Capacité numérique : résolution numérique de l'équation de diffusion .

1- Problème étudié :

On considère une barre solide, de longueur L, constituée d'un matériau de diffusivité thermique D . On suppose que le problème est à une dimension est que la température dans la barre est une fonction de x et t ,T(M,t) = T(x,t) .

On suppose qu'initialement, la température dans la barre est uniforme et vaut T_1 , $T(x,t<0) = T_1$ pour tout x .

A t=0, l'extrémité en x=0 est portée à une température T_2 , l'extrémité x=L restant à la température T_1 .

Le but est de représenter, à différents instants l'évolution de la température dans la barre et d'estimer le temps au bout duquel on atteint le régime stationnaire et de comparer ce temps au temps caractéristique de diffusion, déterminé à partir de l'équation de diffusion .

La température T(x,t) de la barre est solution de l'équation de diffusion 1D que vous réétablierez .

2- Principe de la résolution numérique :

On cherche une solution numérique au problème par la méthode d'Euler explicite (ou méthode aux différences finies) .

Nous allons chercher T(x,t) sur une durée temporelle τ .

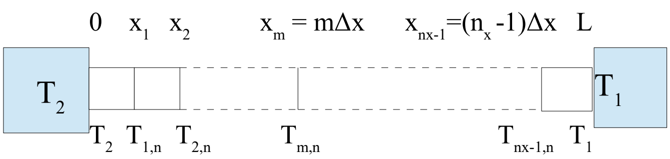
Nous allons faire une double discrétisation :

→ la barre est spatialement discrétisée en n_x tronçons de longueur égale à $\boxed{\Delta x=\frac{L}{n_x}}$. On obtient des abscisses discrètes $\boxed{x_m=m\,\Delta x}$ avec $m\in[0,n_x]$.

→ la durée totale d'évolution est discrétisée en n_t intervalles de durée $\boxed{\Delta t=\frac{\tau}{n_t}}$. On obtient des instants discrets $\boxed{t_n=n\,\Delta t}$ avec $n\in[0,n_t]$.

On obtiendra donc une température discrète : $\boxed{T_{m,n}=T(m\,\Delta x,n\,\Delta t)}$

A la date t_n , on obtient la situation suivante :



En développant la température au 1er ordre discret sur le temps au voisinage de t_n à l'abscisse x_m , donner une valeur approchée de la dérivée temporelle « discrète » en x_m à l'instant t_n en fonction de $T_{m,n+1}, T_{m,n}$ et Δt .

De même en développant la température au second ordre discret sur l'espace au voisinage de x_{m+1} et x_{m-1} à la date t_n déterminer l'expression approchée de la dérivée seconde spatiale »discrète » en x_m à la date t_n .

En déduire , l'équation de diffusion 1D discrétisée .

A partir de cette relation, écrire la relation de récurrence permettant d'obtenir la température en x_m à l'instant t_{n+1} en fonction des températures en x_m ($T_{m,n}$), en x_{m+1} ($T_{m+1,n}$) et en x_{m-1} ($T_{m-1,n}$) calculées à l'instant antérieur t_n .

Remarque :
Par nature, la méthode exposée ici ne fournit pas exactement la température, mais en donne des valeurs approchées, d'autant plus précises que Δt et Δx sont petits. En particulier, si Δt est trop grand, les erreurs s'amplifient au fil des itérations et on finit par obtenir des résultats absurdes et des températures tendant vers l'infini. On dit dans ce cas que la méthode est instable. On évite cet écueil et on assure la stabilité du schéma numérique, si $\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}<\frac{1}{2}$ ou $\Delta t<\frac{(\Delta x)^2}{2D}$ (condition CFL pour Courant, Friedrichs et Lewy) .
Cette condition résulte d'une subtile étude mathématique mais il est possible de l'interpréter avec un regard de physicien. D'après la loi d'échelle des phénomènes diffusifs, $\frac{(\Delta x)^2}{D}$ représente le temps de diffusion sur la longueur Δx . Le pas de temps Δt doit être inférieur à la moitié du temps de diffusion sur la longueur Δx .
Ici, on choisit Δt égal à 1/10 de $\frac{(\Delta x)^2}{2D}$ (ou Δx légèrement supérieur à $\sqrt{2D\Delta t}$.

3- Analyse et compléments du script :
→ Analyser les premières lignes du script
→ Ligne 18 : définir le vecteur x (numpy) des abscisses comportant n_x valeurs allant de 0 à L .
→Ligne 21 : définir le vecteur initial T des températures comportant n_t valeurs toutes égales à T_1 .
→ Ligne 24 : Définir la fonction Tsta(x) donnant la température T(x) dans la barre, une fois que le régime stationnaire est établi .
→ Ligne 29 à 31 : écrire deux boucles imbriquées permettant de calculer au différents instants la température à l'abscisse x_m à t_{n+1} en fonction de celles à l'instant t_n aux abscisses x_{m+1} , x_m et x_{m-1}

Remarque :
plotlabel="t = %1.0f s"%(n*Deltat) le 1.0f permet de choisir l'écriture de t avec le nombre de chiffre après la virgule avec le type float

4- Exploitation :
→ Lancer le script .
Déterminer un ordre de grandeur du temps au bout duquel le régime stationnaire est atteint .

→ Faire à nouveau les tracés et déterminer le temps d'établissement du régime stationnaire dans le cas où D est 2 fois plus grande .

→ Reprendre la valeur $D=1{,}2.10^{-4} m^2.s^{-1}$, prendre L = 0,5 , lancer les tracés et déterminer le temps d'établissement du régime stationnaire .

A partir de vos résultats, conclure quant à la pertinence de déterminer le temps caractéristique de diffusion à partir de l'équation de diffusion .