Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

Torseur cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais

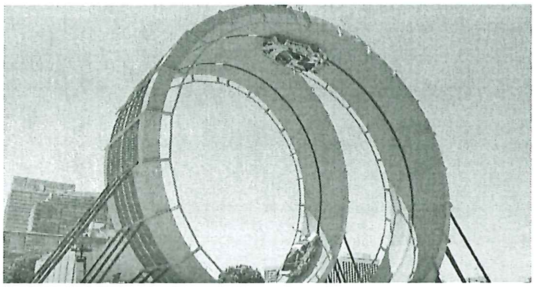
Pré-requis

- Notions de cinématique
- Maths : géométrie vectorielle, intégration, matrice

Objectifs

- Calculer/Simplifier/Transporter une matrice d'inertie
- Être capable de calculer un torseur cinétique

Mise en situation



On désire calculer les conditions permettant au pilote de réussir son looping. Il faudra donc utiliser le principe fondamental de la dynamique. L'utilisation du principe fondamental de la dynamique nécessite de calculer le torseur dynamique. On verra cependant qu'une étape préalable est le calcul du **torseur cinétique**. Ce torseur, **à ne pas confondre avec le torseur cinématique**, permet de modéliser la vitesse du solide ainsi que la répartition de ses masses.

1 Définition du torseur cinétique

1.1 Définition

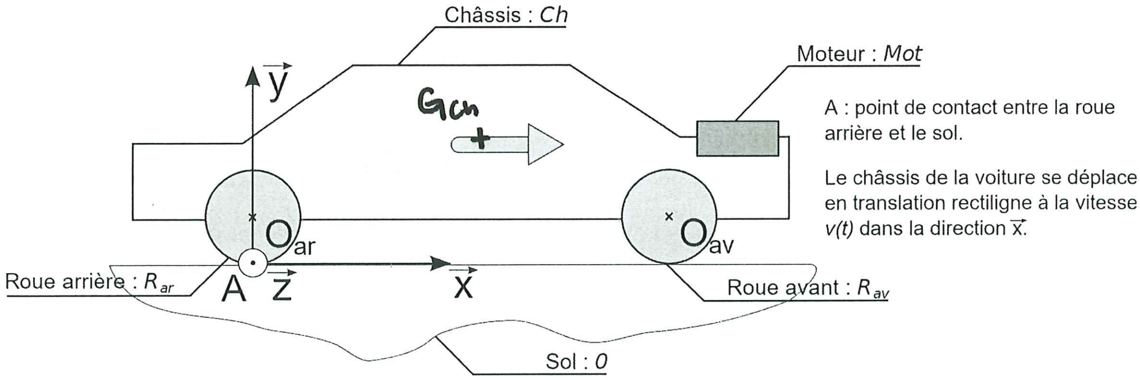
Le torseur cinétique d'un solide S dans un référentiel R, écrit en un point A quelconque, se définit de la manière suivante :

ou quantité de mouvement

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Résultante cinétique de } S/R : \vec{p}_{S/R} \\ \text{Moment cinétique en } A \text{ de } S/R : \vec{\sigma}_{A,S/R} \end{array} \right\}_A$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \vec{p}_{S/R} = \int_{M\in S} \vec{V}_{M\in S/R} \cdot dm & \text{en } kg \cdot m/s \\ \vec{\sigma}_{A,S/R} = \int_{M\in S} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M\in S/R} \cdot dm & \text{en } kg \cdot m^2/s \end{array} \right\}_A$$

1.2 Exemple de calcul avec la voiture lorsque celle-ci se déplace à l'horizontal



Calcul du torseur cinétique du châssis en A par rapport au sol :

$$\{\mathcal{C}_{Ch/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{Ch/0} = \int_{M \in Ch} \vec{V}_{M \in Ch/0} \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A, Ch/0} = \int_{M \in Ch} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M \in Ch/0} \cdot dm \end{array} \right._A$$

Le châssis est en translation donc $\forall M \in Ch$ $\vec{V}_{M \in Ch/0} = \vec{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

Et donc • $\vec{p}_{Ch/0} = \underbrace{\left(\int_{M \in Ch} dm \right)}_{m_{Ch} \text{ : masse du châssis}} \cdot \vec{V}_{G_{Ch} \in Ch/0} = m_{Ch} \cdot \vec{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

• $\vec{\sigma}_{G_{Ch}, Ch/0} = \underbrace{\left[\int_{M \in Ch} \vec{AM} \cdot dm \right]}_{m_{Ch} \cdot \vec{AG_{Ch}}} \wedge \vec{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

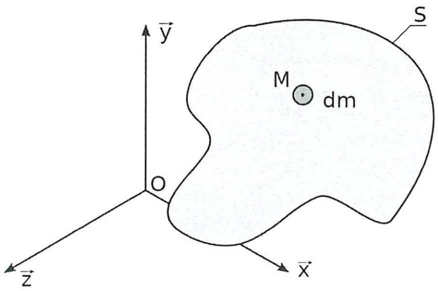
$= m_{Ch} \cdot \vec{AG_{Ch}} \wedge \vec{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

Calcul du torseur cinétique en A de la roue arrière par rapport au sol :

Impossible à calculer "simplement" car $\vec{V}_{M \in R_{ar}/0}$ dépend du point M.

