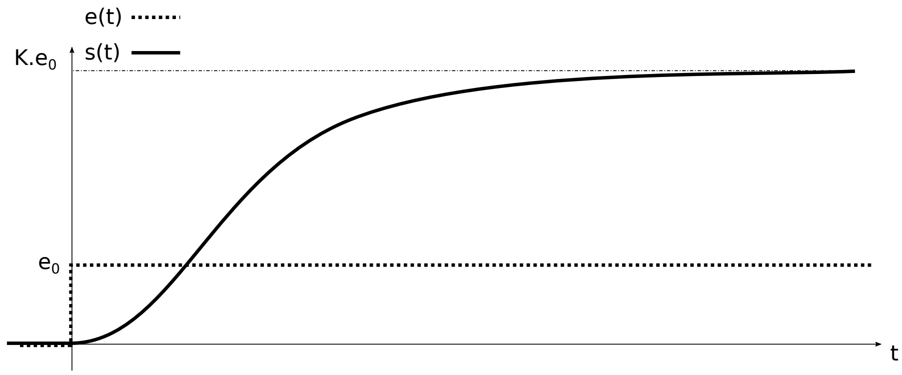


Compte-tenu de la solution de $s(t)$ dans le domaine temporel, une telle réponse ne présentera **aucun dépassement**.

3.2 Cas où $\xi = 1$: cas critique

On a alors dans le domaine temporel :

$$s(t) = K.e_0.\left[1-(1+\tau).e^{-\frac{t}{\tau}}\right].u(t)$$

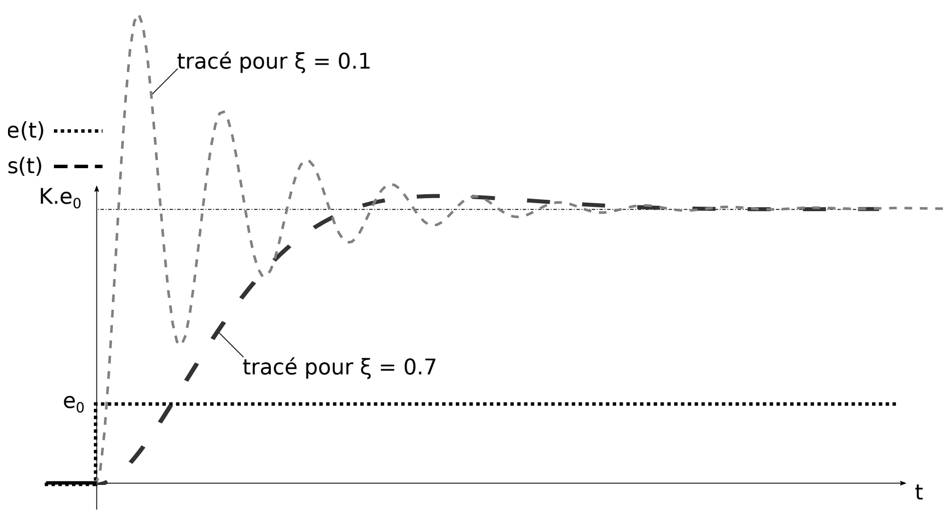


Cette réponse critique ne présentera **aucun dépassement**. Pour une valeur de ω_0 donnée, cet amortissement critique ($\xi = 1$) permettra d'obtenir le **système le plus rapide sans dépassement**.

3.3 Cas où $\xi < 1$: fonction de transfert sous-amortie

Cette fois-ci :

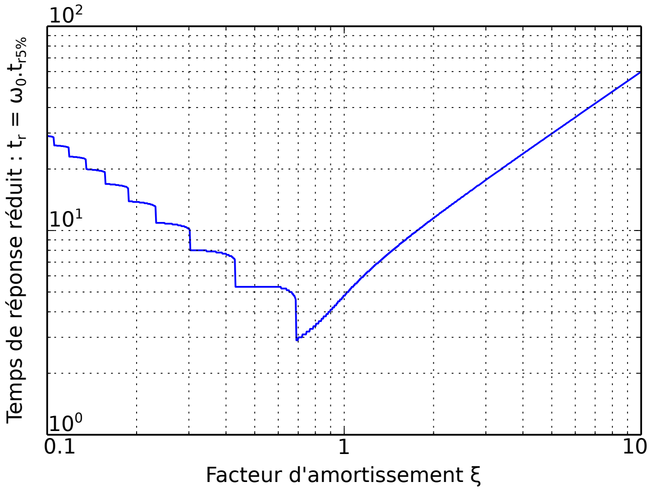
$$s(t) = K.e_0.\left[1-\left(\cos\left[\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right]+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left[\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cdot t\right]\right).e^{-\frac{t}{\tau}}\right].u(t)$$



Lorsque le système est sous-amorti, celui-ci présentera des oscillations amorties pseudo-périodiques.

