Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

Torseur cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

Notions de cinématique

Maths : géométrie vectorielle, intégration, matrice

Objectifs

Calculer/Simplifier/Transporter une matrice d'inertie

Être capable de calculer un torseur cinétique

Mise en situation

On désire calculer les conditions permettant au pilote de réussir son looping. Il faudra donc utiliser le principe fondamental de la dynamique. L'utilisation du principe fondamental de la dynamique nécessite de calculer le torseur dynamique. On verra cependant qu'une étape préalable est le calcul du **torseur cinétique**. Ce torseur, **à ne pas confondre avec le torseur cinématique**, permet de modéliser la vitesse du solide ainsi que la répartition de ses masses.

1 Définition du torseur cinétique

Le torseur cinétique d'un solide S dans un référentiel R, écrit en un point A quelconque, se définit de la manière suivante :

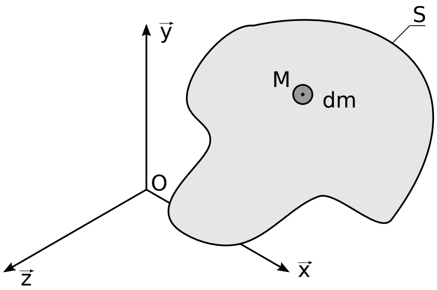
$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{l}\text{Résultante cinétique (ou quantité de mouvement) de } S \text{ par rapport à } R\\ \text{Moment cinétique en } A \text{ de } S \text{ par rapport à } R\end{array}\right.}$$

$$= \underset{A}{\left\{\begin{array}{ll}\overrightarrow{p}_{S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm & \text{en kg.m/s}\\ \overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm & \text{en kg.m}^2\text{/s}\end{array}\right.}$$

Cette formulation ne permet pas de mener des calculs efficaces du fait de la présence des intégrales.

2 Quelques notions autour de la masse des solides

2.1 Définition

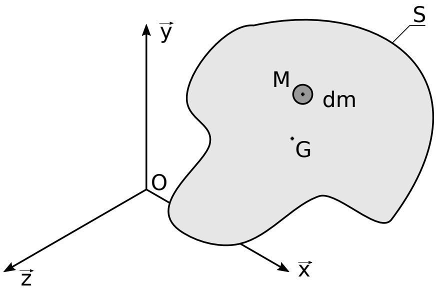


Un système matériel S est constitué d'un ensemble de points M de masse élémentaire dm. La masse m_S de ce système est donc :

$$m_S = \int_{M \in S} dm \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

On calculera souvent la masse infinitésimale dm à partir de la masse volumique du solide considéré notée ρ et son volume infinitésimal dV. On a effectivement $dm = \rho . dV$ avec ρ en kg/m^3.

2.2 Centre d'inertie - centre de gravité



On appelle centre d'inertie (ou centre de gravité) du solide S le point G qui vérifie la relation :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \overrightarrow{0}$$

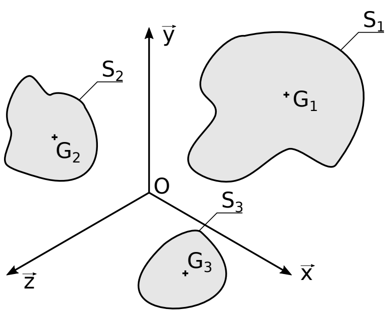
Ou encore :

À retenir

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

Avec O un point quelconque et m la masse du solide.

2.3 Masse d'un ensemble de solides



La masse est additive. Cela signifie que la masse m_Σ de l'ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ s'écrit:

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 + ... \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

Où les m_i sont les masses des solides S_i.

2.4 Barycentre (ou centre de gravité) d'un ensemble de solides

On pourra également calculer le centre d'inertie ou le barycentre, noté G_Σ, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$.