2 Quelques notions autour de la masse des solides

2.1 Définition

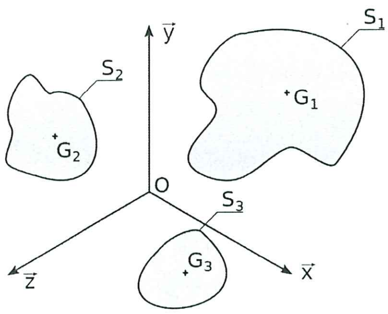


Un système matériel S est constitué d'un ensemble de points M de masse élémentaire dm. La masse m_S de ce système est donc :

$$m_S = \int_{M \in S} dm \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

On calculera souvent la masse infinitésimale dm à partir de la masse volumique du solide considéré notée ρ et son volume infinitésimal dV. On a effectivement $dm = \rho . dV$ avec ρ en kg/m^3.

2.2 Propriété



La masse est additive. Cela signifie que la masse m_Σ de l'ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ s'écrit:

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 + ... \qquad \text{(en } \mathbf{kg}\text{)}$$

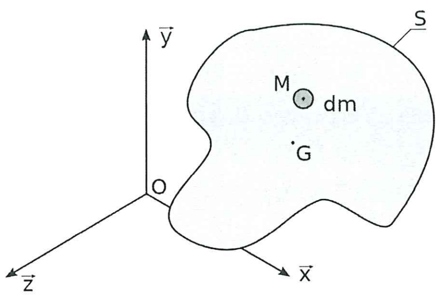
Où les m_i sont les masses des solides S_i.

2.3 Système à masse conservative

Un système est dit à masse conservative si et seulement si sa masse reste constante au cours du temps. Dans la quasi-totalité des exercices proposés en classe prépa cette hypothèse sera vérifiée. Cela permet "d'inverser" dérivation temporelle et intégration spatiale, on aura donc pour toute fonction vectorielle $\overrightarrow{\varphi}(M,t)$ définie l'espace S et dérivable par rapport au temps t :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{M \in S} \overrightarrow{\varphi}(M,t) \cdot dm\right]_0 = \int_{M \in S} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\varphi}(M,t)\right]_0 \cdot dm$$

2.4 Centre d'inertie - centre de gravité



On appelle centre d'inertie (ou centre de gravité) du solide S le point G qui vérifie la relation :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \overrightarrow{0}$$

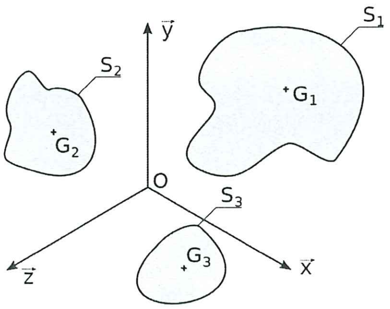
Ou encore :

À retenir

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

Avec O un point quelconque et m la masse du solide.

2.5 Barycentre d'un ensemble de solides



On pourra également calculer le centre d'inertie ou le barycentre, noté G_Σ, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$.

À retenir

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} \cdot \sum_{i=1}^{\text{nb de solides}} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

Où les m_i sont les masses des solides S_i de centres d'inertie respectifs G_i.

Et bien évidemment : $m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3 + ...$

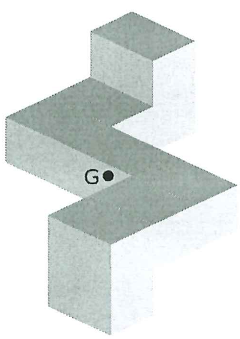
2.6 Centre d'inertie d'un solide à symétrie matérielle

À retenir

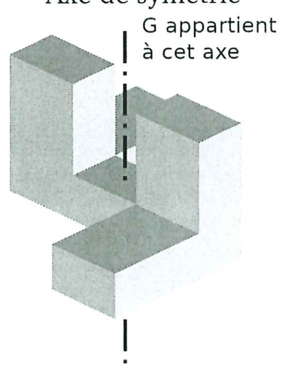
Si le solide présente un élément de symétrie matérielle, alors **le centre de gravité appartient à cet élément de symétrie.**

On parle de symétrie **matérielle**, si le solide présente une symétrie géométrique et une symétrie du matériaux.

