Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

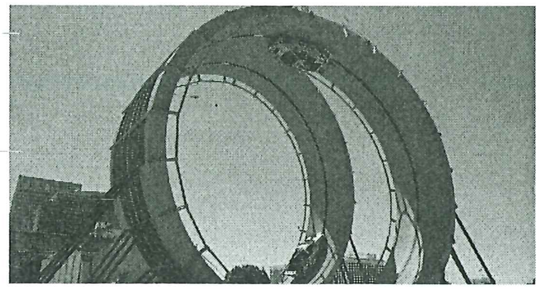
Principe fondamental de la dynamique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis
- Torseurs cinétiques
- Torseurs dynamiques

Objectifs
- Être capable d'appliquer le principe fondamental de la dynamique

Rappel



On désire calculer les conditions permettant au pilote de réussir son looping. On a déjà montré que l'utilisation du principe fondamental de la dynamique était indispensable à la résolution du problème.
Une première étape a été d'introduire le torseur cinétique puis le torseur dynamique. Maintenant, il est nécessaire de poser le principe fondamental de la dynamique.

1 Énoncé du principe

Dans un repère Galiléen R, le torseur des actions mécaniques appliquées à un ensemble de solides (E) est égale au torseur dynamique de cet ensemble de solides dans son mouvement par rapport à R.

$$\sum\{ext \rightarrow E\} \quad = \quad \{\mathcal{D}_{E/R}\}$$

Cette égalité est une égalité **torsorielle.** À partir de ce principe, il est donc possible d'écrire les deux théorèmes suivants :

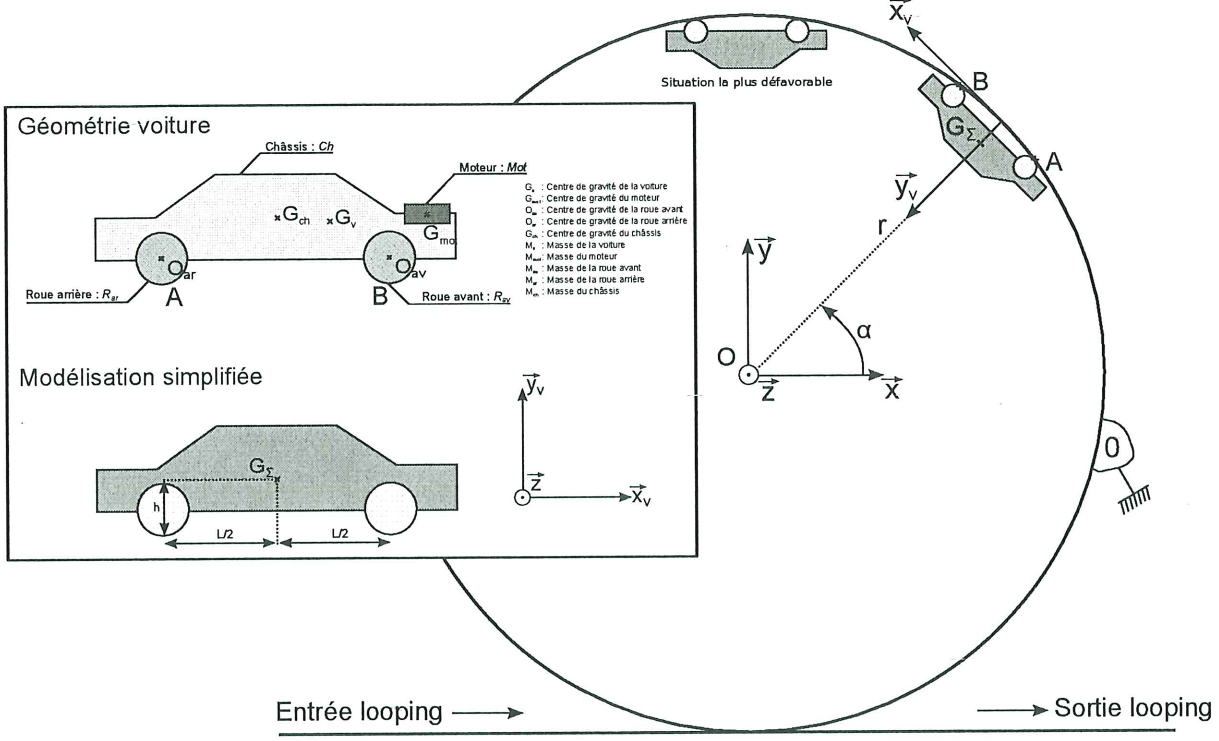
Théorème de la résultante dynamique : $\sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} = \vec{R_d}_{E/R}$

Théorème du moment dynamique en A : $\sum \vec{M}_{A, ext \rightarrow E} = \vec{\delta}_{A, E/R}$

La plupart du temps, on préfèrera travailler sur une **équation scalaire.** On écrira donc l'un de ces deux théorèmes en projection sur une direction particulière.