3.4 Utilisation des abaques

Il n'existe pas d'expression simple pour déterminer le temps de réponse à 5% d'un système d'ordre 2. Une solution est alors d'utiliser un abaque pré-établi (voir figure ci-dessous). Cette abaque représente le temps réduit en fonction du coefficient d'amortissement ξ. On appelle temps réduit, le produit du temps de réponse à 5% et de la pulsation propre ω_0, c'est-à-dire : $t_{red} = t_{r5\%}.\omega_0$.



On remarquera que **le système est le plus rapide lorsque** $\xi = 0.7$, dans ce cas il y aura alors des dépassements. Dans ce cas, on pourra se souvenir que le temps réduit vaut $t_{red} = 3$.

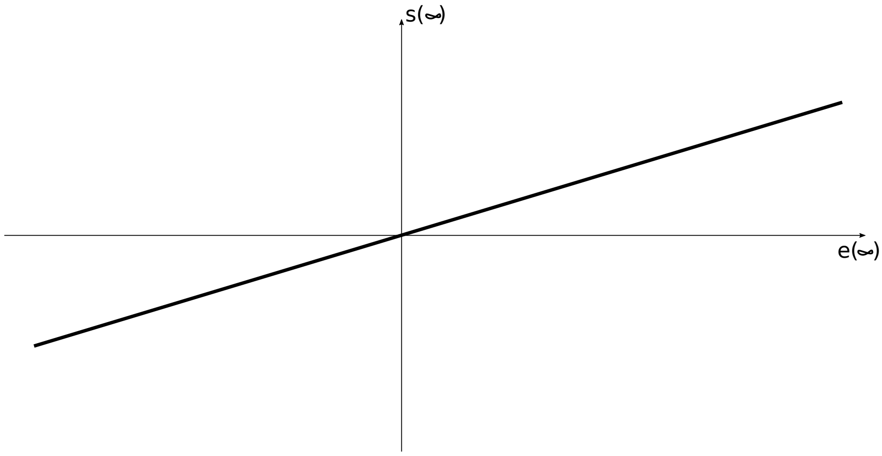
On pourra également trouver d'autres abaques concernant notamment l'influence du facteur d'amortissement sur les dépassements ou la pseudo-période.

À retenir concernant la réponse à un échelon pour une fonction de transfert d'ordre 2 :

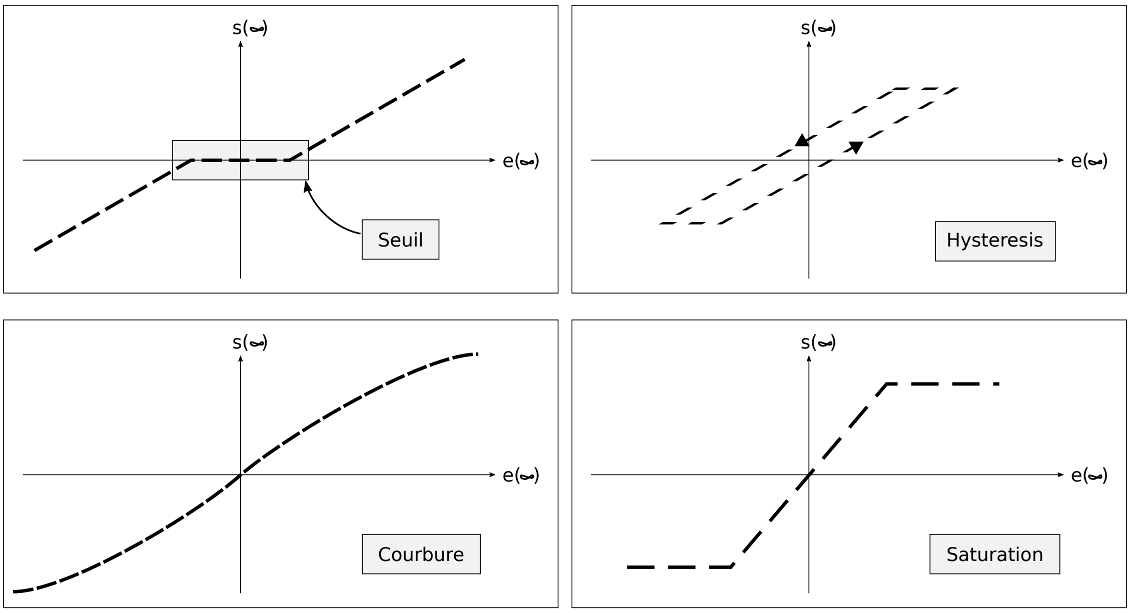
4 Notion de non-linéarité

Dans le cours de prépa, nous nous limiterons à l'étude des systèmes linéaires. Cela signifie donc que chacun des sous-systèmes est supposé pouvoir se modéliser par une équation différentielle linéaire. Cela signifie également qu'en régime permanent la sortie du bloc est proportionnelle à son entrée.

