Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

Torseur dynamique

PSI - MP : Lycée Rabelais

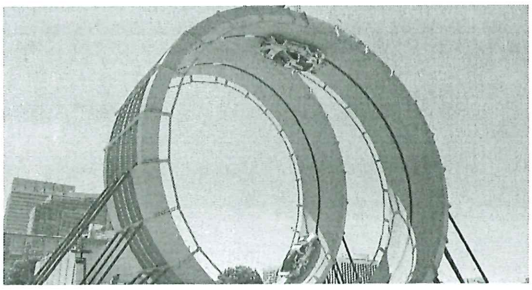
Pré-requis

- Calculer/Simplifier/Transporter une matrice d'inertie
- Torseurs cinétiques

Objectifs

- Être capable de calculer un torseur dynamique

Rappel



On désire calculer les conditions permettant au pilote de réussir son looping. On a déjà montré que l'utilisation du principe fondamental de la dynamique était indispensable à la résolution du problème.
Une première étape a été d'introduire le torseur cinétique (principaux résultats rappelés ci-dessous). Maintenant, il est nécessaire de définir le torseur dynamique en vu de l'application du principe fondamental de la dynamique.

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{S/R}} = m \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = I_A(S) \, \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{array} \right.{}_A$$

Et une des propriétés des torseurs permet d'écrire : $\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{S/R}}$

1 Définition

Le torseur dynamique d'un solide S dans un référentiel R, écrit en un point A quelconque, se définit de la manière suivante :

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Rd_{S/R}} : \text{résultante dynamique de } S/R \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} : \text{moment dynamique en } A \text{ de } S/R \end{array} \right.{}_A$$

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{Rd}_{S/R} = \int_{M\in S} \overrightarrow{\Gamma}_{M\in S/R}\, dm \quad \text{en } kg.m/s^2 = N \\ \overrightarrow{\delta}_{A,S/R} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{M\in S/R}\, dm \quad \text{en } kg.m^2/s^2 = N.m \end{array}\right._A$$

Tout comme pour le torseur cinétique, les calculs à partir de la définition vont rapidement s'avérer complexes. Il est donc possible d'utiliser les résultats obtenus concernant la géométrie des masses pour simplifier ces calculs. On ne prendra pas le temps de démontrer ces résultats (ce serait un peu trop long). Il est donc possible de montrer que le torseur dynamique peut s'écrire de la manière suivante :

À retenir

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{Rd}_{S/R} = m\, \overrightarrow{\Gamma}_{G\in S/R} \\ \overrightarrow{\delta}_{A,S/R} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R}\right]_R + m\, \overrightarrow{V}_{A/R} \wedge \overrightarrow{V}_{G\in S/R} \end{array}\right._A$$

et $\overrightarrow{\Gamma}_{G\in S/R} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}_{G\in S/R}\right]_R$

Et bien entendu, une propriété des torseurs permet d'écrire : $\overrightarrow{\delta}_{B,S/R} = \overrightarrow{\delta}_{A,S/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{Rd}_{S/R}$

Attention !

O_0 est un point fixe dans le référentiel R

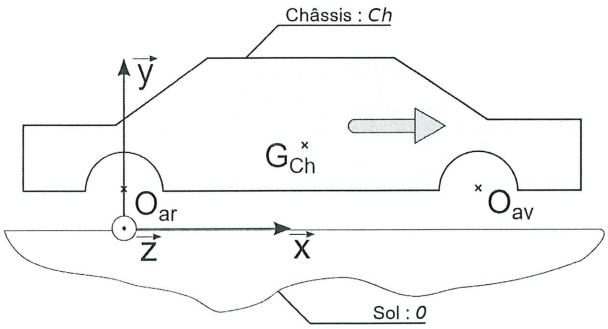
$$\overrightarrow{V_{A/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_R \quad ??? \quad \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Vitesse du point géométrique A dans le référentiel R

Vitesse du point A <u>appartenant à S</u> dans le référentiel R

2 Exemples

2.1 Châssis de la voiture



On considère les hypothèses suivantes :

- Le châssis est en translation rectiligne et se déplace à une vitesse $v(t)$ dans la direction $\overrightarrow{x}$.
- Sa masse est m_{Ch} et sa matrice d'inertie est :

$$I(G_{Ch}, Ch) = \begin{bmatrix} A_{Ch} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Ch} & 0 \\ 0 & 0 & C_{Ch} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

Calcul du torseur dynamique en G_{Ch} du châssis par rapport au sol ?