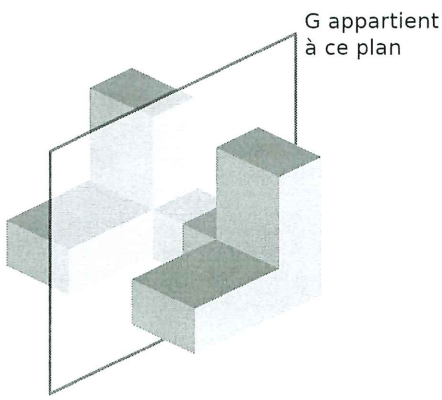
Point de symétrie



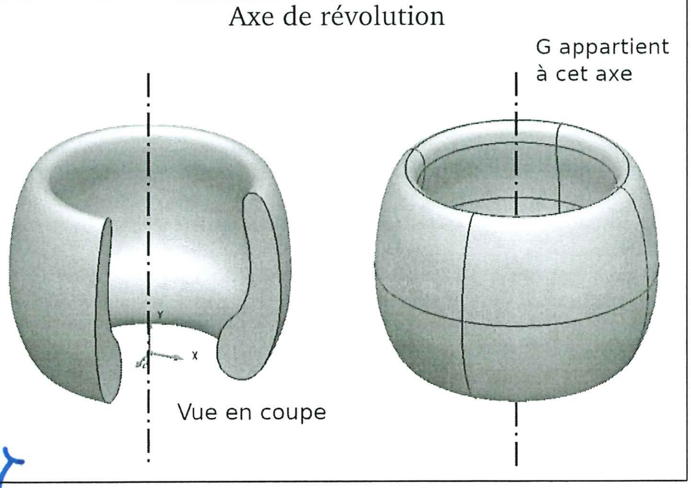
Axe de symétrie



Plan de symétrie



Axe de révolution



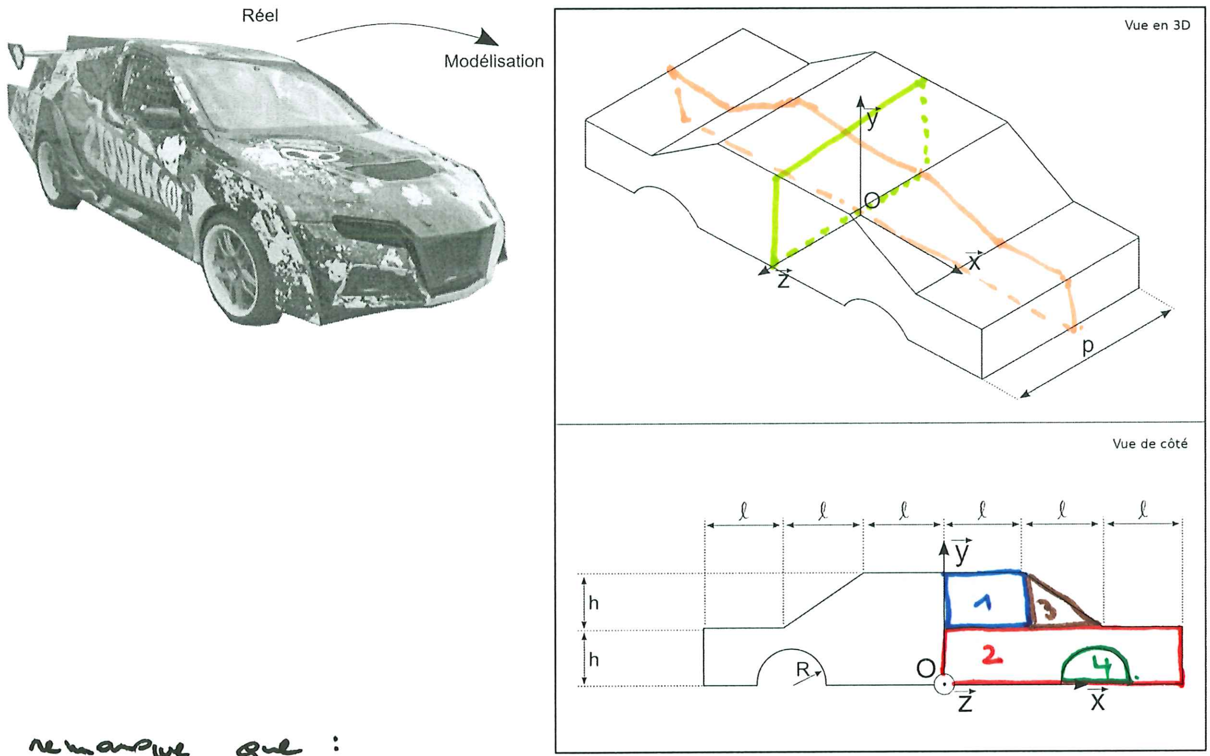
↳ dans ce cas, on dira que le solide est invariant par rotation autour de l'axe de révolution.

Application : détermination du centre d'inertie du châssis de la voiture

On souhaite déterminer le centre d'inertie G_{Ch} du châssis de la voiture. La géométrie de ce châssis est donnée sur la figure ci-dessous. La géométrie, représentée sur les figures ci-dessous, a volontairement été simplifiée.