2 Première application

Résolution du problème : la voiture peut-elle faire le tour du looping ?



Hypothèses :

- La voiture complète, notée Σ, est composée de son châssis, de ses roues et de son moteur. Elle est, dans le pire des cas, en haut du looping. La structure fixe du looping est notée 0.
- La voiture complète a une masse $M = 1360$ kg. On suppose que le centre de gravité de l'ensemble est G_Σ. L'inertie et la masse des roues sont négligées. La matrice d'inertie de l'ensemble $V = \{\text{châssis}, \text{moteur}\}$ est la suivante :

$$I(G_\Sigma, V) = \begin{bmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & B_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_v}, \overrightarrow{y_v}, \overrightarrow{z})}$$

- On considère que l'ensemble V se déplace à une vitesse constante v dans le looping et que son torseur cinématique est le suivant :

$$\{\mathcal{V}_{V/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{V/0}} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{V_{G_\Sigma \in V/0}} = v\overrightarrow{x_v} \end{array} \right._{G_\Sigma} \qquad \text{avec} \qquad \dot{\alpha} = \frac{v}{r}$$

- $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{x_v}$; $\overrightarrow{AG_\Sigma} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} + h\overrightarrow{y_v}$; $\overrightarrow{G_\Sigma B} = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_v} - h\overrightarrow{y_v}$
- On considère des contacts ponctuels unilatéraux au niveau des contacts roue/sol. Compte-tenu du rayon important du looping, on considère que ces liaisons ponctuelles sont de normale $\overrightarrow{y_v}$. On aura donc :

$$\{0 \xrightarrow{A} \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{0 \xrightarrow{A} \Sigma} = Y^A_{0\Sigma}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M}_{A,0 \xrightarrow{A} \Sigma} = \overrightarrow{0} \end{array} \right._A \qquad \{0 \xrightarrow{B} \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{0 \xrightarrow{B} \Sigma} = Y^B_{0\Sigma}.\overrightarrow{y_v} \\ \overrightarrow{M}_{B,0 \xrightarrow{B} \Sigma} = \overrightarrow{0} \end{array} \right._B$$

Question 1 : Donner les conditions à respecter pour respecter les contraintes d'unilatéralité.

La voiture reste en contact avec le sol si : $\overrightarrow{R}_{0 \xrightarrow{A} \Sigma} \cdot \overrightarrow{y_v} > 0$ et donc $Y^A_{0\Sigma} > 0$.

De même, il faut que $Y^B_{0\Sigma} > 0$.

Question 2 : Donner la/les stratégies d'isolement afin de déterminer la vitesse V afin de respecter les contraintes d'unilatéralité.

J'isole la voiture complète Σ soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{A} \Sigma$

- $0 \xrightarrow{B} \Sigma$
- poids $\to \Sigma$

Pour déterminer $Y^A_{0\Sigma}$, j'écris le théorème des moments en B et en projection sur $\vec{z}$.

$$\vec{M}_{B,0\xrightarrow{A}\Sigma}\cdot\vec{z} + \underbrace{\vec{M}_{B,0\xrightarrow{B}\Sigma}\cdot\vec{z}}_{0} + \vec{M}_{B,\text{poids}\to\Sigma}\cdot\vec{z} = \vec{\delta}_{B,\underbrace{\Sigma}_{\text{Ensemble isolé}}/\underbrace{0}_{\text{Référentiel galiléen}}}\cdot\vec{z}$$

- $\vec{M}_{B,0\xrightarrow{A}\Sigma}\cdot\vec{z} = \cancel{\vec{M}_{A,0\xrightarrow{A}\Sigma}\cdot\vec{z}} + (\overbrace{\vec{BA}}^{-L.\vec{x_v}}\wedge(Y^A_{0\Sigma}\cdot\vec{y_v}))\cdot\vec{z}$

$$= -L.Y^A_{0\Sigma}$$

- $\vec{M}_{B,pds\to\Sigma}\cdot\vec{z} = \cancel{\vec{M}_{G_\Sigma,pds\to\Sigma}\cdot\vec{z}} + (\vec{BG_\Sigma}\wedge(-M.g.\vec{y}))\cdot\vec{z}$

$$= \left(\left(-\frac{L}{2}.\underbrace{\vec{x_v}}_{-\vec{x}} + h.\underbrace{\vec{y_v}}_{-\vec{y}}\right)\wedge(-M.g.\vec{y})\right)\cdot\vec{z} = -\frac{L}{2}.M.g$$

