Centre d'intérêt 1

Géométrie des masses

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

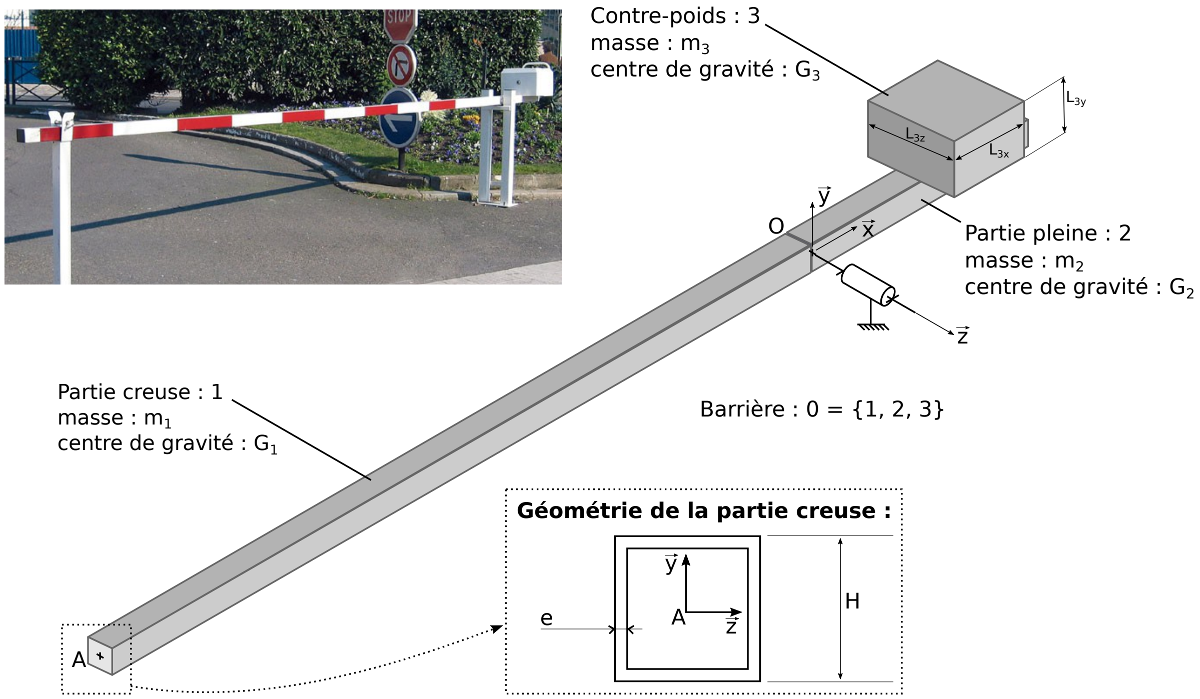
Cours sur la géométrie des masses

Objectifs

Savoir localiser un centre d'inertie

Savoir simplifier une matrice d'inertie

1 Barrière manuelle ★



L'objet de cet exercice est une barrière manuelle. La finalité du problème est de dimensionner le contre-poids (noté 3) afin de limiter l'effort à exercer pour lever la barrière.

La géométrie de la barrière est donnée sur le schéma ci-dessus. L'ensemble des pièces de la barrière sont en acier. On donne en complément le paramétrage suivant :

- $L_1 = 9$ m, la longueur de la partie creuse de la barrière ;
- $L_2 = 1$ m, la longueur de la partie pleine de la barrière ;
- L_{G_1}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_1}.\overrightarrow{x} = -L_{G_1}$;
- L_{G_2}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_2}.\overrightarrow{x} = L_{G_2}$;
- L_{G_3}, la longueur telle que $\overrightarrow{OG_3}.\overrightarrow{x} = L_{G_3}$;

- $\rho = 7800$ kg/m^3, la masse volumique de l'acier.

Question 1. Déterminer L_{G_1} et L_{G_2} en fonction de L_1 et L_2.

Question 2. Déterminer les masses m_1, m_2 et m_3 en fonction des paramètres géométriques et de la masse volumique.

Le cahier des charges impose que le centre de gravité G de la barrière complète vérifie $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{x} = -L_G$ où $L_G = 30$ cm.

Question 3. Commenter cette exigence puis exprimer L_G en fonction des données du problème.