- $\overrightarrow{R_d}_{Ch/0} = m_{Ch} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

où $\overrightarrow{\Gamma}_{G_{Ch} \in Ch/0} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}\right]_0$

$= \frac{d}{dt}(v.\overrightarrow{x})_0$

$= \dot{v}.\overrightarrow{x}$ donc $\boxed{\overrightarrow{R_d}_{Ch/0} = m_{Ch}.\dot{v}.\overrightarrow{x}}$ ♡

Cas particulier d'un solide en translation rectiligne.

- $\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch}, Ch/0} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch}, Ch/0}\right]_0 + m_{Ch}. \underbrace{\overrightarrow{V}_{G_{Ch}/0} \wedge \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}}_{=\overrightarrow{0}}$ ♡

car, par déf°, le point géométrique G_{Ch} appartient à Ch. Et donc $\overrightarrow{V}_{G_{Ch}/0} = \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

Et : solide en translat°

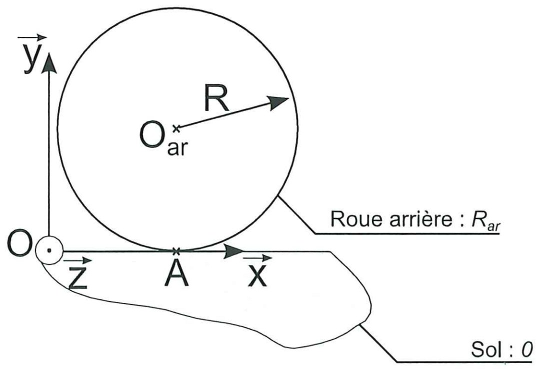
$\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch}, Ch/0} = I(G_{Ch}, Ch).\underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{Ch/0}}_{=\overrightarrow{0}} + m_{Ch}.\cancel{\overrightarrow{G_{Ch}G_{Ch}}} \wedge \overrightarrow{V}_{G_{Ch} \in Ch/0}$

$= \overrightarrow{0}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch}, Ch/0} = \overrightarrow{0}}$

♡ Cas particulier d'un solide en translat° et CALCUL AU CENTRE d'INERTIE !

2.2 Roue de la voiture



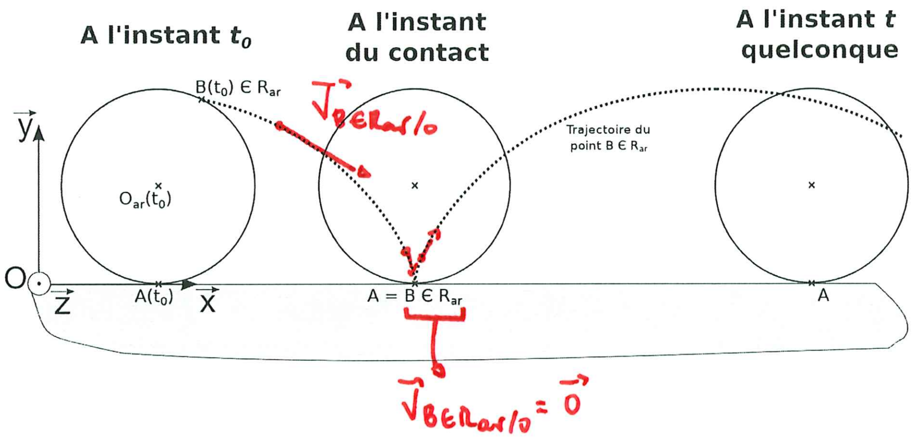
On considère les hypothèses suivantes :

- Le centre de la roue vérifie :
  $\overrightarrow{V_{O_{ar}\in R_{ar}/0}} = v(t)\cdot\vec{x}$.
- Sa masse est $m_{R_{ar}}$, son centre d'inertie est O_{ar} et sa matrice d'inertie est :

$$I(O_{ar},R_{ar}) = \begin{bmatrix} A_{R_{ar}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{R_{ar}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R_{ar}} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Il y a roulement sans glissement en A.

Donner la condition de roulement sans glissement en A puis l'exploiter ?



Roulement sans glissement en A : $\boxed{\vec{V}_{A\in R_{ar}/0} = \vec{0}}$

MAIS : $\vec{V}_{A/0} = v.\vec{x}$!

