Capacité numérique : résolution numérique de l'équation de diffusion .

1- Problème étudié :
On considère une barre solide, de longueur L, constituée d'un matériau de diffusivité thermique D . On suppose que le problème est à une dimension est que la température dans la barre est une fonction de x et t ,T(M,t) = T(x,t) .

On suppose qu'initialement, la température dans la barre est uniforme et vaut T_1 , $T(x,t<0) = T_1$ pour tout x .
A t=0, l'extrémité en x=0 est portée à une température T_2 , l'extrémité x=L restant à la température T_1 .

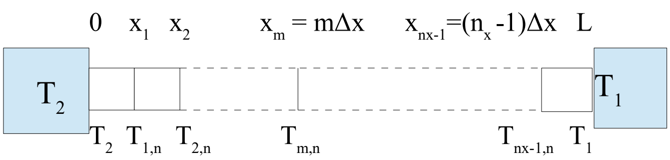
Le but est de représenter, à différents instants l'évolution de la température dans la barre et d'estimer le temps au bout duquel on atteint le régime stationnaire et de comparer ce temps au temps caractéristique de diffusion, déterminé à partir de l'équation de diffusion .

La température T(x,t) de la barre est solution de l'équation de diffusion 1D .

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)=D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)}$$

2- Principe de la résolution numérique :
On cherche une solution numérique au problème par la méthode d'Euler explicite (ou méthode aux différences finies) .
Nous allons chercher T(x,t) sur une durée temporelle τ .
Nous allons faire une double discrétisation :
→ la barre est spatialement discrétisée en n_x tronçons de longueur égale à $\boxed{\Delta x=\frac{L}{n_x}}$. On obtient des abscisses discrètes $\boxed{x_m=m\Delta x}$ avec $m\in[0,n_x]$.
→ la durée totale d'évolution est discrétisée en n_t intervalles de durée $\boxed{\Delta t=\frac{\tau}{n_t}}$. On obtient des instants discrets $\boxed{t_n=n\Delta t}$ avec $n\in[0,n_t]$.

On obtiendra donc une température discrète : $\boxed{T_{m,n}=T(m\Delta x,n\Delta t)}$
A la date t_n , on obtient la situation suivante :



En développant la température au 1er ordre discret sur le temps au voisinage de t_n à l'abscisse x_m , on a : $T_{m,n+1}=T_{m,n}+\frac{\partial T}{\partial t}(x_m,t_n).\Delta t+o(\Delta t)$ cette relation permet de donner une valeur approchée de la dérivée temporelle « discrète » en x_m à l'instant t_n .

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(x_m,t_n)\approx\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta t}}$$

De même si on développe la température au second ordre discret sur l'espace au voisinage de x_{m+1} et x_{m-1} à la date t_n , on a :

$$T_{m+1,n}=T_{m,n}+\frac{\partial T}{\partial x}(x_m,t_n).\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_m,t_n).(\Delta x)^2+o((\Delta x)^2)$$

$$T_{m-1,n}=T_{m,n}-\frac{\partial T}{\partial x}(x_m,t_n).\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_m,t_n).(\Delta x)^2+o((\Delta x)^2)$$

En sommant les deux équations précédentes, on obtient l'expression de la dérivée seconde spatiale »discrète » en x_m à la date t_n .

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_m, t_n) \approx \frac{T_{m+1,n} - 2\mathrm{T}_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}}$$

Ainsi, l'équation de diffusion 1D discrétisée s'écrit : $\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta t} = \frac{D}{(\Delta x)^2} . [T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}]$,

à partir de cette relation, on peut en déduire la relation de récurrence permettant d'obtenir la température en x_m à l'instant t_{n+1} en fonction des températures en x_m ($T_{m,n}$), en x_{m+1} ($T_{m+1,n}$) et en x_{m-1} ($T_{m-1,n}$) calculées à l'instant antérieur t_n :

$$\boxed{T_{m,n+1} = T_{m,n} + \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} . [T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}]}$$