

DS SCIENCES PHYSIQUES N°1
Samedi 21 septembre 2024

Les résultats doivent être encadrés, votre copie soignée .

Toute réponse doit être justifiée .

Vos copies doivent être numérotées sous la forme 1/4 , 2/4 , 3/4

Un résultat numérique sans unité ne rapporte aucun point .

CHIMIE :

Partie I : précipitation

1- Déterminer la solubilité du sulfate d'argent Ag_2SO_4 dans l'eau pure en négligeant le caractère basique de l'ion SO_4^{2-} .

2- On prend en compte le caractère basique de SO_4^{2-} . Déterminer la relation liant la solubilité s de Ag_2SO_4 , $h = [\text{H}_3\text{O}^+]$, K_a (constante d'acidité du couple $\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}$) et K_s (produit de solubilité de Ag_2SO_4) .

Dans toute la suite, on néglige à nouveau le caractère basique de SO_4^{2-} .

3- Déterminer la solubilité de Ag_2SO_4 dans une solution de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$) de concentration $c = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

4- On mélange 10,0 ml de solution de sulfate de sodium ($\text{SO}_4^{2-} + 2 \text{Na}^+$) à $c_1 = 8,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et 10,0 ml de solution de nitrate d'argent ($\text{NO}_3^- + \text{Ag}^+$) à $c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

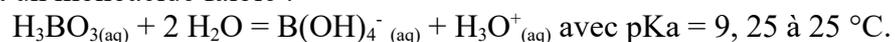
Un précipité blanc de sulfate d'argent sera-t-il observé ?

Données: $pK_s (\text{Ag}_2\text{SO}_4) = 4,8$

Partie II : dosages pH-métrique et conductimétrique

Chaque réacteur nucléaire est équipé d'un circuit de refroidissement du réacteur à l'arrêt. Ce circuit contient un mélange d'eau et de bore. Le bore, présent dans l'eau du circuit primaire sous forme d'acide borique dissous, permet de modérer, par sa capacité à absorber les neutrons, la réaction en chaîne. Les règles d'exploitation demandent de réaliser un contrôle de la concentration en bore.

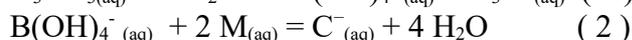
L'acide borique H_3BO_3 est un monoacide faible :



La question A4- est une question ouverte . Vous exposerez clairement votre démarche pour résoudre cette dernière .

A – Titrage pH-métrique

En présence de D-mannitol (noté M), l'ion $\text{B}(\text{OH})_{4(\text{aq})}^-$ donne un ion noté C^- . La dissociation de H_3BO_3 avec le D-mannitol s'écrit :



La constante thermodynamique d'équilibre de la réaction (2) est $K_2 = 10^5$.

1- Calculer la constante d'équilibre K de la réaction de formation de $\text{C}_{(\text{aq})}^-$, avec un coefficient stoechiométrique unité, à partir de l'acide borique et du D-mannitol aqueux à 25°C . Commenter le résultat.

Le mélange $\text{H}_3\text{BO}_{3(\text{aq})} + 2 \text{M}_{(\text{aq})}$ joue le rôle d'un acide faible au sens de Bronsted de base conjugué C^- . On

définit la constante d'acidité apparente de l'acide borique par $K_{a,app} = \frac{a(C^-) a(H_3O^+)}{a(H_3BO_3)}$ où interviennent les activités des espèces dissoutes.

2- Exprimer $pK_{a,app}$ en fonction de $pK = -\log K$, $[M_{(aq)}]$ et de la concentration standard c° .

On étudie le dosage de l'acide borique par une solution d'hydroxyde de sodium.

On prépare 10 mL d'une solution d'acide borique de concentration C_0 ; on ajoute x grammes de D-mannitol en s'assurant de respecter la condition $[M_{(aq)}] \gg [H_3BO_{3(aq)}]$; on complète à 200 mL avec de l'eau distillée. On ajoute un barreau aimanté afin d'agiter le mélange.