À retenir

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \sum_{i=1}^{\text{nb de solides}} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

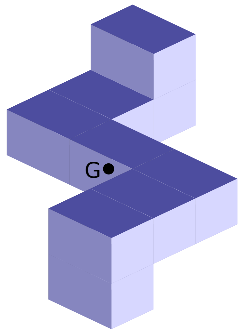
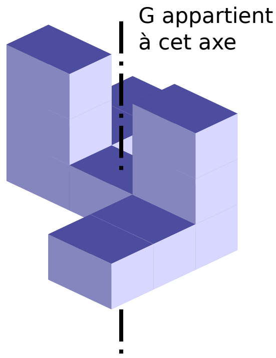
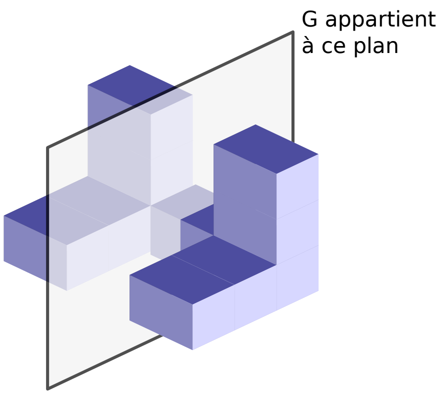
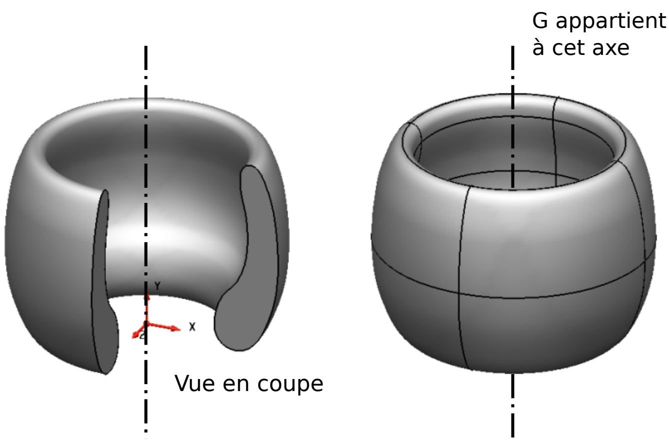
Où les m_i sont les masses des solides S_i de centres d'inertie respectifs G_i.

2.5 Centre d'inertie d'un solide à symétrie matérielle

À retenir

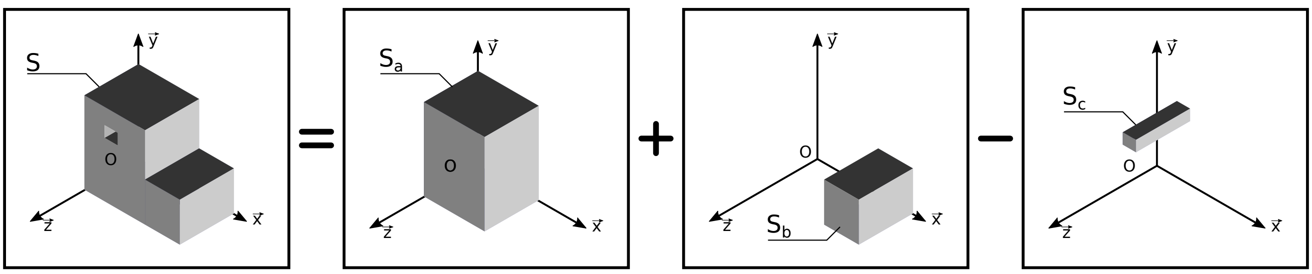
Si le solide présente un élément de symétrie matérielle, alors **le centre de gravité appartient à cet élément de symétrie**.

On parle de symétrie **matérielle** si le solide présente une symétrie géométrique et une symétrie du matériaux.

Point de symétrie	Axe de symétrie
	
Plan de symétrie	**Axe de révolution**
	

2.6 Méthode pour la recherche d'un centre d'inertie

Pour trouver le centre d'inertie d'un solide qui n'a pas de formes élémentaires et de plan de symétrie, il faut décomposer celui-ci. La décomposition doit permettre de déterminer directement la position des centres de gravité de chacun des solides élémentaires. Pour exemple, le solide S ci-dessous a été décomposé en trois solides élémentaires S_a, S_b et S_c. La recherche du centre de gravité pour chacun des trois solides est immédiate. Il ne reste qu'à utiliser la formule du barycentre pour déterminer la position du centre de gravité de l'ensemble.