Question 4. On fixe arbitrairement $L_{G_3} = 0.5$ m. Déterminer m_3 pour respecter la contrainte $L_G = 30$ cm. Faire l'application numérique avec $H = 10$ cm et $e = 2$ mm.

Question 5. Déterminer L_3 en supposant que $L_3 = L_{3x} = L_{3y} = L_{3z}$.

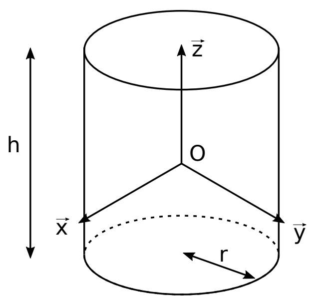
Question 6. Donner la forme de la matrice d'inertie du solide $\{1, 2, 3\}$ au point O.

2 Dimensionnement d'une roue de vélo ★

On souhaite expliquer qualitativement pourquoi plusieurs types de roues existent. Pour des courses en montagnes, des roues à jantes basses sont privilégiés (jantes de 35 mm). Par contre, dans les épreuves de contre-la-montre, les cyclistes favorisent des roues pleines. Un compromis, sur des courses vallonnées, est l'utilisation de roues avec des hauteur de jante importante (80 mm).

De gauche à droite : roue pleine, roue de 80 mm et roue de 35 mm

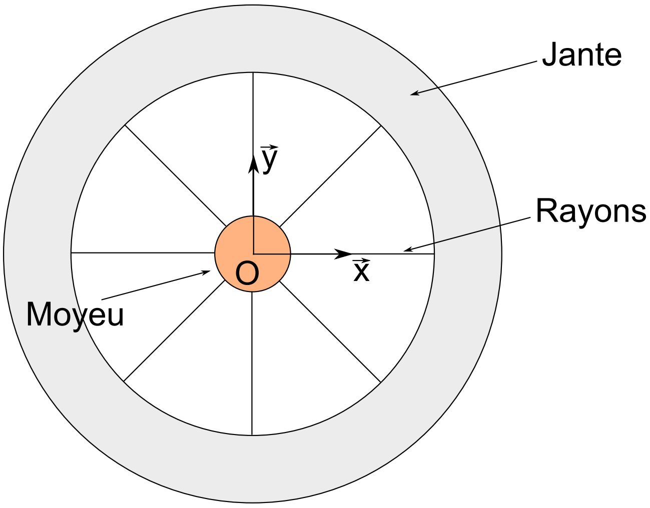
On donne ci-dessous la matrice d'inertie d'un cylindre d'épaisseur h et de rayon r.



$$I(O, cylindre) = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} 3r^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6r^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

Question 1. Justifier la forme de la matrice d'inertie donnée ci-dessus.

On propose la modélisation suivante :



La roue est composée de trois éléments :

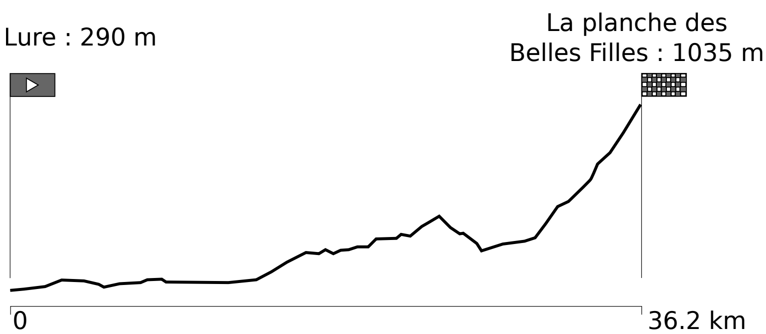
- La jante
  - Rayon extérieur fixe r_e
  - Rayon intérieur variable r_i
  - Masse M_j
  - Masse volumique ρ_j
  - Épaisseur e_j
- Les rayons (négligés)
- Le moyeu
  - Rayon extérieur fixe r_m
  - Masse M_m
  - Masse volumique ρ_m
  - Épaisseur e_m

Question 2. Donner la matrice d'inertie et la masse de la roue complète au point O.

Question 3. Dans les épreuves de montagnes, on souhaite minimiser la masse de la roue. Quel doit être la hauteur de jante dans ces cas-là ?

