Étude d'un simulateur de vol

① $a = cste$

$v(t) = a.t + v_0$ où $v_0 = 0$ car $v(0) = 0$

$x(t) = \frac{1}{2}.a.t^2 + x_0$ " $x_0 = 0$ " $x(0) = 0$

donc à l'instant t_d du décollage, on a :

$$t_d = \frac{v_d}{a}$$ où $v_d = 250$ km/h $\simeq 69$ m/s

et donc $x_d = \frac{1}{2}.\cancel{a}.\frac{v_d^2}{a^{\cancel{2}}}$

donc $\boxed{a = \frac{1}{2}.\frac{v_d^2}{x_d}}$ où $x_d = 75$ m

AN $\boxed{a \simeq 32 \text{ m/s} \simeq 3,28 . g}$

② J'isole le pilote soumis aux actions mécaniques extérieures suivants :
- $3 \mapsto p$ (pilote)
- poids $\mapsto p$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\{3 \mapsto p\} + \{\text{poids} \mapsto p\} = \{D_{p/0}\}$$

Donc : $\{3 \mapsto p\} = \{D_{p/0}\} - \{\text{poids} \mapsto p\}$

Avec $\vec{Rd}_{p/0} = m.a.\vec{x_3}$ (solide en translation rectiligne)

Et $\vec{\delta}_{G,p/0} = \vec{0}$

Aussi : $\{poids \mapsto p\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{poids \mapsto p} = m \cdot g \cdot \vec{z_3} \\ \vec{M}_{G,poids \mapsto p} = \vec{0} \end{array} \right._G$

Donc : $\{3 \mapsto p\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{3 \mapsto p} = m \cdot a \cdot \vec{x_3} - m \cdot g \cdot \vec{z_3} \\ \vec{M}_{G,3 \mapsto p} = \vec{0} \end{array} \right._G$

(3) $\vec{V}_{G \in p/0} = \cancel{\vec{V}_{G \in p/3}} + \vec{V}_{G \in 3/2} + \vec{V}_{G \in 2/1} + \vec{V}_{G \in 1/0}$

encastrement

- $\vec{V}_{G \in 3/2} = \vec{0}$ car G sur l' axe de la pivot entre 2 et 3.
- $\vec{V}_{G \in 2/1} = \vec{0}$ ——— 1 et 2.
- $\vec{V}_{G \in 1/0} = \cancel{\vec{V}_{O \in 1/0}} + \vec{GO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

$= R \cdot \vec{y_1} \wedge (\dot{\psi} \cdot \vec{z_1})$

$= R \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x_1}$

Donc : $\vec{V}_{G \in p/0} = R \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x_1}$

(4) $\vec{a}_{G \in p/0} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{G \in p/0} \right)_0$

$$\text{Et} \quad \frac{d}{dt}(\vec{x_1})_0 = \cancel{\frac{d}{dt}(\vec{x_1})_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x_1}$$

$$= \dot{\varphi} . \vec{z_1} \wedge \vec{x_1}$$

$$= \dot{\varphi} . \vec{y_1}$$

Donc : $\boxed{\vec{a}_{G\in p/0} = R.\ddot{\varphi}.\vec{x_1} + R.\dot{\varphi}^2.\vec{y_1}}$

(5) J'isole p qui est soumis aux act° mécaniques extérieures suivants :

- $3 \mapsto p$
- $pb \mapsto p$

Le th. des résultants donne:

$$\vec{R}_{3\mapsto p} + \overbrace{\vec{R}_{pb\mapsto p}}^{= m.\vec{g}} = m.\vec{a}_{G\in p/0}$$

Donc $\boxed{\vec{R}_{3\mapsto p} = m.\left[\vec{a}_{G\in p/0} - \vec{g}\right] = m.\vec{G}}$

(6) On a : $\vec{G} = R.\ddot{\varphi}.\vec{x_{12}} + R.\dot{\varphi}^2.\vec{y_1} - g.\vec{z_{01}}$