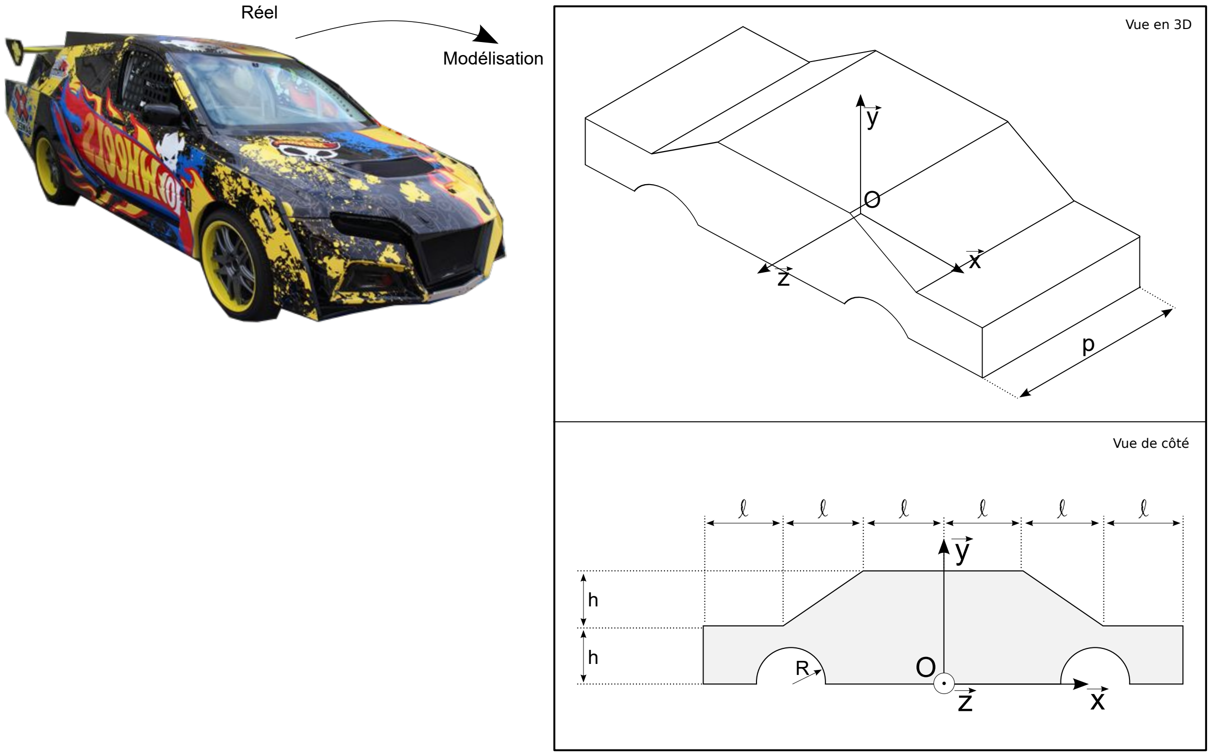


Application : détermination du centre d'inertie du châssis de la voiture

On souhaite déterminer le centre d'inertie G_{Ch} du châssis de la voiture. La géométrie de ce châssis est donnée sur la figure ci-dessous. La géométrie, représentée sur les figures ci-dessous, a volontairement été simplifiée.

On donne également les indications suivantes :

- Le châssis est composé d'un matériau homogène de masse volumique ρ.
- Le centre d'inertie d'un triangle se situe au tiers de chacune de ses hauteurs.
- Le centre d'inertie d'un demi-disque se situe à une distance $\frac{4R}{3\pi}$ de sa base (où R est le rayon du demi-disque.



3 Simplification du torseur cinétique

Le torseur cinétique a déjà été défini dans la partie précédente. Pour un solide S dans un référentiel R, ce torseur s'écrit, en un point A quelconque :

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p}_{S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm \\ \overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}_{M\in S/R}.dm \end{array} \right._{A}$$

3.1 Cas de la résultante

Le plus simple est de partir de la définition du centre d'inertie d'un solide, puis de la dériver par rapport au temps. On obtient ainsi, pour un solide S, de masse m et de centre d'inertie G :

$$\begin{array}{llllll} m\cdot\overrightarrow{OG} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM}\cdot dm & \Rightarrow & m\cdot\dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_R & = & \dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM}\cdot dm\right]_R \\ & & & \Rightarrow & m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_R\cdot dm \\ & & & \Rightarrow & m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\cdot dm \end{array}$$

On obtient donc finalement :

À retenir

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = m\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

- $\overrightarrow{p_{S/R}}$: quantité de mouvement de S par rapport à R en kg.m/s
- m : masse du solide S
- $\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$: vitesse du centre d'inertie appartenant à S par rapport à R

3.2 Cas du moment

Concernant le moment cinétique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\cdot dm &= \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\cdot dm \\ &= \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\cdot dm - \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\cdot dm \\ &= \left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\cdot dm\right)\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm \\ &= m\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm \end{aligned}$$

Le terme de gauche est relativement simple. Pour le terme de droite, la présence de l'intégration laisse présager des calculs laborieux. Les résultats qui suivent seront "admis" d'un point de vue mathématique puisque vous ne maitrisez pas encore les outils nécessaires (cours de maths). Une relecture en fin d'année pourra être bénéfique.