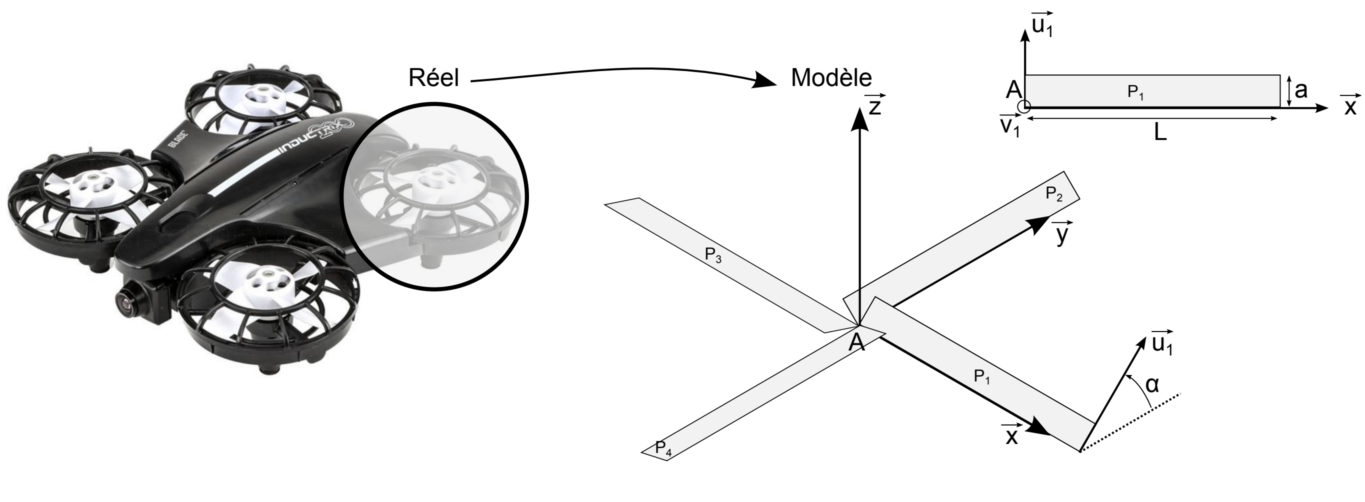
Question 4. Dans les épreuves de contre-la-montre, on souhaite maximiser l'inertie de la roue. Quel doit être la hauteur de jante dans ces cas-là ?

Question 5. Une épreuve de contre-la-montre reliera Embrun à Chorges. La dénivellation du parcours est donnée ci-dessous. Quel type de roue proposeriez-vous à vos coureurs ?



3 Rotor de drone ★

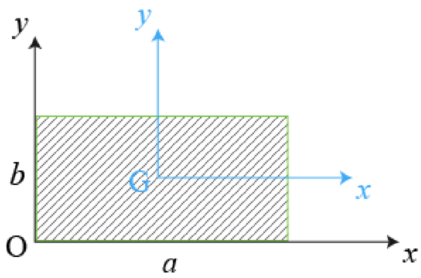
On s'intéresse ici à un rotor de drone. Dans un premier temps, on peut considérer que ce rotor est composé de quatre pâles rigides décalées de 90°et inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontal. On note $\alpha = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u_1}) = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v_1})$.



Chacune de ces pâles est considérée comme d'épaisseur négligeable et de masse M. Sa géométrie est donnée sur la figure ci-dessus.

Objectif : On souhaite réaliser différentes gammes de drones. Une des gammes viserait la communauté du modélisme. Dans ces cas-là, un drone maniable est nécessaire pour réaliser des acrobaties. Une seconde gamme viserait la communauté de la photographie. Ici, on préfèrera utiliser un drone stable pour obtenir une bonne image à partir de l'appareil photo embarqué sur le drone. On s'intéressera uniquement à l'influence de la longueur de la pâle.

Des recherches bibliographiques ont permis d'obtenir la matrice d'inertie d'une plaque d'épaisseur négligeable en son centre de gravité.



$$I_G(Plaque) = \begin{bmatrix} \frac{Mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Question 1. Déterminer la matrice d'inertie de la pâle P_1 au point A dans la base $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})$.

Question 2. Calculer la matrice d'inertie de l'ensemble de l'hélice complète (i.e. les 4 pâles) au point A dans le cas où $\alpha \approx 0°$.

Question 3. Conclure quant à l'objectif du problème.