Équilibrage des solides en rotation

① Je note : $\{0 \xrightarrow{O} 1\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \xrightarrow{O} 1} = X_0 \cdot \vec{x_0} + Y_0 \cdot \vec{y_0} + Z_0 \cdot \vec{z_0} \\ \vec{M}_{O, 0 \xrightarrow{O} 1} = \vec{0} \end{array} \right._O$

$\{0 \xrightarrow{A} 1\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \xrightarrow{A} 1} = Y_A \cdot \vec{y_0} + Z_A \cdot \vec{z_0} \\ \vec{M}_{A, 0 \xrightarrow{A} 1} = \vec{0} \end{array} \right._A$

② J'isole l'ensemble $\{1,2\}$ qui est soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{A} 1$
- $0 \xrightarrow{O} 1$
- pds $\rightarrow 1$
- pds $\rightarrow 2$
- courroie $\rightarrow$ poulie (1)

J'écris le principe fondamental de la dynamique sous forme torsorielle :

$$\{0 \xrightarrow{A} 1\} + \{0 \xrightarrow{O} 1\} + \{pds \rightarrow 1\} + \{pds \rightarrow 2\} + \{courroie \rightarrow 1\} = \{\mathcal{D}_{\{1,2\}/0}\}$$

Je vais écrire tous les torseurs au point O.

- $\vec{M}_{O, 0 \xrightarrow{A} 1} = \cancel{\vec{M}_{A, 0 \xrightarrow{A} 1}} + \overbrace{\vec{OA}}^{= -a \cdot \vec{x_0}} \wedge (Y_A \cdot \vec{y_0} + Z_A \cdot \vec{z_0})$
$= -a \cdot Y_A \cdot \vec{z_0} + a \cdot Z_A \cdot \vec{y_0}$

- $\vec{M}_{O, pds \rightarrow 1} = \cancel{\vec{M}_{G_1, pds \rightarrow 1}} + \overbrace{\vec{OG_1}}^{= -d \cdot \vec{x_0}} \wedge (-m_1 \cdot g \cdot \vec{y_0}) = d \cdot m_1 \cdot g \cdot \vec{z_0}$

- $\vec{M}_{O, pds \rightarrow 2} = \cancel{\vec{M}_{G_2, pds \rightarrow 2}} + \underbrace{\vec{OG_2}}_{= (b+h) \cdot \vec{x_0} + e \cdot \vec{z_2}} \wedge (-m_2 \cdot g \cdot \vec{y_0})$
$= -(b+h) \cdot m_2 \cdot g \cdot \vec{z_0} + e \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{x_0}$

$\vec{z_2} \wedge \vec{y_0} = \sin(-\alpha - \theta - \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{x_0}$
$= -\cos(\alpha + \theta) \cdot \vec{x_0}$

- $\vec{M}_{O, c \rightarrow 1} = \vec{M}_{G_1, c \rightarrow 1} + \vec{OG_1} \wedge \vec{0} = C_m \cdot \vec{x_0}$

- $\{\mathcal{D}_{\{1,2\}/0}\} = \{\mathcal{D}_{1/0}\} + \{\mathcal{D}_{2/0}\}$

▲ $\vec{Rd}_{1/0} = m_1 \cdot \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} = \vec{0}$

$\blacktriangle\ \vec{\delta}_{O,1/0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{O,1/0}\right]_0 + m_1 \cdot \underbrace{\vec{V}_{O/0}}_{=\vec{0}} \wedge \underbrace{\vec{V}_{G_1\in 1/0}}_{=\vec{0}}$

et $\vec{\sigma}_{O,1/0} = I_O(1)\cdot\vec{\Omega}_{1/0} + m_1\cdot\vec{OG_1}\wedge \underbrace{\vec{V}_{O\in 1/0}}_{=\vec{0}}$

$$= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0\\ 0 & ? & ?\\ 0 & ? & ?\end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} I_1\cdot\dot\theta\\0\\0\end{bmatrix}_1$$

$= I_1\cdot\dot\theta\cdot\vec{x}_{10}$

Comme $\dot\theta = \omega = cste$, on a : $\vec{\delta}_{O,1/0} = \vec{0}$.

$\blacktriangle\ \vec{Rd}_{2/0} = m_2\cdot\vec{\Gamma}_{G_2\in 2/0} = m_2\cdot\frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G_2\in 2/0}\right]_0$

où $\vec{V}_{G_2\in 2/0} = \underbrace{\vec{V}_{G_2\in 2/1}}_{=\vec{0}} + \vec{V}_{G_2\in 1/0}$ car liaison encastrement

$= \cancel{\vec{V}_{B\in 1/0}} + \vec{G_2B}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$

$= -(h\cdot\vec{x_0} + \ell\cdot\vec{z_2})\wedge(\dot\theta\cdot\vec{x}_{012})$

$= -\ell\cdot\dot\theta\cdot\vec{y_2}$

et $\left.\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_0 = \cancel{\left.\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_2} + \vec{\Omega}_{2/0}\wedge\vec{y_2} = \dot\theta\cdot\vec{x}_{012}\wedge\vec{y_2} = \dot\theta\cdot\vec{z_2}$