Le terme $\displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$ est une **opération linéaire** (composition d'opérations linéaires : intégration et produit vectoriel). Il est donc possible de l'écrire comme le produit d'une matrice que l'on appellera **matrice d'inertie de S en A** et du vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$. **Cette matrice d'inertie ne dépend que du solide étudié (mais se définit en un point)**. Sachant que cette matrice d'inertie ne dépend que du solide étudié, ce sera donc une donnée du problème (tout comme la masse du solide par exemple). On a donc :

$$\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

On peut donc finalement simplifier l'écriture du moment cinétique :

À retenir

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

- $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}$: moment cinétique en A de S par rapport à R en kg.m^2/s
- $I(A,S)$: matrice d'inertie en A du solide S en kg.m^2
- $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: vitesse de rotation du solide S par rapport à R en rad/s
- $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$: vitesse du point A appartenant à S par rapport à R en m/s

3.3 Récapitulatif

On a donc montré que, pour un solide S de centre d'inertie G dans un référentiel R, le torseur cinétique s'écrit, en un point A quelconque :

À retenir

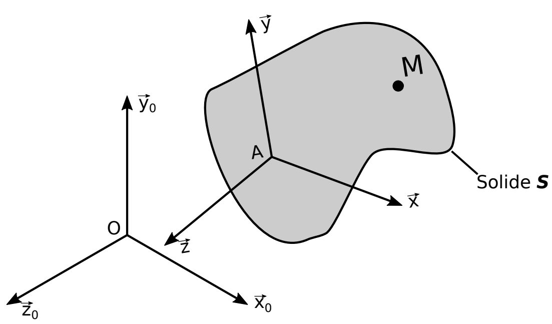
$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{p_{S/R}} & = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} & = I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array}\right.}$$

Ce torseur cinétique possède bien évidement la propriété de transport du torseur, on a donc :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{S/R}}$$

3.4 Méthode calculatoire

On a donc été capable de simplifier l'écriture du torseur cinétique. Cette simplification a cependant fait intervenir la matrice d'inertie dont l'expression reste encore, pour le moment, inconnue. On sait simplement que cette matrice est la représentation d'une application linéaire intervenant dans le calcul du moment cinétique. Il est donc nécessaire de la définir plus en détail.



On considère **dans le repère lié au solide** S : $\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$, il faut donc calculer $\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$. On pourra ensuite identifier $I(A,S)$ sachant que :

$$I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm$$

Commençons les calculs...

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{bmatrix}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \cdot y^2 - \omega_y \cdot x \cdot y - \omega_z \cdot x \cdot z + \omega_x \cdot z^2 \\ \omega_y \cdot z^2 - \omega_z \cdot y \cdot z - \omega_x \cdot x \cdot y + \omega_y \cdot x^2 \\ \omega_z \cdot x^2 - \omega_x \cdot x \cdot z - \omega_y \cdot z \cdot y + \omega_z \cdot y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -x \cdot y & x^2 + z^2 & -y \cdot z \\ -x \cdot z & -y \cdot z & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer :

$$I(A,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \int_{M\in S} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -x \cdot y & x^2 + z^2 & -y \cdot z \\ -x \cdot z & -y \cdot z & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot dm$$

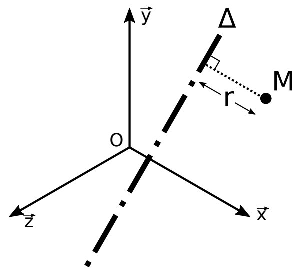
Par identification, on obtient donc l'expression suivante pour la matrice d'inertie :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2 + z^2) \cdot dm & \int_{M\in S} -x \cdot y \cdot dm & \int_{M\in S} -x \cdot z \cdot dm \\ \int_{M\in S} -x \cdot y \cdot dm & \int_{M\in S} (x^2 + z^2) \cdot dm & \int_{M\in S} -y \cdot z \cdot dm \\ \int_{M\in S} -x \cdot z \cdot dm & \int_{M\in S} -y \cdot z \cdot dm & \int_{M\in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

3.5 Méthode par passage à la limite

3.5.1 Moment d'inertie d'un point matériel par rapport à un axe

On considère ici un point matériel M, de masse m et un axe quelconque Δ. Le point M est situé à une distance r de l'axe Δ.