Où : $\vec{x_2} = \cos\varphi.\vec{x_3} + \sin\varphi.\vec{z_3}$

$$\vec{y_1} = \cos\theta.\vec{y_{2\underline{3}}} - \sin\theta.\vec{z_2}$$

$$\vec{z_2} = \cos\varphi.\vec{z_3} - \sin\varphi.\vec{x_3}$$

$$\vec{z_1} = \cos\theta.\vec{z_2} + \sin\theta.\vec{y_{2\underline{3}}}$$

On a donc :

$$\vec{G} = G_x.\vec{x_3} + G_y.\vec{y_3} + G_z.\vec{z_3}$$

Avec : $G_x = R.\ddot{\varphi}.\cos\varphi + R.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\sin\varphi + g.\cos\theta.\sin\varphi$

$G_y = R.\dot{\varphi}^2.\cos\theta - g.\sin\theta$

$G_z = R.\ddot{\varphi}.\sin\varphi - R.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\varphi - g.\cos\theta.\cos\varphi$

(7) Si $\theta = \dot{\varphi} = 0$: $G_x = g.\sin\varphi$

$G_y = 0$

$G_z = -g.\cos\varphi$

En phase de décollage, on a :

$$\vec{R}^{\circ}_{3\to p} = m.a.\vec{x_3} - m.g.\vec{z_3} = m.\vec{G}_{réel}$$

Il faut donc : $\begin{cases} a \simeq g.\sin\varphi \\ g \simeq g.\cos\varphi \end{cases}$ ce qui reste vrai

si $\varphi \ll 1$ et donc $a \ll g$. Dans ce cas :

$$\varphi \simeq \arcsin\left(\frac{a}{g}\right)$$

Au (grand) maximum, on peut avoir $a = g$.

(8) Pour avoir $G_y = 0$, il faut : $R.\dot{\varphi}^2.\cos\theta = g.\sin\theta$

et donc $\theta = \arctan\left[\dfrac{R.\dot{\varphi}^2}{g}\right]$

⑨ Rappelons que $\cos\left(\arctan\left(\dfrac{R.\dot{\varphi}^2}{g}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}}$

et $\sin\left(\arctan\left(\dfrac{R.\dot{\varphi}^2}{g}\right)\right) = \dfrac{R.\dot{\varphi}^2/g}{\sqrt{1+\dfrac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}}$

Et donc :

$$G_x = g.\sin\varphi.\left[\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}}\right]$$

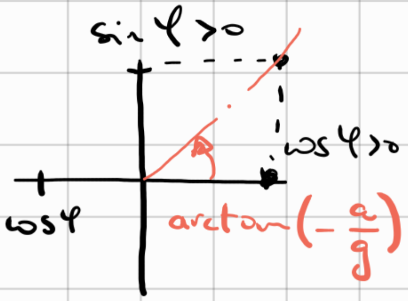
$$G_x = g.\sin\varphi.\sqrt{1+\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}$$

De même : $G_z = -g.\cos\varphi.\sqrt{1+\dfrac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}}$

⑩ On souhaite
$$\begin{cases} a \simeq g.\sin\varphi.\sqrt{1+\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}} \\ -g \simeq -g.\cos\varphi.\sqrt{1+\frac{R^2.\dot{\varphi}^4}{g^2}} \end{cases}$$

D'une part : $\tan\varphi = \dfrac{a}{g} \simeq 3,20$

donc $\varphi \simeq 73°$



• Puis pour respecter la 1ère équation, il faudrait :

$$\left(\frac{a}{g\cdot\sin\varphi}\right)^2 \simeq 1 + \frac{R^2\cdot\dot{\psi}^4}{g^2}$$

Et donc $$\dot{\psi} = \left[\left(\frac{a}{g\cdot\sin\varphi}\right)^2 - 1\right]^{1/4}\cdot\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\dot{\psi} \simeq 2{,}5 \text{ rad/s} \qquad (\text{si } R = 5 \text{ m})$$

• Avec ce choix, la 3ème équation ne pourra pas être exactement vérifiée.