On dispose dans la burette d'une solution d'hydroxyde de sodium à la concentration $c_B = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

On appelle V_B le volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé au cours du dosage.

On réalise trois dosages à 25°C avec des valeurs différentes de x , l'une d'elles correspondant au cas $x = 0$ (absence de D-mannitol). Les trois courbes (a), (b) et (c) correspondantes, obtenues suite à une étude expérimentale, figurent sur le graphe de la figure 8.

3- Quelles sont les électrodes utilisées pour suivre le dosage . Précisez leur rôle .

4- Déterminer C_0 ainsi que les valeurs de x notées respectivement x_a , x_b et x_c ayant conduit à chacune des courbes (a), (b) et (c).

B- Titrage conductimétrique :

On s'intéresse à présent au principe d'une autre technique de titrage, conductimétrique.

On prépare 10 mL d'une solution d'acide borique de concentration C_0 ; on la complète avec de l'eau distillée jusqu'à atteindre un volume $V_A = 40 \text{ mL}$ où la concentration en acide borique est notée C_A . On ajoute un barreau aimanté.

Dans la burette, on dispose d'une solution titrante d'hydroxyde de sodium à la concentration $C_B = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

On appelle V_B le volume de cette solution titrante versé au cours du dosage à 25°C .

On utilise un conductimètre pour suivre l'évolution de la conductivité σ de la solution titrée en fonction du volume V_B .

5- Déterminer la loi de conductivité σ en fonction notamment du volume V_B de solution titrante versé avant et après l'équivalence.

6- Représenter, justifications à l'appui, l'allure de $(V_A + V_B)\sigma$ en fonction de V_B en y repérant le volume réel versé V_{eq} à l'équivalence. Conclure sur la possibilité de titrer ainsi le bore en solution.