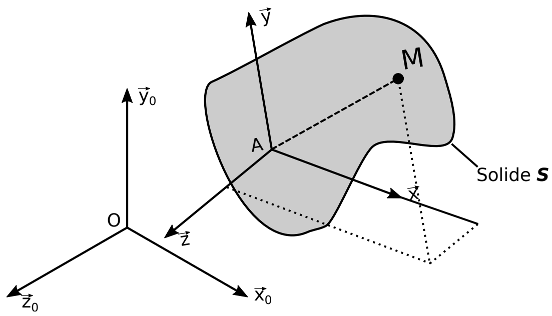
Le moment d'inertie de ce point matériel autour de l'axe Δ est noté :

$$I_{\Delta}(M) = m \cdot r^2$$

Une première interprétation physique est possible. Lorsqu'un point matériel est en mouvement rectiligne, on comprend bien que plus sa masse est importante plus il sera difficile de l'accélérer ou de le freiner. Lorsque ce point matériel est maintenant en rotation autour d'un axe, si on souhaite l'accélérer ou le freiner, on comprend également que d'une part sa masse intervient mais également l'écartement entre l'axe de rotation et la position de la masse. C'est donc bien la rotation éventuelle des solides qui impose d'introduire ce concept de moment d'inertie.

3.5.2 Matrice d'inertie

Dans le cas général, le solide en mouvement peut tourner autour des trois axes de l'espace. C'est cela qui nécessite d'introduire la notion de matrice d'inertie. Considérons maintenant que le point M, de masse élémentaire dm, soit de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, cela signifie donc que $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{x} + y \cdot \overrightarrow{y} + z \cdot \overrightarrow{z}$.



On peut donc définir les différents moments d'inertie en calculant la distance de la masse à l'axe considéré :

- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{x})$: $dA = dm \cdot$ ....
- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{y})$: $dB = dm \cdot$ ....
- Moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{z})$: $dC = dm \cdot$ ....

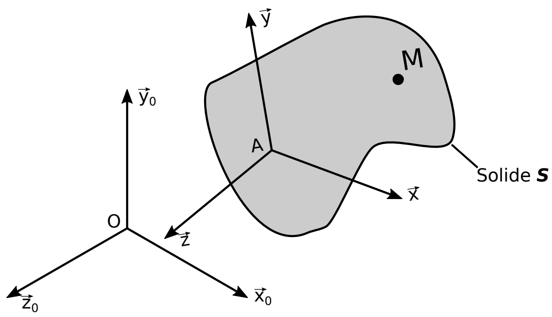
Il sera aussi nécessaire d'introduire les produits d'inertie (dont le sens physique est plus difficile à saisir) :

- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{y})$ et $(O, \overrightarrow{z})$: $dD = dm \cdot y \cdot z$
- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{z})$: $dE = dm \cdot x \cdot z$
- Produit d'inertie de la masse M par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{y})$: $dF = dm \cdot x \cdot y$

La matrice d'inertie de M, en A, dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ se définit donc de la manière suivante :

$$I(A, M) = \begin{bmatrix} dA & -dF & -dE \\ -dF & dB & -dD \\ -dE & -dD & dC \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

3.5.3 Matrice d'inertie d'un solide



Pour obtenir les éléments de la matrice d'inertie en A pour le solide S, il suffit de passer à la limite en considérant que le solide est composé d'une infinité de points M, de masse élémentaire dm. On a donc :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Avec :