$(= \cancel{\vec{\Omega}_{2/1}} + \vec{\Omega}_{1/0}$

donc $\vec{Rd}_{2/0} = -m_2\cdot\ell\cdot\dot\theta^2\cdot\vec{z_2}$ $\quad(\dot\theta = cste)$

$\blacktriangle\ \vec{\delta}_{O,2/0} = \vec{\delta}_{B,2/0} + \vec{OB}\wedge\vec{Rd}_{2/0}$

$\vec{\delta}_{B,2/0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{B,2/0}\right]_0 + m_2\cdot\underbrace{\vec{V}_{B/0}}_{=\vec{0}}\wedge\vec{V}_{G_2\in 2/0}$ $\qquad \vec{\Omega}_{2/0} = \dot\theta\cdot\vec{x}_{012}$

et $\vec{\sigma}_{B,2/0} = I_B(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0} + m_2\cdot\vec{BG_2}\wedge\underbrace{\vec{V}_{B\in 2/0}}_{=\vec{0}}$

$$= \begin{bmatrix}A & -F & -E\\ -F & B & -D\\ -E & -D & C\end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{bmatrix}_2 = A\cdot\dot\theta\cdot\vec{x}_{20} - F\cdot\dot\theta\cdot\vec{y_2} - E\cdot\dot\theta\cdot\vec{z_2}$$

et $\left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_0 = -\dot\theta\cdot\vec{y_2}$

donc $\vec{\delta}_{B,2/0} = -F\cdot\dot\theta^2\cdot\vec{z_2} + E\cdot\dot\theta^2\cdot\vec{y_2}$

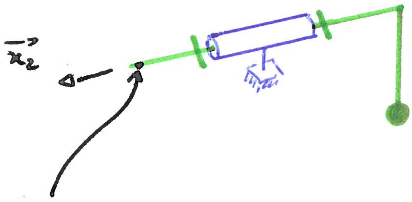
- $\vec{OB} \wedge \vec{Rd}_{2/0} = b.\vec{x}_{02} \wedge (-m_2.\rho.\dot{\theta}^2.\vec{z_2})$

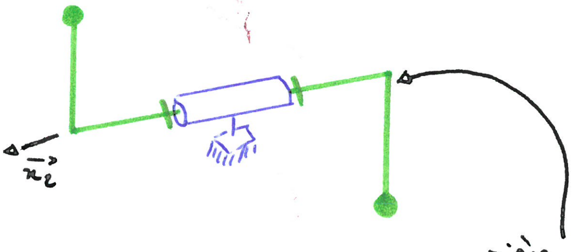
$= b.\rho.m_2.\dot{\theta}^2.\vec{y_2}$

donc $\vec{\delta}_{0,2/0} = E.\dot{\theta}^2.\vec{y_2} - F.\dot{\theta}^2.\vec{z_2} + b.\rho.m_2.\dot{\theta}^2.\vec{y_2}$

Pour obtenir les équat° proposées, il faut encore projeter $\vec{y_2}$ et $\vec{z_2}$ dans la base 0. On a en effet
$$\left| \begin{array}{l} \vec{y_2} = \cos(\alpha+\theta).\vec{y_0} + \sin(\alpha+\theta).\vec{z_0} \\ \vec{z_2} = -\sin(\alpha+\theta).\vec{y_0} + \cos(\alpha+\theta).\vec{z_0} \end{array} \right.$$

③ Équilibrage statique : il faut que le centre de gravité de la pièce soit situé sur l'axe de rotation.





pièce non-équilibrée en statique

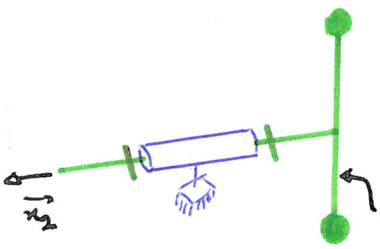
pièce équilibrée en statique mais pas en dynamique

Équilibrage dynamique : il faut que :

- la pièce soit équilibrée en statique,
- l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie pour la pièce, c'est-à-dire que la matrice d'inertie de la pièce soit de la forme :

$$I_B(2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})}$$

$(B, \vec{x_2})$ est l'axe de rotation.



pièce équilibrée en dynamique.

④ Pour trouver ρ et α, on écrit :

(1) $Z_A(0) + Z_0(0) = -m_2.\rho.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha)$

(2) $Z_A(\frac{\pi}{2}) + Z_0(\frac{\pi}{2}) = -m_2.\rho.\dot{\theta}^2.\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = m_2.\rho.\dot{\theta}^2.\sin\alpha$

$(1)^2 + (2)^2$ donne : $[Z_A(0) + Z_0(0)]^2 + [Z_A(\frac{\pi}{2}) + Z_0(\frac{\pi}{2})]^2 = m_2^2.\rho^2.\dot{\theta}^4$

$\rightarrow$ on en déduit ρ.