On donne également les indications suivantes :

- Le châssis est composé d'un matériau homogène de masse volumique ρ.
- Le centre d'inertie d'un triangle se situe au tiers de chacune de ses hauteurs.
- Le centre d'inertie d'un demi-disque se situe à une distance $\frac{4R}{3\pi}$ de sa base (où R est le rayon du demi-disque.



Je remarque que :

- le châssis possède une symétrie matérielle par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$.
- ______________________________ $(O,\vec{y},\vec{z})$.

On sait donc que $G_{Ch} \in (O,\vec{y})$, on pourra donc écrire :

$$\overrightarrow{OG_{Ch}} = y_G \cdot \vec{y}$$

Dis autrement, il faut juste calculer $y_G = \overrightarrow{OG_{Ch}} \cdot \vec{y}$. Où :

$$\overrightarrow{OG_{Ch}} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3-m_4} \cdot \left[m_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} - m_4 \cdot \overrightarrow{OG_4}\right]$$

$$y_{G_i} = \vec{OG_i} \cdot \vec{y}$$

Et donc $$y_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3 - m_4} \cdot \left[m_1 \cdot y_{G_1} + m_2 \cdot y_{G_2} + m_3 \cdot y_{G_3} - m_4 \cdot y_{G_4} \right]$$

Où :

- $m_1 = \rho \cdot p \cdot h \cdot l$

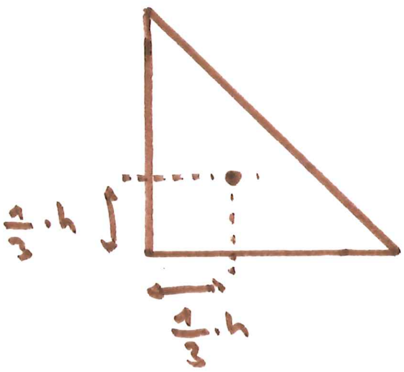
  $y_{G_1} = \frac{3}{2} \cdot h$

- $m_2 = \rho \cdot p \cdot h \cdot (3 \cdot l)$

  $y_{G_2} = \frac{1}{2} \cdot h$

- $m_3 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot p \cdot h \cdot l$

  $y_{G_3} = \frac{4}{3} \cdot h$



- $m_4 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\pi \cdot R^2)$

  $y_{G_4} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$

3 Simplification du torseur cinétique

Le torseur cinétique a été défini dans la partie précédente. Pour un solide S de centre d'inertie G dans un référentiel R, ce torseur s'écrit, en un point A quelconque :

$$\{\mathscr{C}_{S/R} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{p_{S/R}} & = \int_{M\in S} \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}} & = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm \end{array}\right.}$$

Il a rapidement été montré que le calcul de ce torseur (écrit sous sa forme intégrale) allait être laborieux. Des outils de géométrie des masses ont alors été introduit dans le but de simplifier le torseur cinétique.

3.1 Cas de la résultante

Le plus simple est de partir de la définition du centre d'inertie d'un solide :

$$\begin{array}{lclclcl} m \cdot \overrightarrow{OG} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm & \Rightarrow & m \cdot \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_R & = & \dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm\right]_R \\ & & & \Rightarrow & m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_R \cdot dm \\ & & & \Rightarrow & m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} & = & \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm \end{array}$$

On obtient donc finalement :

À retenir

$\overrightarrow{p_{S/R}} = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$ (en kg.m/s)

3.2 Cas du moment

Concernant le moment cinétique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot dm &= \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm \\ &= \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot dm - \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot dm \\ &= \left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \cdot dm\right) \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm \\ &= m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \cdot dm \end{aligned}$$

Remarquons le fait que :

- $\wedge$ est un opérateur linéaire ;
- $\int$ est également un opérateur linéaire.

L'opération qui à $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ associe $\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm$ est donc également une opération linéaire.

Cette **opération linéaire** peut se représenter par une matrice appelée **matrice d'inertie de S en A. Cette matrice d'inertie ne dépend que du solide étudié (mais se définit en un point)**. On a donc :

$$\int_{M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\cdot dm = I(A,S)\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

On a donc finalement :

À retenir

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

(en $kg.m^2/s$)

3.3 Récapitulatif

On a donc montré que, pour un solide S de centre d'inertie G dans un référentiel R, le torseur cinétique s'écrit, en un point A quelconque :

À retenir

$$\{C_{S/R}\} = \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_{S/R}} = m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I(A,S).\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right.\}_A$$

et $\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{P_{S/R}}$

4 Identification de la matrice d'inertie

On a donc été capable de simplifier l'écriture du torseur cinétique. Cette simplification a cependant fait intervenir la matrice d'inertie qui est, pour le moment, inconnue. Il est possible de déterminer cette matrice par calcul mais nous allons préférer une approche par la modélisation d'une expérience simple (voir schéma ci-dessous).

