SPE MP

Propriétés et équations relatives au champ électrostatique .

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\vec{grad}\,U(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z}\qquad \boxed{\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x(x,y,z,t) \\ a_y(x,y,z,t) \\ a_z(x,y,z,t) \end{bmatrix} \qquad \boxed{dive\,\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}}$$

$$\vec{rot}\,\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{rot}\,\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\vec{\Delta}\,\vec{a}=(\Delta a_x)\vec{u}_x+(\Delta a_y)\vec{u}_y+(\Delta a_z)\vec{u}_z}$$

$$\boxed{\vec{\Delta}\,\vec{a}=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{u}_z}$$

Champ électrique en régime statique :

Invariances et symétrie :

→ Les coordonnées du champ électrostatique présentes les même invariances que les sources .

→ $\vec{E}(M)$ appartient à tout plan de symétrie passant par M et est orthogonal à tout plan d'anti-symétrie **passant par M** .

→ Les champs en deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie de la distribution sont symétriques .

→ Le champ en un point M' symétrique d'un point M par rapport à un plan d'anti-symétrie est l'opposé du symétrique par rapport à ce plan du champ en M .

Champ et potentiel créés par une ou N charges ponctuelles :

- - Une charge ponctuelle placée au point P crée, en un point M, un champ et un potentiel :

$$\boxed{E(\vec{M})=\frac{q\,\vec{PM}}{4\pi\epsilon o\,PM^3}}\qquad \boxed{V(M)=\frac{q}{4\pi\epsilon o\,PM}}$$

- n charges ponctuelles :

$$\boxed{E(\vec{M})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i\,\vec{P_iM}}{4\pi\epsilon o\,P_iM^3}\right)}\qquad \boxed{V(M)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon o\,P_iM}\right)}$$

→ Energie potentielle d'une charge q placée en M dans un potentiel électrostatique

$$E_P=q\,V(M)$$

Lois locales et intégrales vérifiées par le champ et le potentiel électrostatiques :

→ Théorème de Gauss- Equation de Maxwell-Gauss :

Quelque soit la surface S fermée : $\oiint_{M\in(S)} E(\vec{M})\, d\vec{S}_M = \frac{Qint}{\epsilon o}$ (propriété intégrale)

Conséquence : localement le champ électrostatique vérifie : div $\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$

→ Circulation conservative :

Quelque que soit le contour C fermé : $\oint_{M\in(C)} E(\vec{M}).\, d\vec{l}_M = 0$ (propriété intégrale)

Conséquence : localement le champ électrostatique vérifie $\vec{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$

→ Equations vérifiées par le potentiel électrostatique :

Le potentiel électrostatique vérifie l'équation locale $\boxed{\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon o} = 0}$ équation de poisson

Localement le champ électrostatique est lié au potentiel par la relation : $\boxed{E(\vec{M}) = -\vec{grad}\, V(M)}$

ou encore $dV = -\vec{E}(M).\vec{dl}$

Intégralement, on a $\boxed{V_A - V_B = \int_A^B E(\vec{M}).\vec{dl} = \int_A^B -grad\vec{V}(M).\vec{dl}}$ la ddp entre deux points A et B est égale à la circulation de A vers B du champ électrostatique .

Lignes de champ et surfaces équipotentielle :

→ Les lignes de champ sont ouvertes , normales aux équipotentielles , dirigées selon les potentiels décroissants .

→ Pour des charges ponctuelles , les lignes de champ divergent depuis les charges positives et convergent vers les charges négatives .

→ En un point d'intersection de lignes de champ soit le champ est nul, soit il existe une charge ponctuelle

Continuité :

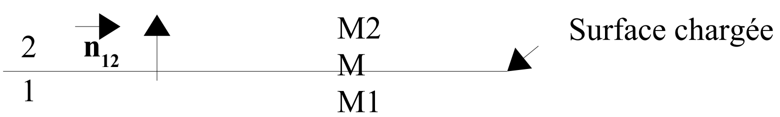
→ Le potentiel électrostatique est continu .

→ Le champ électrostatique créé par une distribution volumique de charges est continu .

→ Le champ créé par une distribution surfacique de charges est discontinu .

.

Relation de passage :



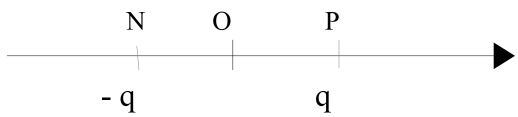
- Pour deux points infiniment voisins de M : $E(\vec{M}_2) - E(\vec{M}_1) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\vec{n}_{12}$

  Continuité de la composante tangentielle et discontinuité de la composante normale .

Analogie avec la gravitation :

	Electrostatique	Gravitation
Source des champs	charges	masse
Préfacteur	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	- G
Relation champ-force	$\vec{F}=q\vec{E}$	$\vec{F}=m\vec{g}$
Source ponctuelle	Champ créé en M par une charge qo placée en P $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$	Champ créé en M par une masse mo placée en P $\vec{g}=\frac{-Gm\vec{PM}}{PM^3}$
Circulation conservative	$\oint \vec{E}.\vec{dl}=0$	$\oint \vec{g}.\vec{dl}=0$
Th de Gauss	$\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Qint}{\epsilon o}$	$\oiint_S \vec{g}\,\vec{dS}=-4\pi G M_{inté}$
Equation locale	div $\vec{E}(M)=\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	div $\vec{g}(M)=-4\pi G\mu(M)$
Définition du potentiel	$\vec{E}=-\vec{grad}(V)$	$\vec{g}=-grad(\Phi)$
Equation de Poisson	$\Delta V+\frac{\rho}{\epsilon_0}=0$	$\Delta(\Phi)-4\pi G\mu=0$

Dipôles électrostatique ::modèle du doublet .



- Moment dipolaire : $\boxed{\vec{p}=q\vec{NP}}$ unité SI C.m
- Le potentiel à grande distance décroît en $\frac{1}{r^2}$, le champ à grande distance décroît en $\frac{1}{r^3}$
- Plongé dans un champ extérieur $\vec{E}_e$ ce dipôle subit des actions mécaniques :

→ si $\vec{E}_e$ est uniforme $\boxed{\vec{R}=\vec{0}}$ couple de moment $\boxed{\vec{\Gamma}=\vec{p}\wedge\vec{E}_e}$, énergie potentielle d'interaction $E_P=-\vec{p}.\vec{E}_e$

→ si $\vec{E}_e$ non uniforme $\vec{R}=(\vec{p}.\vec{grad})\vec{E}_e$ moment $\boxed{\vec{\Gamma}=\vec{p}\wedge\vec{E}_e}$, énergie potentielle d'interaction $E_P=-\vec{p}.\vec{E}_e$

Le dipôle tend à aligner son moment dans le sens du champ extérieur afin d'atteindre une position d'équilibre stable (minimum d'énergie potentielle) . Si le champ appliqué n'est pas uniformz , la résultante attire le dipôle vers les zones de champ intense .