On a $\vec{V}_{A\in R_{ar}/0} = \vec{V}_{O_{ar}\in R_{ar}/0} + \overrightarrow{AO_{ar}} \wedge \vec{\Omega}_{R_{ar}/0}$

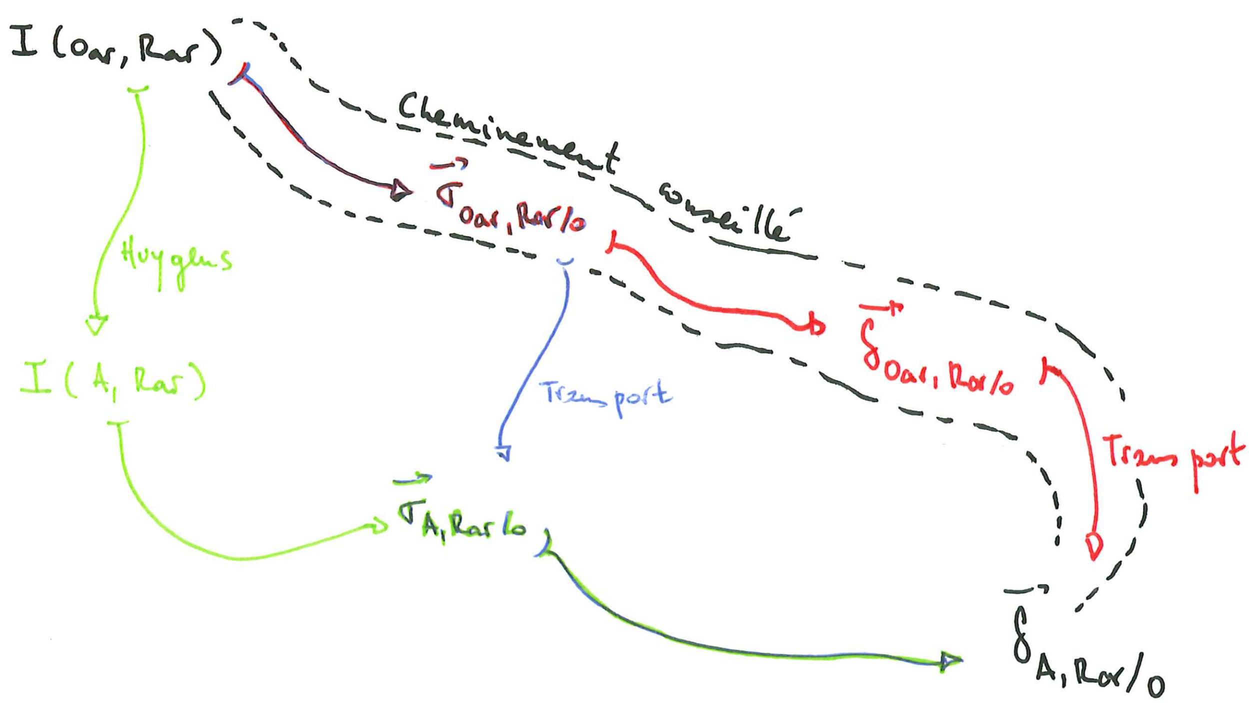
$$\vec{0} = v.\vec{x} + R.\vec{y}\wedge(\omega.\vec{z})$$

$$\vec{0} = v.\vec{x} + R.\omega.\vec{x}$$

Donc $v = -R.\omega$ ... et on retiendra $\boxed{v = \pm R.\omega}$

où le signe dépend du paramétrage.

Méthode de calcul pour déterminer le torseur dynamique en A



Méthode 1 : Calcul du torseur dynamique en A ?

- $\vec{\sigma}_{O_{ar},R_{ar}/0} = I(O_{ar},R_{ar}).\underbrace{\vec{\Omega}_{R_{ar}/0}}_{\vec{\Omega}_{R_{ar}/0} = \omega.\vec{z}} + m_{R_{ar}}.\cancel{\overrightarrow{O_{ar}O_{ar}}} \wedge \vec{V}_{O_{ar}\in R_{ar}/0}$

$$= \begin{bmatrix} A_{R_{ar}} & 0 & 0 \\ 0 & B_{R_{ar}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R_{ar}} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{R_{ar}}.\omega \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= C_{R_{ar}}.\omega.\vec{z}$$

- $\vec{\delta}_{O_{ar},R_{ar}/0} = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{O_{ar},R_{ar}/0}\right]_0 + m_{R_{ar}}.\underbrace{\vec{V}_{O_{ar}/0} \wedge \vec{V}_{O_{ar}\in R_{ar}/0}}_{=\vec{0} \text{ car même vitesse}}$

$$= C_{R_{ar}}.\dot{\omega}.\vec{z}$$

- $\vec{\delta}_{A,R_{ar}/0} = \vec{\delta}_{O_{ar},R_{ar}/0} + \overrightarrow{AO_{ar}} \wedge \vec{R_d}_{R_{ar}/0}$ où $\vec{R_d}_{R_{ar}/0} = m_{R_{ar}}.\vec{\Gamma}_{O_{ar}\in R_{ar}/0}$