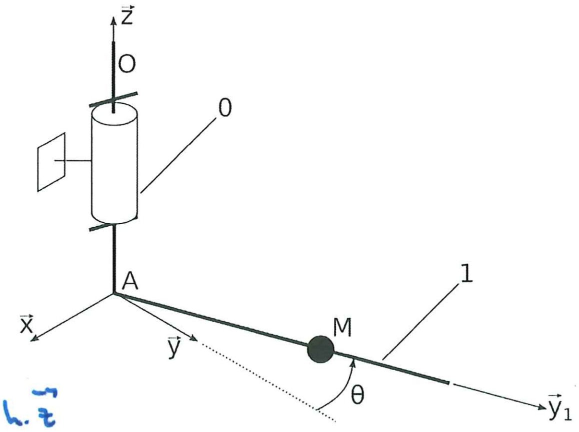
Exploitation expérience : on considère une masse M de masse m encastrée avec le solide 1. Le solide 1 est l'assemblage d'une tige et de la masse ponctuelle. La masse de la tige est négligeable par rapport à m. M est donc le centre de gravité de l'ensemble {tige, masse ponctuelle}.

On paramètre le mécanisme de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{y_1} \quad ; \quad \overrightarrow{AO} = h\overrightarrow{z} \quad \text{et} \quad \theta = (\overrightarrow{x},\overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y},\overrightarrow{y_1})$$

Si M est un point matériel, cela signifie que :

$$\{\mathscr{C}_{1/0}\} = \underset{M}{\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{p}_{1/0} = \int_{M\in 1} \overrightarrow{V_{M\in 1/0}} \cdot dm = m \cdot \overrightarrow{V}_{M\in 1/0} \\ \overrightarrow{\sigma}_{M,1/0} = \int_{M\in 1} \cancel{\overrightarrow{MM}} \wedge \overrightarrow{V_{M\in 1/0}} \cdot dm = \overrightarrow{0} \end{array}\right.}$$



On a ici : $\overrightarrow{V}_{M\in 1/0} = \underbrace{\overrightarrow{V}_{O\in 1/0}}_{\vec{0}} + \overbrace{\overrightarrow{MO}}^{-r.\vec{y_1}+h.\vec{z}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{1/0}}_{\dot\theta.\vec{z}} = -r.\dot\theta.\vec{x_1}$

Donc :

$$\{\mathscr{C}_{1/0}\} = \underset{M}{\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{p}_{1/0} = -m.r.\dot\theta.\vec{x_1} \\ \overrightarrow{\sigma}_{M,1/0} = \overrightarrow{0} \end{array}\right.}$$

L'objectif est d'identifier la matrice d'inertie en sachant que, par définition, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} = m \cdot \overrightarrow{OM} \wedge \cancel{\overrightarrow{V}_{O\in 1/0}} + I(O,1) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$$

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -E.\dot\theta \\ -D.\dot\theta \\ C.\dot\theta \end{bmatrix}_1 = -E.\dot\theta.\vec{x_1} - D.\dot\theta.\vec{y_1} + C.\dot\theta.\vec{z_1}$$

On peut également écrire : $\overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} = \overrightarrow{\sigma_{M,1/0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p_{1/0}}$

$$= \vec{0} + (r.\vec{y_1} - h.\vec{z_1}) \wedge (-m.r.\dot\theta.\vec{x_1})$$

$$= m.r^2.\dot\theta.\vec{z_1} + m.r.h.\dot\theta.\vec{y_1}$$

$$= -m.r.(-h).\dot\theta.\vec{y_1} + m.r^2.\dot\theta.\vec{z_1}$$

Moment d'inertie autour de l'axe de rotation

On retiendra que :

À retenir

Le moment d'inertie d'un point matériel M autour d'un axe $(O,\overrightarrow{u})$ s'écrit :

$$J_{(O,\vec{u})} = m \cdot r^2$$

où r est la distance du pt à l'axe

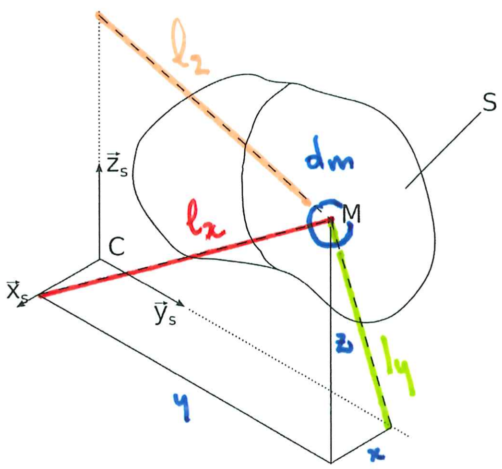
Le produit d'inertie d'un point matériel M autour des axes $(O,\overrightarrow{u})$ et $(O,\overrightarrow{v})$ s'écrit :

$$J_{(O,\vec{u},\vec{v})} = m \cdot u_{OM} \cdot v_{OM}$$

où u_{OM} et v_{OM} sont défini par $u_{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}$ et $v_{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}$

Généralisation : on considère un solide S associé à son repère $(C,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s},\overrightarrow{z_s})$. M est un point matériel de masse dm appartenant à ce solide S.