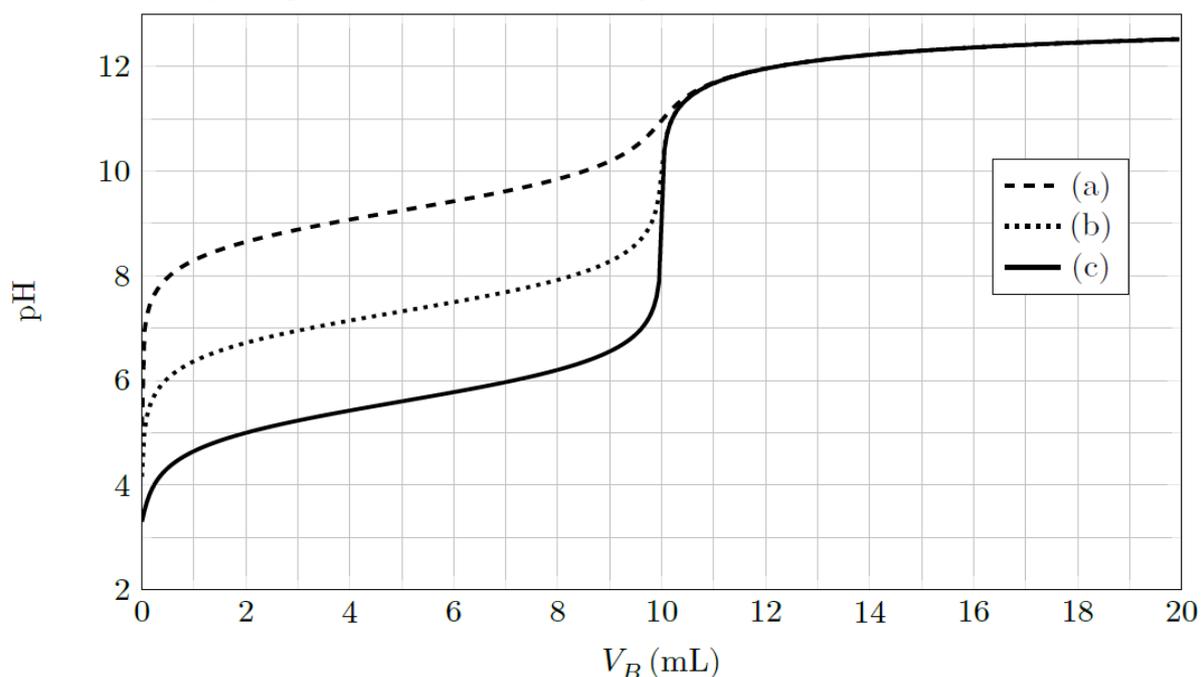


Figure 8 Courbe de titrage pH-métrique de l'acide borique, avec ou sans D-mannitol, par l'hydroxyde de sodium.

PHYSIQUE :

A- Bobine et circuit résonant :

I- Lorsqu'une bobine, d'inductance propre L et de résistance R , est placée à proximité d'une pièce métallique conductrice, son inductance propre L varie en fonction de sa position par rapport à la pièce .

Une bobine, alimentée par une tension $u(t) = U_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$ est parcourue par un courant variable $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi)$.

On se place en régime forcé de pulsation ω .

Pour une position et une pulsation données, U_{eff} , I_{eff} et ϕ sont fixés.

1- Comment procède-t-on pour mesurer la valeur efficace d'un signal à l'aide d'un multimètre ?

Comment vérifier que la valeur moyenne du signal est nulle ?

2- La puissance moyenne P_b absorbée par la bobine dépend elle aussi de sa position par rapport à la pièce. Pourquoi ? Déterminer son expression en fonction de U_{eff} , I_{eff} et ϕ .

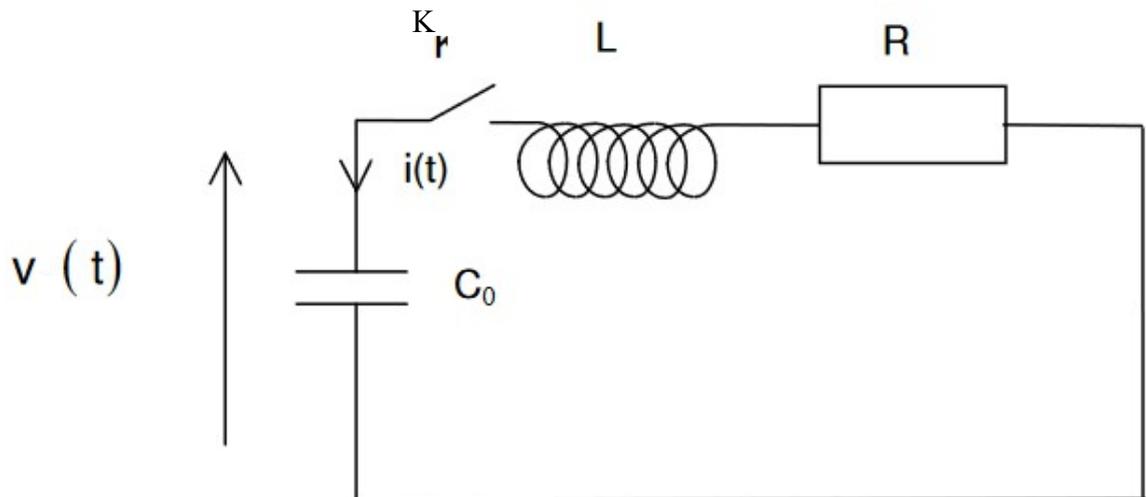
On adopte comme modèle équivalent de la bobine en présence de la pièce : une bobine d'inductance propre L et de résistance R . L et R dépendent de la position de la bobine par rapport à la pièce.

3- Donner les expressions de L et de R en fonction de U_{eff} , I_{eff} , ω et ϕ .

II- On considère maintenant le circuit résonant constitué de la bobine en série avec un condensateur de capacité C_0 et un interrupteur K . Le modèle électrique est alors un circuit RLC .

