SPE MP

Formes canoniques des équations différentielles d'ordre 2 en physique :

Il existe plusieurs formes canoniques de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants en physique . On considère y (t) une fonction du temps :

Forme canonique	Grandeurs caractéristiques introduites
$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{w_0}{Q}\frac{dy}{dt}+w_0{}^2y(t)=0$	Pulsation propre w_0 facteur de qualité : Q (sans dimension)
$\frac{d^2y}{dt^2}+2\sigma w_0\frac{dy}{dt}+w_0{}^2y(t)=0$	Pulsation propre w_0 facteur d'amortissement : σ (sans dimension)
$\frac{d^2y}{dt^2}+2\lambda\frac{dy}{dt}+w_0{}^2y(t)=0$	Pulsation propre w_0 coefficient d'amortissement : λ (en s^{-1})

Formes canoniques des fonction de transfert des filtres d'ordre 1 et 2 , caractéristiques et identification

Passe-bas d'ordre 1 : $\boxed{\underline{H}(jw)=\frac{H_0}{1+j\frac{w}{w_0}}}$ $|H_0|$ est le gain maximum , w_0 est la pulsation de coupure à – 3 dB .

En BF phase de 0 (si $H_0>0$) ou π (si $H_0<0$) en HF $\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0) , à la pulsation de coupure $\phi=\frac{\pm\pi}{4}$ (selon le signe de H_0).

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 0 en BF , -20 dB/décade en HF .

Passe-haut d'ordre 1 : $\boxed{\underline{H}(jw)=\frac{H_0 j\frac{w}{w_0}}{1+j\frac{w}{w_0}}}$

$|H_0|$ est le gain maximum , w_0 est la pulsation de coupure à – 3 dB .

En HF phase de 0 (si $H_0>0$) ou π (si $H_0<0$) en BF $\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0), à la pulsation de coupure $\pi=\frac{\pm\pi}{4}$ (selon le signe de H_0).

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude :+20 dB/décade en BF, 0 en HF .

Pas de résonance pour les filtres d'ordre 1 .

Filtres d'ordre 2 :

Passe-bas d'ordre 2 : $\boxed{\underline{H}(jw)=\frac{H_0}{1-\frac{w^2}{w_0{}^2}+j\frac{w}{w_0Q}}}$ w_0 est la pulsation caractéristique , elle s'identifie à la pulsation de coupure à – 3 dB uniquement lorsque $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$ il existe une pulsation de résonance w_R ($w_R=w_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$) , sinon le gain maximum est obtenu pour $w=0$ et vaut $|H_0|$.

Attention : dans le cas général ω_0 n'est ni la pulsation de coupure à -3 dB, ni la pulsation de résonance .

C'est la pulsation caractéristique . Elle correspond à la pulsation pour laquelle il y a intersection des

asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude .

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 0 en BF , -40 dB/décade en HF .

Les valeurs de phase caractéristiques :
→ BF phase de 0 (si $H_0>0$) ou π (si $H_0<0$) , l'étude en BF permet de déterminer H_0 .
→ HF phase de 0 (si $H_0<0$) ou π (si $H_0>0$)
→ à la pulsation caractéristique $\phi=\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0), $\underline{H}(j\omega_0)=-jH_0Q$, l'étude du gain à la pulsation caractéristique permet de déterminer Q .

Filtre passe-bande d'ordre 2 : $\boxed{\underline{H}(jw)=\frac{H_0}{1+jQ(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w})}}$

w_0 est la pulsation centrale (ou de résonance) , Q le facteur de qualité et $|H_0|$ le gain maximum (à la résonance) , la bande passante $\boxed{\Delta w=\frac{w_0}{Q}}$ est d'autant plus étroite (filtre d'autant plus sélectif) que Q est grand .
Les valeurs de phase caractéristiques :
→ à la résonance : 0 (si $H_0>0$) ou π (si $H_0<0$), $\underline{H}(j\omega_0)=H_0$
→ BF phase de $\frac{-\pi}{2}$ (si $H_0>0$) ou $\pi/2$ (si $H_0<0$)
→ HF phase de $\frac{\pi}{2}$ (si $H_0>0$) ou $-\pi/2$ (si $H_0<0$)

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 20 dB/décade en BF , - 20 dB/décade en HF .
Les deux asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude se coupent en $\omega=\omega_0$, l' ordonnée du point vaut $20\log(\frac{|H_0|}{Q})$ (courbe de gain « au dessus » des asymptotes si Q > 1, « en dessous » si Q>1) .

Filtre passe-haut d'ordre 2 : $\boxed{\underline{H}(jw)=\frac{H_0(\frac{-w^2}{{w_0}^2})}{1-\frac{w^2}{{w_0}^2}+j\frac{w}{w_0Q}}}$

w_0 est la pulsation caractéristique , elle s'identifie à la pulsation de coupure à – 3 dB uniquement lorsque $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$ il existe une pulsation de résonance w_R ($w_R=w_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$) , sinon le gain maximum est obtenu pour $w\,tend\,vers\,l'\,infini$ et vaut $|H_0|$.
Attention : dans le cas général ω_0 n'est ni la pulsation de coupure à -3 dB, ni la pulsation de résonance .
C'est la pulsation caractéristique . Elle correspond à la pulsation pour laquelle il y a intersection des asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude .

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 40 dB/décade en BF , 0 en HF.

Les valeurs de phase caractéristiques :
→ HF phase de 0 (si $H_0>0$) ou π (si $H_0<0$) , l'étude en HF permet de déterminer H_0 .
→ BF phase de 0 (si $H_0<0$) ou π (si $H_0>0$)
→ à la pulsation caractéristique $\phi=\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0).