Les coordonnées de M dans le repère $(C,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s},\overrightarrow{z_s})$ sont notées (x,y,z) ce qui équivaut à $\overrightarrow{CM} = x\cdot\overrightarrow{x_s} + y\cdot\overrightarrow{y_s} + z\cdot\overrightarrow{z_s}$.



Ce point matériel M a donc :

- un moment d'inertie élémentaire autour de l'axe $(C,\overrightarrow{x_s})$ qui s'écrira : $dA = \overbrace{(y^2+z^2)}^{l_x^2} \cdot dm$
- un moment d'inertie élémentaire autour de l'axe $(C,\overrightarrow{y_s})$ qui s'écrira : $dB = \underbrace{(x^2+z^2)}_{l_y^2} \cdot dm$
- un moment d'inertie élémentaire autour de l'axe $(C,\overrightarrow{z_s})$ qui s'écrira : $dC = \underbrace{(x^2+y^2)}_{l_z^2} \cdot dm$
- un produit d'inertie élémentaire autour des axes $(C,\overrightarrow{y_s})$ et $(C,\overrightarrow{z_s})$ qui s'écrira : $dD = y \cdot z \cdot dm$
- un produit d'inertie élémentaire autour des axes $(C,\overrightarrow{x_s})$ et $(C,\overrightarrow{z_s})$ qui s'écrira : $dE = x \cdot z \cdot dm$
- un produit d'inertie élémentaire autour des axes $(C,\overrightarrow{x_s})$ et $(C,\overrightarrow{y_s})$ qui s'écrira : $dF = x \cdot y \cdot dm$

On définit alors la matrice d'inertie du point matériel M écrite au point C et exprimée dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$:

$$I(C,S) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & -\int_{M\in S} x.y.dm & -\int_{M\in S} x.z.dm \\ & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & -\int_{M\in S} y.z.dm \\ sym & & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})}$$

Pour trouver la matrice d'inertie de l'ensemble du solide S au point C et écrite dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$, il suffit d'intégrer $\forall M \in S$ (bien entendu, on peut additionner les matrices d'inertie car elles représentent des opérations linéaires) :

À retenir

Souvent, la matrice d'un solide S est associée à une base fixe / au solide.

$$I(C,S) = \begin{bmatrix} \int_{M\in S} (y^2+z^2).dm & -\int_{M\in S} x.y & -\int_{M\in S} x.z.dm \\ \vdots & \int_{M\in S} (x^2+z^2).dm & -\int_{M\in S} y.z.dm \\ sym \ ---- & & \int_{M\in S} (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})}$$

Cette matrice représente la masse du solide mais aussi la répartition de la masse (c'est un calcul intégral). Cette matrice sera donc une donnée du problème. Elle sera souvent exprimée de la manière suivante :

$$I(C,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})}$$

Avec :

A : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(C, \overrightarrow{x_s})$
B : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(C, \overrightarrow{y_s})$
C : Moment d'inertie par rapport à l'axe $(C, \overrightarrow{z_s})$

D : Produit d'inertie par rapport aux axes $(C, \overrightarrow{y_s})$ et $(C, \overrightarrow{z_s})$
E : Produit d'inertie par rapport aux axes $(C, \overrightarrow{x_s})$ et $(C, \overrightarrow{z_s})$
F : Produit d'inertie par rapport aux axes $(C, \overrightarrow{x_s})$ et $(C, \overrightarrow{y_s})$

L'unité des moments d'inertie, des produits d'inertie (et donc de la matrice d'inertie) est le $\mathrm{kg \cdot m^2}$.

La notion de "moment" d'inertie n'a rien à voir avec la notion de "moment" dans un torseur.

5 Quelques notions autour de la matrice d'inertie

5.1 Base principale d'inertie

La matrice d'inertie est symétrique. Il existe donc une base $B_p(\overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{y_p}, \overrightarrow{z_p})$ telle que la matrice d'inertie est diagonale dans cette base (vu plus tard dans le programme de mathématiques). On a donc :