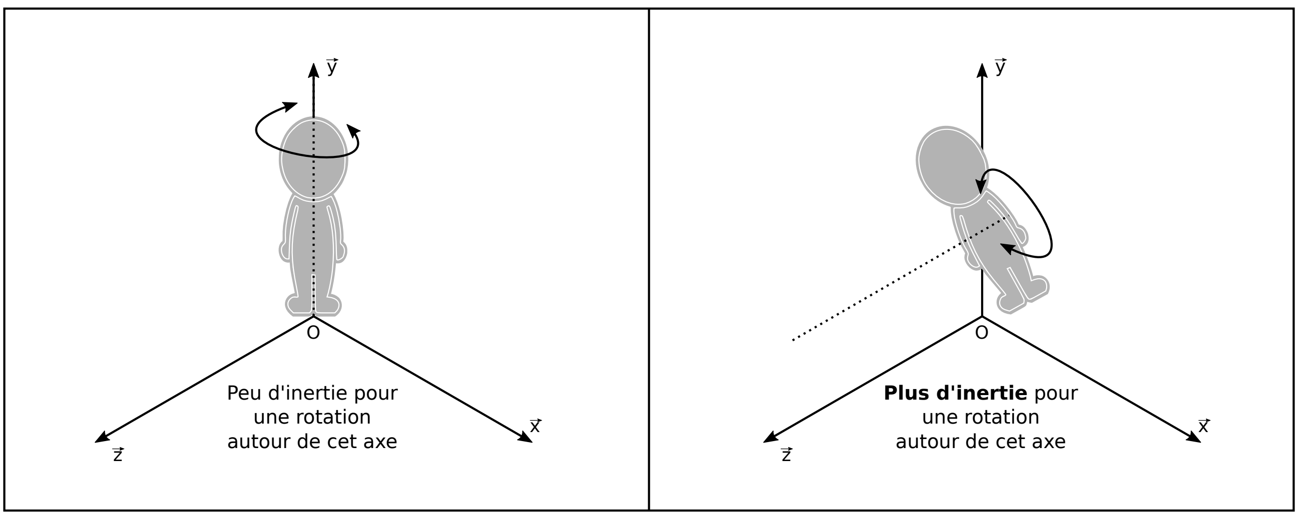
$$A = \int_{M\in S} (y^z + z^2)\cdot dm \quad B = \int_{M\in S} (x^z + z^2)\cdot dm \quad C = \int_{M\in S} (x^z + y^2)\cdot dm \tag{1}$$

$$D = \int_{M\in S} y\cdot z\cdot dm \qquad E = \int_{M\in S} x\cdot z\cdot dm \qquad F = \int_{M\in S} x\cdot y\cdot dm \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

3.6 Récapitulatif

La matrice d'inertie permet de prendre en compte le caractère inertiel des solides lorsque ces derniers sont en rotation. **La masse et la répartition de celle-ci ont une influence sur l'inertie en rotation.** Il s'agit bien d'une matrice puisqu'il peut y avoir trois rotations dans l'espace. Par exemple, il est plus simple de faire un tour sur soi-même qu'un salto. Cela s'explique simplement par le fait qu'à masse égale, votre masse est plutôt répartie sur une ligne verticale (voir figure ci-dessous).



À retenir

....

....

....

Cette matrice représente la masse du solide mais aussi la répartition de la masse (c'est un calcul intégral). Cette matrice sera donc une donnée du problème. Elle est quasi-toujours donnée dans une base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ qui est associée au solide considéré. Elle sera souvent exprimée de la manière suivante :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Avec :

A : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{x})$
B : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{y})$
C : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{z})$

D : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{y})$ et $(A, \overrightarrow{z})$
E : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(A, \overrightarrow{z})$
F : Produit d'inertie par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{x})$ et $(A, \overrightarrow{y})$

L'unité des moments d'inertie, des produits d'inertie (et donc de la matrice d'inertie) est le $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

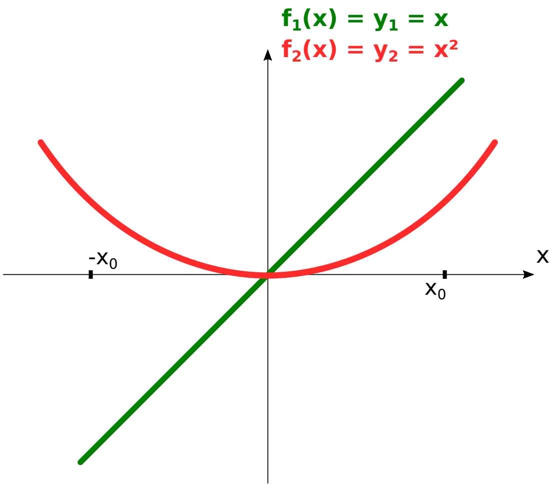
La notion de "moment" d'inertie n'a rien à voir avec la notion de "moment" dans un torseur.

Et c'est quoi 1 kg.m^2 ?