A $t=0$ le condensateur est initialement chargé la tension à ses bornes vaut $V(0) = V_0 < 0$

et on ferme l'interrupteur .

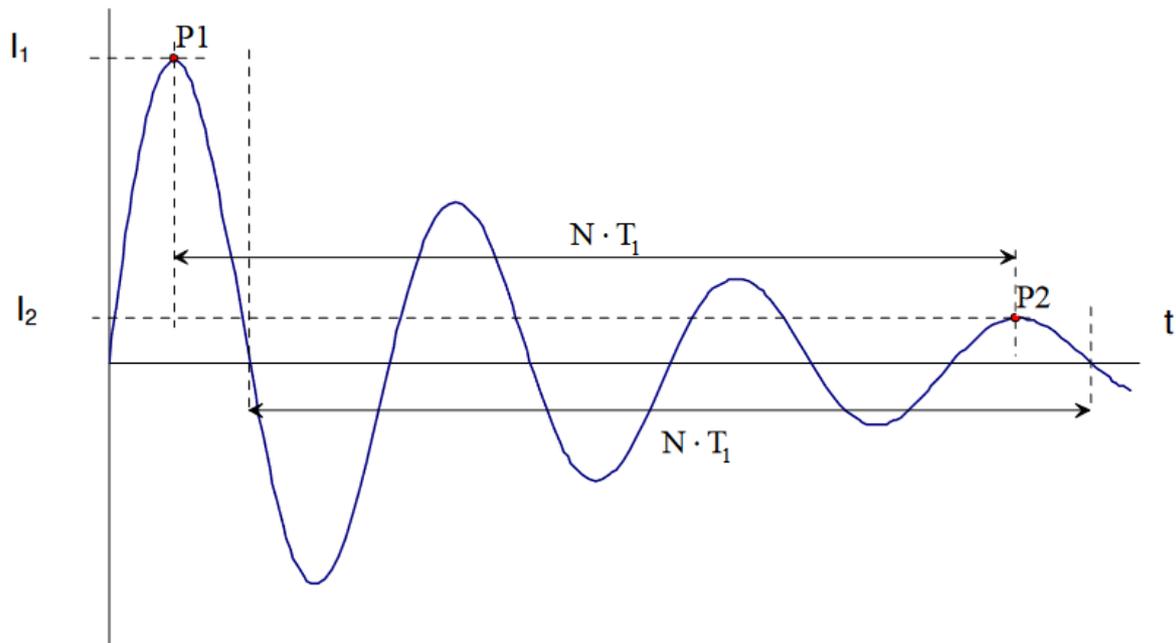


On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ et $m = \frac{R}{2L\omega_0}$. Le facteur de qualité du circuit vaut $Q = \frac{1}{2m}$.

4- Etablir les équations différentielles auxquelles satisfont $i(t)$ et $V(t)$.

5- Les résoudre totalement lorsque $m < 1$.

Un enregistrement du courant pendant la décharge du condensateur est donné à la figure ci-dessous .



6- Montrer comment la connaissance du rapport des amplitudes I_1 et I_2 et de la durée $N T_1$ (voir figure ci-dessus) permet de trouver les valeurs de ω_0 et de m , puis de L et R .

Application numérique : $C_0 = 22\text{nF}$, $N = 3$, $T_1 = 0,4\text{ ms}$. En utilisant le graphe de la figure, déterminer ω_0 , m , L et R .

III- Résolution numérique :

On souhaite maintenant obtenir $V(t)$ de façon numérique.

Pour cela, le temps est discrétisé en N points $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$ avec un pas de temps constant Δt . Les $N-1$ pas sont effectués pendant la simulation de durée totale t_{max} .

On note $u(t) = \frac{dV}{dt}$ et $W(t) = \frac{du}{dt}$, V_n, u_n et W_n les valeurs de $V(t), u(t)$ et $W(t)$ à $t = n\Delta t$

Les conditions initiales $V(0) = V_0$ et $u(0) = u_0$ sont connues et permettent de démarrer le processus d'intégration numérique.