Dans la pire des configurations $\alpha = 90°$ et donc :

$$\vec{x_v} = -\vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{y_v} = -\vec{y}$$

- $\vec{\delta}_{B,\Sigma/0}\cdot\vec{z} = \vec{\delta}_{B,V/0}\cdot\vec{z} + \underbrace{\vec{\delta}_{B,\text{roues av}/0}\cdot\vec{z}}_{=0} + \underbrace{\vec{\delta}_{B,\text{roues ar}/0}\cdot\vec{z}}_{=0}$

car masse et inertie négligées

- $\vec{\delta}_{B,V/0}\cdot\vec{z} = \vec{\delta}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z} + (\vec{BG_\Sigma}\wedge\vec{R_d}_{V/0})\cdot\vec{z}$

▪ $\vec{\delta}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G_\Sigma,V/0})_0\cdot\vec{z} + \underbrace{(M.\vec{V}_{G/0}\wedge\vec{V}_{G_\Sigma\in V/0})}_{=\vec{0}\text{ car m̂ vitesse}}\cdot\vec{z}$

$\vec{z}$ est fixe ds le repère 0

$$= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G_\Sigma,V/0}\cdot\vec{z})$$

- $\vec{\sigma}_{G_\Sigma, v/0} \cdot \vec{z} = \left(I(G_\Sigma, v)\cdot \vec{\Omega}_{v/0}\right)\cdot\vec{z} + \left(M\cdot \cancel{\vec{G_\Sigma G_\Sigma}} \wedge \vec{V}_{G_\Sigma \in v/0}\right)\cdot \vec{z}$

$$= \left(\begin{bmatrix} A_v & 0 & 0 \\ 0 & B_v & 0 \\ 0 & 0 & C_v \end{bmatrix}_v \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_v\right)\cdot\vec{z}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_v\cdot\dot{\alpha} \end{bmatrix}_v \cdot \vec{z} = C_v\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{z_v}\cdot\vec{z} = C_v\cdot\dot{\alpha}$$

$$= C_v\cdot\frac{v}{R}$$

où $v = \text{cste}$.

- donc $\vec{\delta}_{G_\Sigma, v/0}\cdot\vec{z} = 0$

- $\vec{R_d}_{v/0} = M\cdot\frac{d}{dt}\left(v\cdot\vec{x_v}\right)_0$

$$= M\cdot v\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{x_v}\right)_0 \quad \dot{\alpha}\cdot\vec{z_v}$$

$$= M\cdot v\cdot\left[\cancel{\frac{d}{dt}\left(\vec{x_v}\right)_v} + \overline{\vec{\Omega}_{v/0}} \wedge \vec{x_v}\right] \qquad \left(\text{et } \dot{\alpha} = \frac{v}{R}\right)$$

$$= M\cdot\frac{v^2}{R}\cdot\vec{y_v}$$

donc $\vec{\delta}_{G_\Sigma, v/0}\cdot\vec{z} = 0 + \left(\left(-\frac{L}{2}\cdot\vec{x_v} + h\cdot\vec{y_v}\right)\wedge\left(M\cdot\frac{v^2}{R}\cdot\vec{y_v}\right)\right)\cdot\vec{z}$

$$= -\frac{L}{2}\cdot M\cdot\frac{v^2}{R}$$

D'où : $-L\cdot Y^A_{0\Sigma} - \frac{L}{2}\cdot M\cdot g = -\frac{L}{2}\cdot M\cdot\frac{v^2}{R}$

Il faut $Y^A_{0\Sigma} > 0$ avec $Y^A_{0\Sigma} = -\frac{M\cdot g}{2} + \frac{M\cdot v^2}{2\cdot R}$

Et donc $-\frac{\cancel{M}\cdot g}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{M}\cdot v^2}{\cancel{2}\cdot R} > 0$

Donc $\boxed{v > \sqrt{R\cdot g}}$

AN : il faut $v > 37$ km/h pr faire le looping.