Avec $\vec{\Gamma}_{O_{ar}\in R_{ar}/0} = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{V}_{O_{ar}\in R_{ar}/0}\right]_0$

$$= \frac{d}{dt}\left[v.\vec{x}\right]_0$$

$$= \dot{v}.\vec{x}$$

$$\vec{\delta}_{A,Rar/0} = C_{Rar}\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z} + R\cdot\vec{y}\wedge(m_{Rar}\cdot\dot{v}\cdot\vec{x})$$

$$= C_{Rar}\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z} - m_{Rar}\cdot R\cdot\dot{v}\cdot\vec{z}$$

or $v = -R\cdot\omega$

donc $\dot{v} = -R\cdot\dot{\omega}$

$$= [C_{Rar} + m_{Rar}\cdot R^2]\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z}$$

Méthode 2 : Calcul du moment dynamique en A de la roue par rapport au sol ?

- On calcule $\vec{\sigma}_{O_{Ar},Rar/0} = C_{Rar}\cdot\omega\cdot\vec{z}$ (déjà fait)

- $\vec{\sigma}_{A,Rar/0} = \vec{\sigma}_{O_{Ar},Rar/0} + \vec{AO_{Ar}}\wedge\vec{P}_{Rar/0}$

où $\vec{P}_{Rar/0} = m_{Rar}\cdot\vec{V}_{O_{Ar}\in Rar/0} = m_{Rar}\cdot v\cdot\vec{x}$

$$\vec{\sigma}_{A,Rar/0} = C_{Rar}\cdot\omega\cdot\vec{z} + R\cdot\vec{y}\wedge(m_{Rar}\cdot v\cdot\vec{x})$$

$$= C_{Rar}\cdot\omega\cdot\vec{z} - m_{Rar}\cdot R\cdot v\cdot\vec{z}$$

$$= (C_{Rar} + m_{Rar}\cdot R^2)\cdot\omega\cdot\vec{z}$$

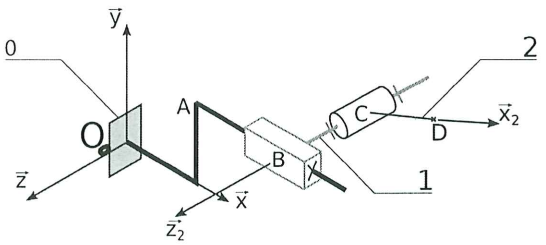
- $\vec{\delta}_{A,Rar/0} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{A,Rar/0}\right)_0 + \underbrace{m_{Rar}\cdot\underbrace{\vec{V}_{A/0}}_{=v\cdot\vec{x}}\wedge\overbrace{\vec{V}_{O_{Ar}\in Rar/0}}^{=v\cdot\vec{x}}}_{=\vec{0}}$

$$= (C_{Rar} + m_{Rar}\cdot R^2)\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z}$$

Attention !

Il y a 2 cas où il faut faire très attention au calcul de $\overrightarrow{V_{A/0}}$:

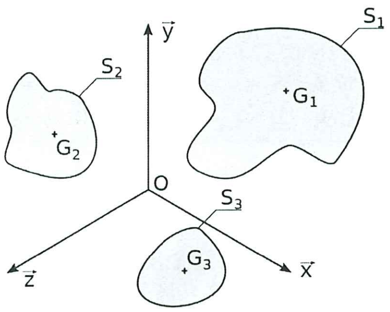
- Points de contacts (vu précédemment).
- Point qui n'appartient pas physiquement au solide (voir exemple ci-dessous).



$$\underbrace{\vec{V}_{O_0 \in 2/0}}_{=\vec{0}} = \underbrace{\vec{V}_{O_0 \in 2/1}}_{\neq \vec{0}} + \underbrace{\vec{V}_{O_0 \in 1/0}}_{\neq \vec{0}}$$

Mais $\vec{V}_{O_0/0} = \vec{0}$ car O_0 est l'origine du repère lié au solide 0 (point fixe ds ce repère)

3 Cas d'un ensemble de solides



Pour un ensemble de solides $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$, on peut écrire :

À retenir

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/0}\} = \{\mathscr{C}_{S_1/0}\} + \{\mathscr{C}_{S_2/0}\} + \{\mathscr{C}_{S_3/0}\} + ...$$
$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/0}\} = \{\mathscr{D}_{S_1/0}\} + \{\mathscr{D}_{S_2/0}\} + \{\mathscr{D}_{S_3/0}\} + ...$$

Attention !

Les torseurs doivent être écrits au même point !