Un aide-mémoire sur numpy est fourni en fin de problème.

7- Écrire les lignes de code permettant de définir l'entier N . On suppose t_{max} et Δt connus et fixés par l'utilisateur en début de code.

8- Écrire alors l'instruction permettant de définir le tableau t qui contient toutes les valeurs de t telles que : $0 \leq t \leq t_{max}$.

9- En effectuant des développements de Taylor de V et u tronqués à l'ordre 1, on obtient l'algorithme d'Euler explicite.

a- Donner la relation liant V_{n+1}, V_n, u_n et Δt ainsi que la relation liant u_{n+1}, u_n, W_n et Δt

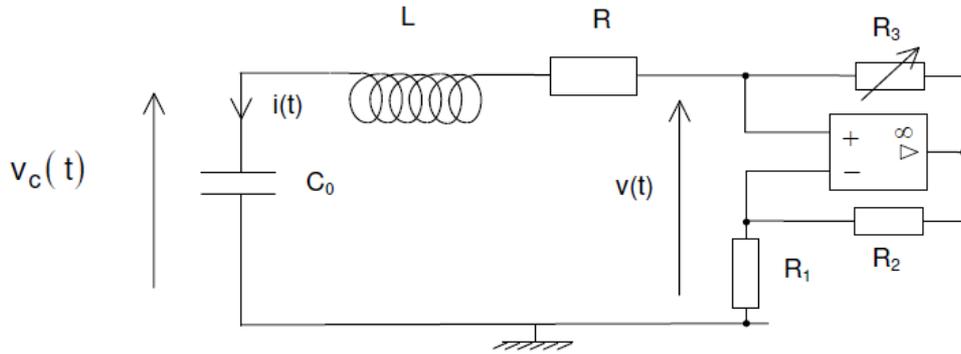
b- En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, V_n, m, ω_0 et Δt .

10 - Écrire l'initialisation des tableaux et la boucle en i permettant d'obtenir les tableaux des valeurs de V et u aux différents instants $(i+1)\Delta t$. On supposera que les constantes m et ω_0 ont été définies dans le code.

B- Etude d'un détecteur de métal :

I- Etude d'un oscillateur

Le circuit oscillant de la partie précédente est utilisé dans le montage électronique de la ci-dessous où figure un ALI idéal, fonctionnant en régime linéaire, et trois résistances, dont une réglable ($R3$).



1- Etablir la relation entre $i(t)$, $v(t)$, R_1 , R_2 et R_3 .

2- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$, $m = \frac{R}{2L\omega_0}$,

$$m' = \frac{R_3 R_1}{2L R_2 \omega_0}$$

3- Etudier qualitativement le fonctionnement du montage lorsque $m' < m$ et lorsque $m' > m$. Dans le cas où $m' > m$ et où le discriminant de l'équation caractéristique est négatif, déterminer la forme de $i(t)$ et représenter son allure . Par quel phénomène sera limitée l'amplitude des oscillations ?

4- a- Que se passe-t-il théoriquement si $m' = m$? Donner l'expression de $i(t)$ (le calcul des constantes d'intégration n'est pas demandé) .

Application numérique : $C_0 = 22 \text{ nF}$, $L = 20 \text{ mH}$. Quelle est la fréquence des oscillations ?

b- La tolérance sur la valeur de la capacité du condensateur est donnée à 5%. Quel écart relatif de fréquence pourra en découler ?

