Équilibrage des solides en rotation

1 J'isole $\{1,2\}$ soumis aux actions mécaniques extérieurs suivants :

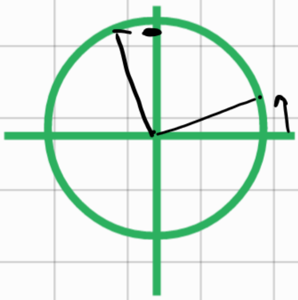
- $0 \to 1$
- $pd \to 2$
- courroie $(c) \to 1$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\{0 \to 1\} + \{pds \to 2\} + \{c \to 1\} = \{\mathcal{D}_{\{1,2\}/0}\}$$

Où • $\vec{M}_{B,\, pd \to 2} = \cancel{\vec{M}_{G_2,\, pd \to 2}} + \vec{BG_2} \wedge (-m_2 . g . \vec{y_0})$

$$= [h.\vec{x_{02}} + a.\vec{z_2}] \wedge (-m_2 . g . \vec{y_0})$$



$$= -m_2 . g . h . \vec{z_0} + m_2 . g . a . \sin\left(+\alpha + \theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{x_0}$$

$$= -m_2 . g . h . \vec{z_0} + m_2 . g . a . \cos(\alpha + \theta) . \vec{x_0}$$

négligé

• $\{\mathcal{D}_{\{1,2\}/0}\} = \cancel{\{\mathcal{D}_{1/0}\}} + \{\mathcal{D}_{2/0}\}$

Avec : ▪ $\vec{R}_{\mathcal{D}\,2/0} = m_2 . \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} = m_2 . \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G_2 \in 2/0}\right]_0$

et $\vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \cancel{\vec{V}_{G_2 \in 2/1}} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0}$

encastré

$$= \cancel{\vec{V}_{B \in 1/0}} + \vec{G_2B} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= (-h.\vec{x_0} - a.\vec{z_2}) \wedge (\omega . \vec{x_{02}})$$

$$= -a.\omega.\vec{y_2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{y_2})_0 = \cancel{\frac{d}{dt}(\vec{y_2})_2} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y_2}$$

$$= \omega . \vec{x_{02}} \wedge \vec{y_2} \qquad (\text{car } \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0})$$

$$= \omega . \vec{z_2}$$

donc $\vec{R}_{b\,2/0} = - m_2 . a . \omega^2 . \vec{z_2}$

$$= m_2 . a . \omega^2 . \sin(\alpha + \theta) . \vec{y_0} - m_2 . a . \omega^2 . \cos(\alpha + \theta) . \vec{z_0}$$

$$\vec{\delta}_{B,2/0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{B,2/0}\right]_0 + m_2 . \underbrace{\vec{V}_{B/0}}_{\vec{0}} \wedge \vec{V}_{G_2 \in 2/0}$$

$\vec{0}$: B est un pt qui reste fixe / à 0

et $\vec{\sigma}_{B,2/0} = I_B(2) . \vec{\Omega}_{2/0} + m_2 . \vec{BG_2} \wedge \cancel{\vec{V}_{B \in 2/0}}$

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_2 . \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_2$$

$$= A . \omega . \vec{x_2} - F . \omega . \vec{y_2} - E . \omega . \vec{z_2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{z_2})_0 = \cancel{\frac{d}{dt}(\vec{z_2})_2} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{z_2}$$

$$= \omega . \vec{x_2} \wedge \vec{z_2}$$

$$= - \omega . \vec{y_2}$$

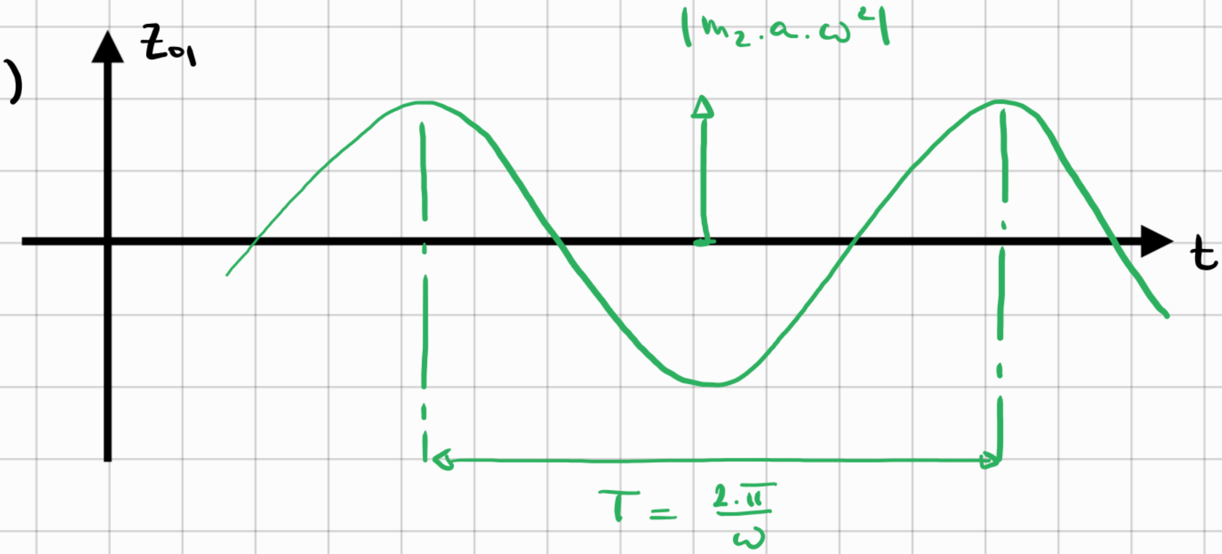
donc $\vec{\delta}_{B,2/0} = - F . \omega^2 . \vec{z_2} + E . \omega^2 . \vec{y_2}$