Pour un système linéaire, le tracé de $s(\infty) = f(e(\infty))$, que l'on appelle courbe caractéristique du système, mène donc à l'obtention d'une droite. On dira alors que le lieu des points de fonctionnement est une droite.



En réalité, les systèmes ne sont pas toujours des systèmes linéaires. Quelques types de non-linéarités sont représentées sur la figure ci-dessous. Dans ces cas-là, l'ensemble des points de fonctionnement ne se situent pas sur une droite (voir exercices).



Afin de mener à terme l'étude choisie, il faudra alors linéariser la modélisation autour d'un point de fonctionnement. Cela reviendra donc graphiquement à approximer sur un domaine donné, la courbe de fonctionnement à une droite.

5 Performance des systèmes asservis

Un système asservi est mis en place afin de vérifier un cahier des charges. Ce cahier des charges sera essentiellement défini par les trois critères suivants : **précision**, **rapidité** et **stabilité**.

La vérification des performances permet de définir le comportement du système asservi compte-tenu de l'entrée type choisie.

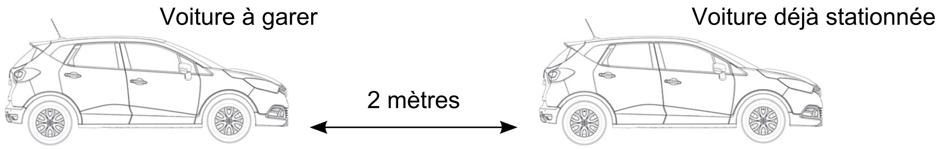
L'étude de la **précision** permet de déterminer si la grandeur de sortie est bien égale à la grandeur d'entrée. Cette étude se fera essentiellement en régime permanent.

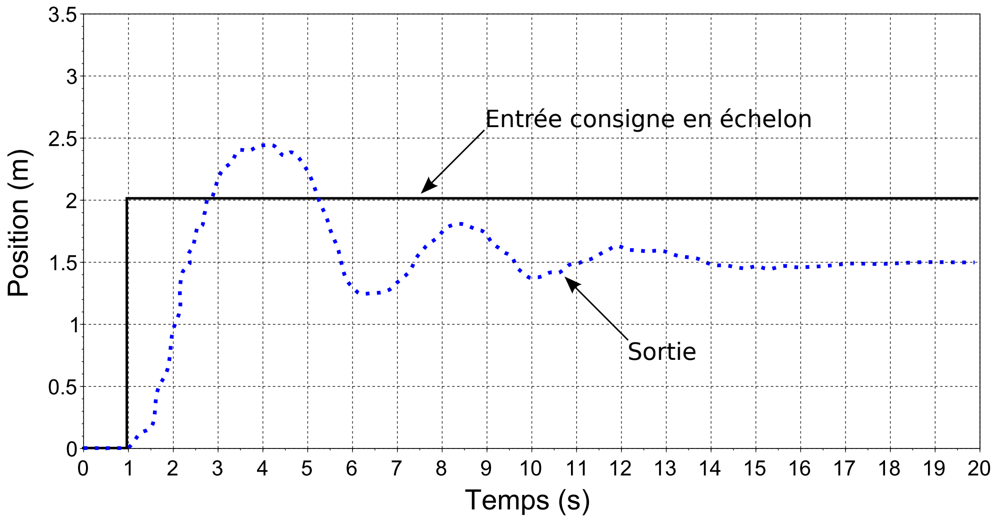
La **rapidité** permet de déterminer un temps caractéristique du système, ce temps pourra alors être comparé aux besoins de l'utilisateur.

La **stabilité** permet de vérifier notamment que le système ne présente pas d'oscillations parasites.

Exemple.

On suppose ici un asservissement en position permettant de garer une voiture. L'entrée, notée e, est donc le déplacement souhaitée de la voiture (ici 2 mètres) et la sortie, notée s, est le déplacement mesuré de la voiture.





Indiquer si le système asservi est stable.

Déterminer le temps de réponse à 5%, l'erreur statique (puis l'erreur statique relative) et enfin la valeur du premier dépassement (ainsi que la valeur du premier dépassement relatif).