II- Détecteur de métal

On réalise deux oscillateurs sinusoïdaux du type étudié au I- ci-dessus, avec deux bobines b_1 et b_2 de mêmes dimensions. Les deux bobines sont placées côte à côte dans la tête de détection de l'appareil mais leur couplage magnétique reste négligeable (l'inductance mutuelle entre les deux bobines est négligée). La tête de détection est sensiblement plane, et parallèle au sol. Les oscillateurs sont appelés osc_1 et osc_2 , leurs sorties respectives sont les tensions v_{c1} et v_{c2} aux bornes des condensateurs ; on supposera que ces deux tensions sont de même amplitude, notées V_0 , de l'ordre du volt, et on notera f_1 et f_2 leurs fréquences respectives.

En l'absence de pièce métallique et loin du sol, les fréquences d'oscillations sont f_{10} et f_{20} (f_{20} est supposée supérieure à f_{10}).

Le montage complet du détecteur est donné à la figure ci-dessous. Un multiplieur donne en sortie le signal $V_A = A \cdot v_{c1} \cdot v_{c2}$, il est suivi par un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0' = f_{10} f_{20}$, de gain G et de facteur de qualité Q' , et d'un convertisseur fréquence- tension. L'élément final de la chaîne est un voltmètre numérique qui reçoit du convertisseur fréquence-tension une tension égale à $B \cdot (f - f_0')$, lorsque celui-ci reçoit un signal périodique de fréquence f .

Le montage fonctionne correctement si f_0' est de l'ordre de grandeur de 100 Hz.

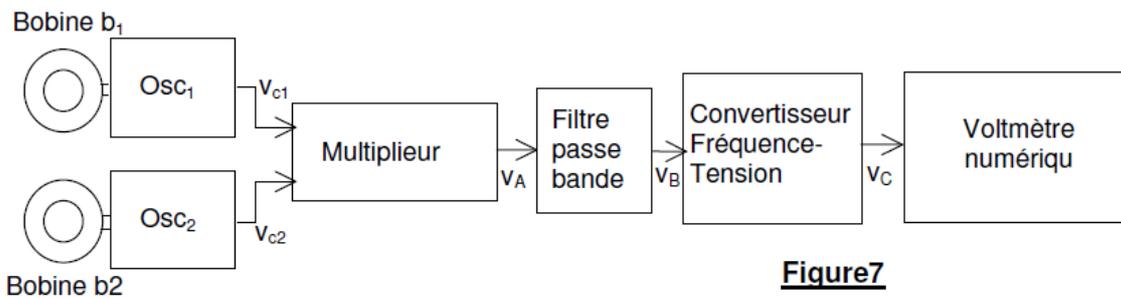


Figure7

- 1- Quelles sont les unités des coefficients A (pour le multiplieur) et B (pour le convertisseur fréquence-tension) ?
- 2- a- Déterminer l'expression et représenter le spectre de $V_A(t)$.
b- Sachant que $Q' = 20$, déterminer l'ordre de grandeur de la bande passante du filtre passe-bande .
c- Sachant que f_{10} et f_{20} sont de l'ordre de 8 kHz, montrer, que le signal à l'entrée du convertisseur fréquence-tension est assimilable à une tension sinusoïdale, dès lors que l'écart entre f_{10} et f_{20} est situé dans la bande passante du filtre.
- 3- Pourquoi les deux fréquences f_{10} et f_{20} ont-elles peu de chance d'être identiques ?
Comment peut-on ajuster l'écart entre ces deux fréquences ?

La présence du sol modifie les lignes de champ des bobines b1 et b2. Il s'ensuit une variation de fréquence -sensiblement identique sur chaque oscillateur- qui n'a pas d'influence sur la sortie du montage.

- 4- Expliquer cette absence d'influence.