4 Quelques notions autour de la matrice d'inertie

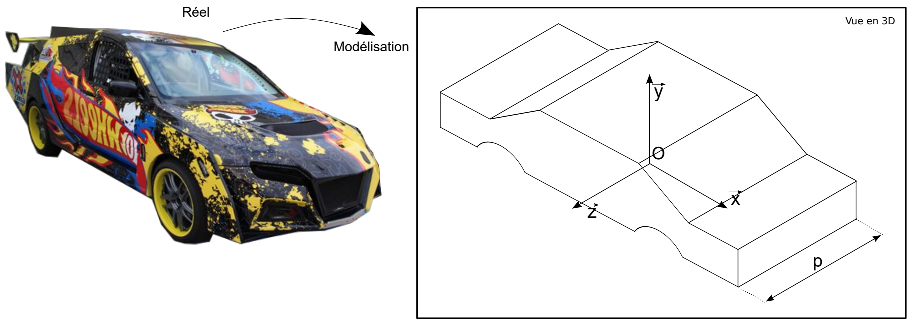
4.1 Simplification de la matrice d'inertie

4.1.1 Petit rappel de mathématiques



4.1.2 Symétrie par rapport à un plan

On considère ici le châssis de la voiture. On cherche à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).

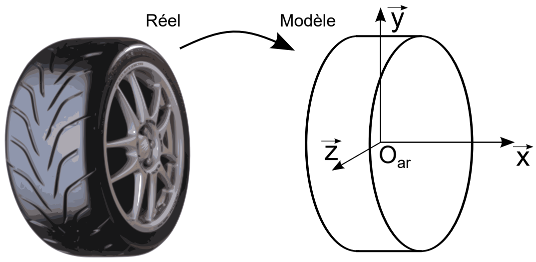


On sait que :

$$I(O,Ch) = \begin{bmatrix} \int_{M\in Ch}(y^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in Ch}-x\cdot y\cdot dm & \int_{M\in Ch}-x\cdot z\cdot dm \\ \int_{M\in Ch}-x\cdot y\cdot dm & \int_{M\in Ch}(x^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in Ch}-y\cdot z\cdot dm \\ \int_{M\in Ch}-x\cdot z\cdot dm & \int_{M\in Ch}-y\cdot z\cdot dm & \int_{M\in Ch}(x^2+y^2)\cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4.1.3 Symétrie par rapport à un axe de révolution

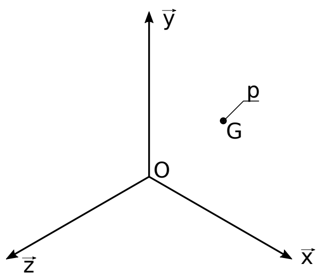
On considère ici une des roues de la voiture. On cherche toujours à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).



On sait que :

$$I(O_{ar},R_{ar}) = \begin{bmatrix} \int_{M\in R_{ar}}(y^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} -x\cdot y\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} -x\cdot z\cdot dm \\ \int_{M\in R_{ar}} -x\cdot y\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}}(x^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} -y\cdot z\cdot dm \\ \int_{M\in R_{ar}} -x\cdot z\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}} -y\cdot z\cdot dm & \int_{M\in R_{ar}}(x^2+y^2)\cdot dm \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

4.2 Matrice d'un point matériel



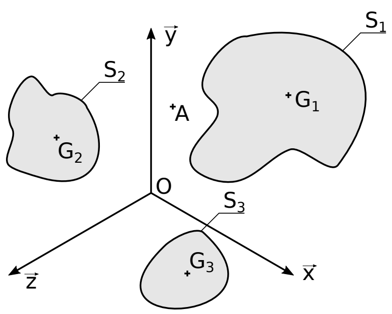
Soit un point matériel, noté p, de masse m et de centre d'inertie G.

À retenir

$$I(G,p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Attention, la matrice n'est nulle qu'au centre d'inertie !

4.3 Matrice d'un solide composé de plusieurs pièces



On pourra calculer la matrice d'inertie, $I(A,\Sigma)$, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ au point A en additionnant les matrices d'inertie de chacun des solides.

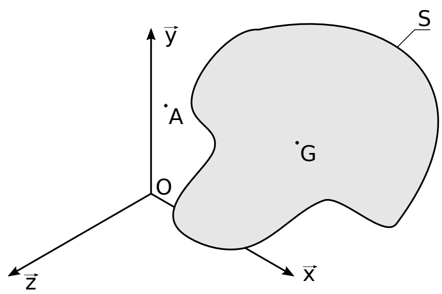
À retenir

$$I(A,\Sigma) = I(A,S_1) + I(A,S_2) + I(A,S_3) + ...$$

Bien entendu, il faut que les points soient les mêmes et que les bases de calcul soient les mêmes également.