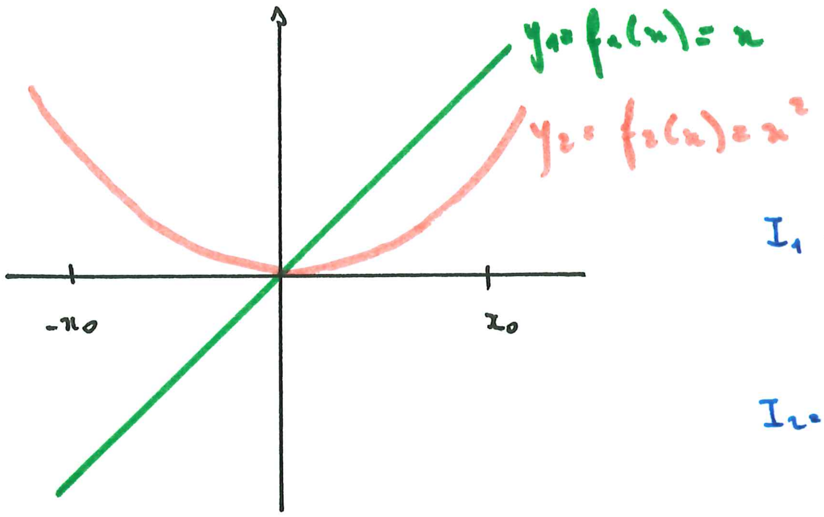
À retenir

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}_{(\vec{x_p},\vec{y_p},\vec{z_p})}$$

- $(A,\vec{x_p})$; $(A,\vec{y_p})$ et $(A,\vec{z_p})$ sont les axes principaux d'inertie.
- A_p ; B_p et C_p sont les moments principaux d'inertie de S au point A respectivement par rapport aux axes $(A,\vec{x_p})$; $(A,\vec{y_p})$ et $(A,\vec{z_p})$.
- Si A est le centre d'inertie de S alors $(A,\vec{x_p})$; $(A,\vec{y_p})$ et $(A,\vec{z_p})$ sont appelés axes centraux d'inertie de S.

5.2 Simplification de la matrice d'inertie

5.2.1 Petit rappel de mathématiques



$I_1 = \int_{-x_0}^{x_0} f_1(x)\cdot dx = 0$

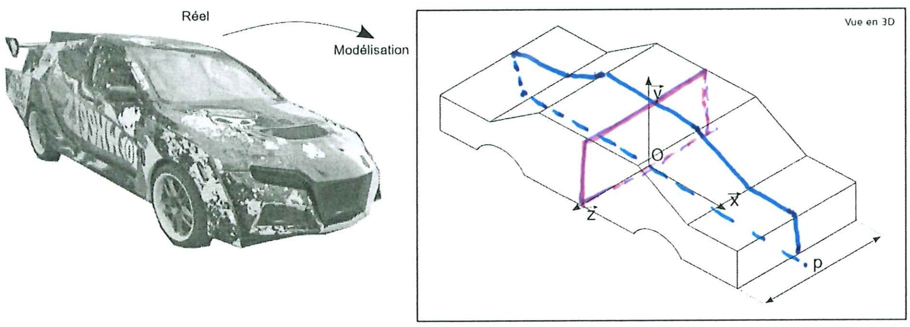
car f_1 est une f° impaire

$I_2 = \int_{-x_0}^{x_0} f_2(x)\cdot dx \neq 0$

car f_2 est une f° paire

5.2.2 Symétrie par rapport à un plan

On considère ici le châssis de la voiture. On cherche à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).



On sait que :

$$I(O,Ch)=\begin{bmatrix} \int_{M\in Ch}(y^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in Ch}\cancel{-x\cdot y}\cdot dm & \int_{M\in Ch}\cancel{-x\cdot z}\cdot dm \\ \int_{M\in Ch}\cancel{-x\cdot y}\cdot dm & \int_{M\in Ch}(x^2+z^2)\cdot dm & \int_{M\in Ch}\cancel{-y\cdot z}\cdot dm \\ \int_{M\in Ch}\cancel{-x\cdot z}\cdot dm & \int_{M\in Ch}\cancel{-y\cdot z}\cdot dm & \int_{M\in Ch}(x^2+y^2)\cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le châssis de la voiture :

- présente une symétrie matérielle / au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ $\Leftrightarrow$ plan passant par O et de normale $\vec{z}$

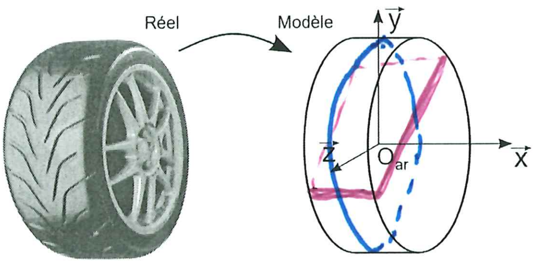
- présente une symétrie matérielle / au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$

La matrice d'inertie sera donc de la forme :

$$I(O, Ch) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5.2.3 Symétrie par rapport à un axe de révolution

On considère ici une des roues de la voiture. On cherche toujours à simplifier la matrice d'inertie (sans calculer tous les termes).



On sait que :

$$I(O_{ar}, R_{ar}) = \begin{bmatrix} \int_{M \in R_{ar}} (y^2+z^2) \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} \cancel{-x} \cdot y \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} \cancel{-x} \cdot z \cdot dm \\ \int_{M \in R_{ar}} \cancel{-x} \cdot y \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} (x^2+z^2) \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} -y \cdot \cancel{z} \cdot dm \\ \int_{M \in R_{ar}} \cancel{-x} \cdot z \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} -y \cdot \cancel{z} \cdot dm & \int_{M \in R_{ar}} (x^2+y^2) \cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le châssis de la voiture :

- présente une symétrie matérielle / au plan $(O_{ar}, \vec{y}, \vec{z})$
- a une infinité de plan de symétrie...