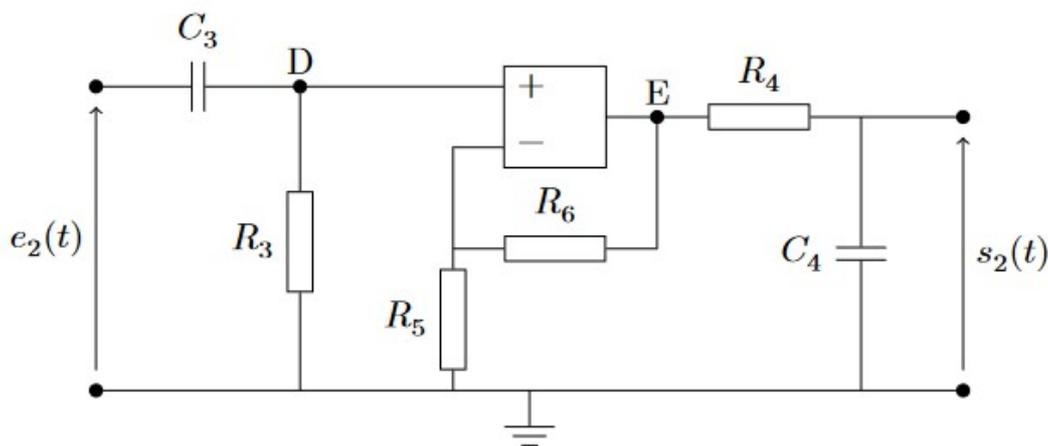
On suppose que la présence d'un objet métallique plus proche de la bobine b1 que de la bobine b2 induit une diminution de fréquence $\Delta'f$ sur f_1 , alors que f_2 reste quasi-constante..

Application numérique : $f_{10} = 7516$ Hz ; $f_{20} = 7653$ Hz ; $\Delta'f = 5$ Hz ; $A = 0,1$ SI ; $B = 0,6$ SI ; $G = 12$.
Calculer la tension à l'entrée du voltmètre numérique suite à la détection de l'objet métallique.

- 5- Expliquer en détails ce qu'observe l'utilisateur de ce détecteur de métaux lorsque la tête de détection se déplace de part et d'autre de l'objet métallique, on pourra représenter l'allure de la courbe donnant v_c en fonction de la position x de l'objet métallique .

C- Etude du filtre passe-bande :

On s'intéresse maintenant au filtre passe-bande intervenant dans le détecteur de métal .
Le schéma du filtre est le suivant :



L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire .

1- Justifier, à partir de l'étude des comportements du montage à basses et hautes fréquences, que le filtre réalise la fonction désirée .

2- Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G}{1 + jQ' \left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega} \right)}$$

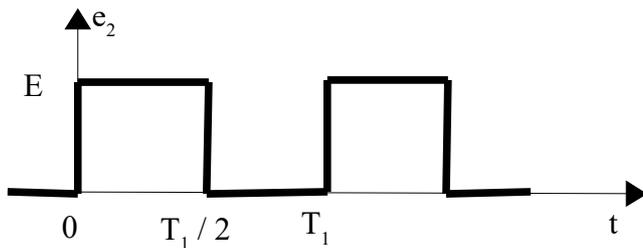
. Donner les expressions de G, Q' et ω'_0 en fonction des composants intervenant dans le montage .

Les valeurs de G, Q' et $f'_0 = \frac{\omega'_0}{2\pi}$ sont les mêmes que celles de la partie B-II- soient $G = 12$, $Q' = 20$, $f'_0 = 137 \text{ Hz}$.

3- Etudier les diagrammes de Bode asymptotiques et représenter ceux-ci ainsi que l'allure des diagrammes réels .

Comment peut-on, expérimentalement, trouver les valeurs des grandeurs caractéristiques du filtre ? (Justifiez précisément votre réponse) .

4- Afin d'étudier le comportement fréquentiel de ce filtre, on étudie, en régime établi, la réponse à au signal créneau suivant .



Le signal $e_2(t)$ se décompose en série de Fourier sous la forme :

$$e_2(t) = V_0 + \sum_{k=0}^{\infty} V_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \quad \text{où } \omega_1 \text{ est la pulsation du signal .}$$

a- Donner l'expression de V_0 en fonction des caractéristiques du signal $e_2(t)$.