$$\vec{\delta}_{B,2/0} = \left[E . \omega^2 . \cos(\alpha + \theta) + F . \omega^2 . \sin(\alpha + \theta)\right] . \vec{y_0}$$

$$+ \left[E . \omega^2 . \sin(\alpha + \theta) - F . \omega^2 . \cos(\alpha + \theta)\right] . \vec{z_0}$$

2 On a $\theta(t) = \omega_1 . t$

a)



b) Il faut que $a = 0$. Cela signifie que le centre de gravité du solide en rotation est situé sur l'axe de rotation.

3 Il faut aussi $E = F = 0$.

4

a] z_{01} est maximal si $\cos(\alpha + \theta) = -1$

donc si $\alpha + \theta = \pi$

et donc si $\theta = \pi - \alpha$

Je relève $z_{01} = z_{01\,max}$ lorsque $\theta \simeq 2,3$ rad

et donc $\alpha \simeq 0,84$ rad

b] $z_{01\,max} = m_2.a.\omega^2 \simeq 160$ N donc $a = \frac{z_{01\,max}}{m_2.\omega^2}$

$a \simeq 2,47$ mm

c] $M_{01}(\theta = \pi - \alpha) = F.\omega^2.\underbrace{\sin(\cancel{\alpha} + \pi - \cancel{\alpha})}_{0} + E.\omega^2.\underbrace{\cos(\cancel{\alpha} + \pi - \cancel{\alpha})}_{-1}$

$= -E.\omega^2$

$M_{01}(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha) = F.\omega^2.\underbrace{\sin(\cancel{\alpha} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\alpha})}_{1} + E.\omega^2.\underbrace{\cos(\cancel{\alpha} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\alpha})}_{0}$

$= F.\omega^2$

d] Je relève $M_{01}(\theta = \pi - \alpha) \simeq 0$ donc $E \simeq 0$

$M_{01}(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha) \simeq 4$ N.m donc $F \simeq 1{,}1.10^{-5}$ kg.m^2

5. Il faut $\vec{BG}.\vec{y_2} = 0$ et $\vec{BG}.\vec{z_2} = 0$ où :

$$\vec{BG} = \frac{1}{m_2 + m_3 + m_4}.\left[m_2.\overbrace{\vec{BG_2}}^{= h.\vec{x_0} + a.\vec{z_2}} + m_3.\underbrace{\vec{BM_3}}_{= r.\vec{u_3}} + m_4.\overbrace{\vec{BM_4}}^{= c.\vec{x_0} + r.\vec{u_4}}\right]$$

Il faut donc :

- $-m_3.r.\sin\beta_3 - m_4.r.\sin\beta_4 = 0$

- $m_2.a + m_3.r.\cos\beta_3 + m_4.r.\cos\beta_4 = 0$

- Il faut aussi une matrice :

$$I_B(\{2,3,4\}) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix}_{\underline{2}}$$

$$= \underbrace{I_B(2)}_{\text{connue}} + I_B(3) + I_B(4)$$

Et $I_B(3) = \underbrace{I_{M_3}(3)}_{0 \text{ car masse ponctuelle}} + I_{B \to M_3}(3)$

$$\overrightarrow{BM_3} = r.\overrightarrow{u_3} = -r.\sin\beta_3.\overrightarrow{y_2} + r.\cos\beta_3.\overrightarrow{z_2}$$

Donc $I_B(3) = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ & \times & \times \\ \text{SYM} & & \times \end{bmatrix}_2$

De même avec $\overrightarrow{BM_4} = c.\overrightarrow{x_2} - r.\sin\beta_4.\overrightarrow{y_2} + r.\cos\beta_4.\overrightarrow{z_2}$

Donc $I_B(4) = \begin{bmatrix} \times & -m_4.c.r.\sin\beta_4 & +m_4.c.r.\cos\beta_4 \\ & \times & \times \\ \text{SYM} & & \times \end{bmatrix}_2$

Il faut donc :

$$-F - m_4.c.r.\sin\beta_4 = 0$$

$$-E + m_4.c.r.\cos\beta_4 = 0$$

6 Je prends donc $\beta_4 = \frac{\pi}{2} = 90°$

$$m_4 = -\frac{F}{c.r} \simeq 29 \text{ grammes}$$

Ensuite : $\left| \begin{array}{l} m_3.r.\sin\beta_3 = -m_4.r \\ m_3.r.\cos\beta_3 = -m_2.a \end{array} \right.$

Donc $\tan\beta_3 = \frac{m_4.r}{m_2.a}$ donc $\beta_3 = \arctan\left[\frac{m_4.r}{m_2.a}\right]$

$$\beta_3 \simeq 7°$$

Aussi : $m_3^2.r^2 = m_4^2.r^2 + m_2^2.a^2$

Et donc $m_3 = \sqrt{m_4^2 + m_2^2 \cdot \frac{a^2}{r^2}}$

$m_3 \simeq 239$ grammes