4.4 Théorème de Huygens

Ce théorème permet de changer le point d'écriture de la matrice. Plus exactement, **il permet de passer du centre d'inertie G d'un solide S à un autre point A quelconque.**



La plupart du temps, compte-tenu des symétries, on vous donnera la matrice au centre d'inertie :

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Pour obtenir $I(A,S)$, il faut utiliser le théorème de Huygens :

À retenir

$$I(A,S) = I(G,S) + I(G \to A,S)$$

Avec :

- $I(A,S)$: la matrice d'inertie en A du solide S ;
- $I(G,S)$: la matrice d'inertie en G du solide S ;
- $I(G \to A,S)$: la matrice de transfert de masse du point G vers le point A. Cette matrice est la matrice d'inertie, écrite en A, du point matériel G associé à la masse du solide m.

Il faut commencer par calculer les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{GA} = (x_A - x_G) \cdot \vec{x} + (y_A - y_G) \cdot \vec{y} + (z_A - z_G) \cdot \vec{z} = x_{GA} \cdot \vec{x} + y_{GA} \cdot \vec{y} + z_{GA} \cdot \vec{z}$$

Où x_A, y_A, ... sont les coordonnées des points A et G dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et x_{GA}, y_{GA} et z_{GA} sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GA}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On a ensuite :

À retenir

$$I(G \to A,S) = m \cdot \begin{bmatrix} y_{GA}^2 + z_{GA}^2 & -x_{GA} \cdot y_{GA} & -x_{GA} \cdot z_{GA} \\ -x_{GA} \cdot y_{GA} & x_{GA}^2 + z_{GA}^2 & -y_{GA} \cdot z_{GA} \\ -x_{GA} \cdot z_{GA} & -y_{GA} \cdot z_{GA} & x_{GA}^2 + y_{GA}^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Attention !

Cette relation n'est valable que si G est le centre d'inertie de la pièce.

Les matrices doivent être exprimées dans la même base.

4.5 Application : calcul de la matrice d'inertie de l'ensemble {châssis, moteur}

On donne, en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$:

- la matrice d'inertie du châssis en G_{Ch}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Ch}}(Ch) \approx \begin{bmatrix} 415 & 0 & 0 \\ 0 & 1350 & 0 \\ 0 & 0 & 1247 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

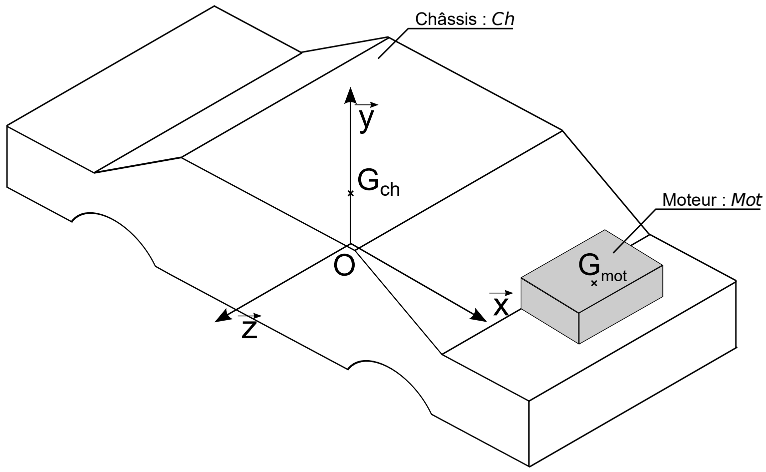
- la matrice d'inertie du moteur en G_{Mot}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Mot}}(Mot) \approx \begin{bmatrix} 650 & 0 & 0 \\ 0 & 520 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On donne également, en mètres, les coordonnées des points G_{Ch} et G_{Mot}, dans le repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

$$\overrightarrow{OG_{Mot}} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OG_{Ch}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.85 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

Le châssis a une masse $m_{Ch} \approx 815$ kg et le moteur a une masse $m_{Mot} \approx 510$ kg.



Calculer la matrice $I_{G_{Ch}}(\{Ch, Mot\})$.