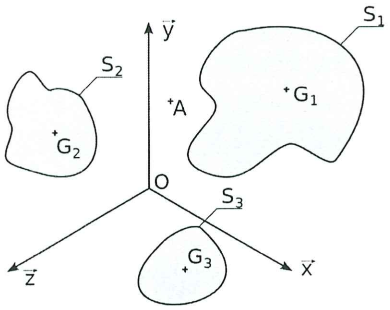
On dira alors que : le châssis est invariant par rotation autour de l'axe $(O_{ar}, \vec{x})$ et donc

$$\int_{M \in R_{ar}} (y^2 + x^2) \cdot dm = \int_{M \in R_{ar}} (z^2 + x^2) \cdot dm$$

La matrice d'inertie sera donc de la forme :

$$I(O_{ar}, R_{ar}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5.3 Matrice d'un solide composé de plusieurs pièces



On pourra calculer la matrice d'inertie, $I(A, \Sigma)$, d'un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$ au point A en additionnant les matrices d'inertie de chacun des solides.

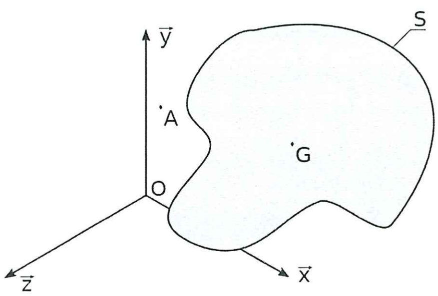
À retenir

$$I(A, \Sigma) = I(A, S_1) + I(A, S_2) + I(A, S_3) + ...$$

Bien entendu, il faut que les points soient les mêmes et que les bases de calcul soient les mêmes également.

5.4 Théorème de Huygens

Ce théorème permet de changer le point d'écriture de la matrice. Plus exactement, **il permet de passer du centre d'inertie G d'un solide S à un autre point A quelconque**.



La plupart du temps, compte-tenu des symétries, on vous donnera la matrice au centre d'inertie :

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Pour obtenir $I(A, S)$, il faut utiliser le théorème de Huygens :

À retenir

$$I(A, S) = I(G, S) + I(G \rightarrow A, S)$$

Avec :

- $I(A,S)$: la matrice d'inertie en A du solide S ;
- $I(G,S)$: la matrice d'inertie en G du solide S ;
- $I(G \to A,S)$: la matrice de transfert de masse du point G vers le point A. Cette matrice est la matrice d'inertie, écrite en A, du point matériel G associé à la masse du solide m.

Il faut commencer par calculer les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A)\cdot\overrightarrow{x} + (y_G - y_A)\cdot\overrightarrow{y} + (z_G - z_A)\cdot\overrightarrow{z} = x_{AG}\cdot\overrightarrow{x} + y_{AG}\cdot\overrightarrow{y} + z_{AG}\cdot\overrightarrow{z}$$

Où x_A, y_A, ... sont les coordonnées des points A et G dans le repère $(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$ et x_{AG}, y_{AG} et z_{AG} sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$.

On a ensuite :

À retenir

$$I(G \to A,S) = m\cdot\begin{bmatrix} y_{AG}^2 + z_{AG}^2 & -x_{AG}\cdot y_{AG} & -x_{AG}\cdot z_{AG} \\ -x_{AG}\cdot y_{AG} & x_{AG}^2 + z_{AG}^2 & -y_{AG}\cdot z_{AG} \\ -x_{AG}\cdot z_{AG} & -y_{AG}\cdot z_{AG} & x_{AG}^2 + y_{AG}^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Attention !

Cette relation n'est valable que si G est le centre d'inertie de la pièce.

Les matrices doivent être exprimées dans la même base.

5.5 Application : calcul de la matrice d'inertie de l'ensemble {châssis, moteur}

On donne, en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$:

- la matrice d'inertie du châssis en G_{Ch}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Ch}}(Ch) \approx \begin{bmatrix} 415 & 0 & 0 \\ 0 & 1350 & 0 \\ 0 & 0 & 1247 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

- la matrice d'inertie du moteur en G_{Mot}, son centre de gravité,

$$I_{G_{Mot}}(Mot) \approx \begin{bmatrix} 650 & 0 & 0 \\ 0 & 520 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

On donne également, en mètres, les coordonnées des points G_{Ch} et G_{Mot}, dans le repère $(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$:

$$\overrightarrow{OG_{Mot}} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG_{Ch}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.85 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Le châssis a une masse $m_{Ch} \approx 815$ kg et le moteur a une masse $m_{Mot} \approx 510$ kg.