$\frac{(2)}{(1)}$ donne : $\dfrac{Z_A(\pi/2)+Z_0(\pi/2)}{Z_A(0)+Z_0(0)} = -\tan\alpha$ → on en déduit α.

Pour trouver E et F, on écrit:

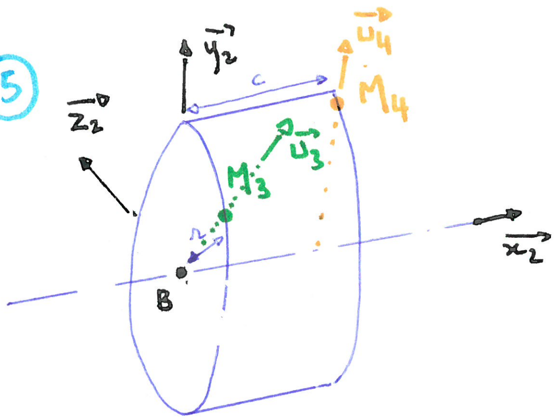
(3) $a\cdot Z_A(0) = F\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\alpha + E\cdot\dot{\theta}^2\cdot\cos\alpha + b\cdot\rho\cdot m_2\cdot\dot{\theta}^2\cdot\cos\alpha$

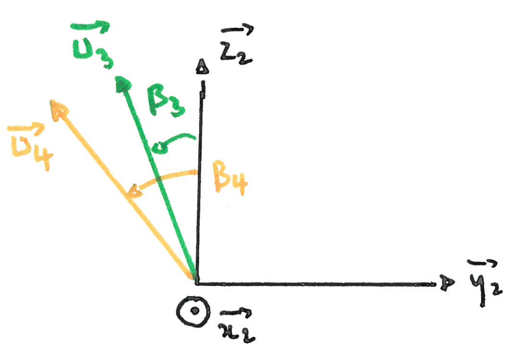
(4) $a\cdot Z_A(\pi/2) = F\cdot\dot{\theta}^2\cdot\cos\alpha - E\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\alpha - b\cdot\rho\cdot m_2\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\alpha$

(3).$\cos\alpha$ − (4).$\sin\alpha$ permet de déterminer E.

(3).$\sin\alpha$ + (4).$\cos\alpha$ " " " F.

5





6 7 8 • La roue est équilibrée en statique si $\vec{BG}_{roue}\cdot\vec{y_2} = 0$

et $\vec{BG}_{roue}\cdot\vec{z_2} = 0$

Avec $\vec{BG}_{roue} = \dfrac{1}{m_2+m_3+m_4}\cdot\left[m_2\cdot\vec{BG_2} + m_3\cdot\vec{BM_3} + m_4\cdot\vec{BM_4}\right]$

Il faut donc: $m_3\cdot\sin\beta_3 + m_4\cdot\sin\beta_4 = 0$ (a)

et $m_2\cdot\ell + m_3\cdot r\cdot\cos\beta_3 + m_4\cdot r\cdot\cos\beta_4 = 0$ (b)

• Il faut aussi que $I_B(roue) = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}_2$

Avec $I_B(roue) = I_B(2) + I_B(3) + I_B(4)$

↳ connu

Et $I_B(3) = \underbrace{I_{M_3}(3)}_{} + I_{M_3\to B}(3)$

" 0 car masse ponctuelle : pas d'inertie en rotation.

$\vec{BM_3} = r\cdot\vec{U_3} = -r\cdot\sin\beta_3\cdot\vec{y_2} + r\cdot\cos\beta_3\cdot\vec{z_2}$

donc $I_B(3) = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}_2$

$$I_B(4) = \underbrace{I_{M_4}(4)}_{=0} + I_{M_4 \to B}(4)$$

$$\overrightarrow{BM_4} = c.\vec{x_2} - r.\sin\beta_4.\vec{y_2} + r.\cos\beta_4.\vec{z_2}$$

donc $I_B(4) = \begin{bmatrix} ? & +m_4.c.r.\sin\beta_4 & -m_4.c.r.\cos\beta_4 \\ & ? & ? \\ \text{SYM} & & ? \end{bmatrix}_2$

Il faut donc : $-F + m_4.c.r.\sin\beta_4 = 0$ (c)

et $-E - m_4.c.r.\cos\beta_4 = 0$ (d)

→ $\tan\beta_4 = -\frac{F}{E}$ donc $\beta_4 \simeq 25{,}3°$

→ $m_4 = \frac{1}{c.r.\sin\beta_4}.F \simeq 77\ g$

→ $\tan\beta_3 = \frac{r.m_4.\sin\beta_4}{m_2.\ell + m_4.r.\cos\beta_4}$ donc $\beta_3 \simeq 14{,}3°$

→ $m_3 = -m_4.\frac{\sin\beta_4}{\sin\beta_3} \simeq -132\ g$

Il y a deux méthodes pour équilibrer la roue :

($m_4 > 0$) • rajouter de la matière,

($m_3 < 0$) • enlever de la matière.