On donne $V_{2k+1} = \frac{2E}{(2k+1)\pi}$.

b- Donner, en justifiant soigneusement, l'expression et la représentation graphique du signal $s_2(t)$ (vous ferez figurer également $e_2(t)$ sur le chronogramme) obtenu à la sortie du filtre dans les cas où $f_1 = 137 \text{ Hz}$ puis $f_1 = 45,7 \text{ Hz}$. Représenter, sur un même graphe, les spectres des signaux $e_2(t)$ et $s_2(t)$.

5- Déterminer l'impédance d'entrée du filtre . Quel problème peut-on rencontrer lorsque l'on va insérer le filtre entre le multiplieur et le convertisseur fréquence-tension ?

Proposer un moyen de s'affranchir de cet éventuel problème .

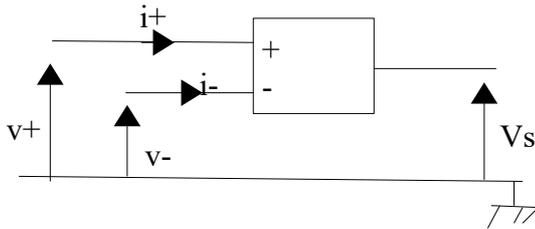
6- On applique maintenant, en entrée du montage, une rampe de tension : $e_2(t) = \frac{E}{\tau_0} t$.

a- Etablir l'équation différentielle liant $e_2(t)$ et $s_2(t)$.

b- Déterminer un ordre de grandeur du temps d'établissement du régime établi .

Annexe :

On rappelle les propriétés d'un ALI idéal :

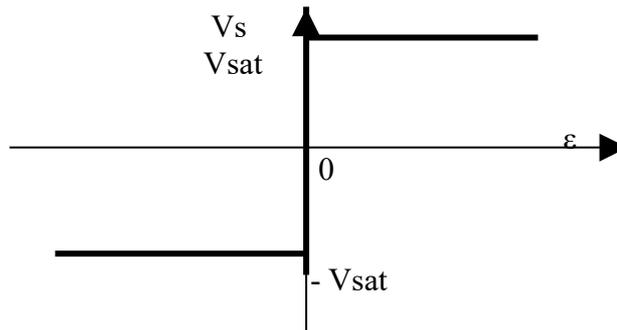


$$E = v+ - v-$$

Le gain A est infini, les impédances d'entrées sont infinies (les intensités $i+$ et $i-$ sont nulles), l'impédance de sortie est nulle, la bande passante est infinie.

Fonctionnement en régime linéaire : $\varepsilon = 0$, les courants entrant en « + » et « - » sont nuls : la sortie est une source de tension idéale

Fonctionnement en régime saturé : $\varepsilon \neq 0$, la tension de sortie est soit égale à $+V_{cc}$ ou à $-V_{cc}$.



Aide-mémoire sur numpy

Les bibliothèques sont importées de la façon suivante :

```
from math import *
import numpy as np
```

La création d'un tableau numpy `tab` à une dimension possédant n éléments, tous initialisés à 0, est réalisée à l'aide de l'instruction :

```
>>> tab=np.zeros(n)
```

Celle d'un tableau numpy `tab` à une dimension possédant n éléments, uniformément répartis entre deux valeurs `debut` et `fin`, se fait avec :

```
>>> debut=0; fin=10; n=5
>>> tab=np.linspace(debut, fin, n)
>>> print tab
array([ 0.0  2.5  5.0  7.5 10.0 ])
```

L'accès à un élément du tableau `tab` (en lecture ou en écriture) se fait par `tab[i]`, la numérotation des indices se faisant à partir de 0 :

```
>>> tab=np.zeros(4)
[ 0.0  0.0  0.0  0.0 ]
>>> tab[1]=2; tab[2]=6; print tab
[ 0.0  2.0  6.0  0.0 ]
```

La sélection de l'ensemble des j premiers éléments du tableau `tab` est possible avec :

```
>>> print tab[:3]
[ 0.0  2.0  6.0 ]
```