(11) J'isole $\{1, 2, 3, p\}$ soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $0 \xrightarrow{mot} 1$ ✓
- $0 \xrightarrow{piv} 1$ ✗
- $pdb \longrightarrow 1$ –
- $pdb \longrightarrow 2$ –
- $pdb \longrightarrow \{3, p\}$ –

J'écris le th. des moments en O et en projection sur $\vec{z_{01}}$:

$$\underbrace{\vec{M}_{O,0\xrightarrow{mot}1}\cdot\vec{z_0}}_{C_{01}} + \underbrace{\vec{M}_{O,0\xrightarrow{piv}1}\cdot\vec{z_0}}_{0} + \vec{M}_{O,pdb\to 1}\cdot\vec{z_0} + \vec{M}_{O,pdb\to 2}\cdot\vec{z_0} + \vec{M}_{O,pdb\to\{3,p\}}\cdot\vec{z_0}$$

$$=$$

$$\vec{\delta}_{O,\{1,2,\{3,p\}\}/0}\cdot\vec{z_0}$$

• $$\vec{M}_{O,pdb\to i}\cdot\vec{z_0} = \cancel{\vec{M}_{G_i,pdb\to i}}\cdot\vec{z_0} + (\vec{OG_i}\wedge(+m_i\cdot g\cdot\vec{z_0}))\cdot\vec{z_0}$$

$$= 0$$

• $$\vec{\delta}_{O,\{1,2,\{3,p\}\}/0}\cdot\vec{z_0} = \vec{\delta}_{O,1/0}\cdot\vec{z_0} + \underbrace{\vec{\delta}_{O,2/0}\cdot\vec{z_0}}_{=0 \text{ (inertie négligée)}} + \vec{\delta}_{O,\{3,p\}/0}\cdot\vec{z_0}$$

- $\vec{\delta}_{0,1/0} \cdot \vec{z_0} = J_1 \cdot \ddot{\psi}$ (solide en rotation autour d'un axe fixe)

- $\vec{\delta}_{0,\{3,p\}/0} \cdot \vec{z_0} = \vec{\delta}_{G,\underbrace{\{3,p\}}_{3p}/0} \cdot \vec{z_0} + (\vec{OG} \wedge \vec{Rd}_{\{3,p\}/0}) \cdot \vec{z_0}$

- $\vec{\delta}_{G,3p/0} \cdot \vec{z_0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{G,3p/0}\right]_0 \cdot \vec{z_0} + (\underbrace{m_{3p} \cdot \vec{V}_{G/0} \wedge \vec{V}_{G\in 3p/0}}_{=\vec{0} \text{ car } \hat{m} \text{ vitesse}}) \cdot \vec{z_0}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{G,3p/0} \cdot \vec{z_0}\right)$$

- $\vec{\sigma}_{G,3p/0} \cdot \vec{z_0} = (I_G(3p) \cdot \underbrace{\vec{\Omega}_{3p/0}}_{\dot{\psi} \cdot \vec{z}_{01}}) \cdot \vec{z_0} + (m_{3p} \cdot \cancel{\vec{GG}} \wedge \vec{V}_{G\in 3p/0}) \cdot \vec{z_0}$ (car $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$)

$$= \left[\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_1\right] \cdot \vec{z}_{01}$$

$$\vec{z_1} = \cos\theta \cdot \vec{z_2} + \sin\theta \cdot \vec{y_2}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{bmatrix}_2\right] \cdot \vec{z}_{01}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ B \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\theta \\ A \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\theta \end{bmatrix}_2 \cdot \vec{z_1} = (B \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \vec{y_2} + A \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\theta \cdot \vec{z_2}) \cdot \vec{z_1}$$

$$= [A \cdot \cos^2\theta + B \cdot \sin^2\theta] \cdot \dot{\psi}$$

Et donc $\vec{\delta}_{G,3p/0} \cdot \vec{z_0} = [A \cdot \cos^2\theta + B \cdot \sin^2\theta] \cdot \ddot{\psi}$

- $\vec{Rd}_{3p/0} = m_{3p} \cdot [R \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{x_1} + R \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \vec{y_1}]$

Donc $(\underbrace{\overrightarrow{OG}}_{-R.\vec{y_1}} \wedge \overrightarrow{Rd}_{3p/o}).\vec{z_{o1}} = m_{3p}.R^2.\ddot{\varphi}$

On a donc :

$$C_{o1} = [A.\cos^2\theta + B.\sin^2\theta + m_{3p}.R^2 + J_1].\ddot{\varphi}$$