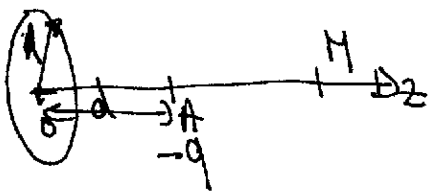
Ex : ensemble cercle - charge. (1)

1 -



$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2$

2 - $q = 2\pi R \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{q}{2\pi R}$

3 - * Pour $M \in (Oz)$, le champ créé par le cercle vaut :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_1 = -\overrightarrow{grad}(V_1(M)) = -\frac{dV_1}{dz}\vec{u}_z$$

$$+\frac{dV_1}{dz} = -\frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda R z (R^2+z^2)^{-3/2}}{2\varepsilon_0}$$

$$V_1(z) = +\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + K$$

$K = 0$ en prenant $V = 0$ qd $|z| \to \infty$.

$$V_1(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2+z^2}}$$

* La charge $-q$ crée en M un potentiel (2)

$z > d$ $\quad V_c(M) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 AM} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (z-d)}$

$z < d$ $\quad V_c(M) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (d-z)}$

$$V(M) = V_1(M) + V_c(M)$$

$z > d$: $\quad V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (z-d)}$

$z < d$: $\quad V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (d-z)}$

3 - $|z| \gg d$, $z > 0$

$$(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{z}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right)$$

$$(z-d)^{-1} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{d}{z}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{z}\left(1+\frac{d}{z}+\frac{d^2}{z^2}\right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\left(\frac{1}{z}+\frac{d}{z^2}\right)$$

$$\boxed{V(M) = -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 z^2}}$$

③

Si $z<0$:

$$(d-z)^{-1} = -(z-d)^{-1} \simeq -\frac{1}{z}\left(1+\frac{d}{z}+\frac{d^2}{z^2}\right)$$

$$(d^2+zd)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{d^2}{2d}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq -\frac{1}{z}\left(1-\frac{d^2}{2z^2}\right)$$

$$V(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{z}-\frac{d}{z^2}\right)$$

$$\boxed{V(M) = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 z^2}}$$

Si on pose $\vec{p} = q\,\vec{AO}$

$\vec{p}\cdot\vec{OM} = q\,\vec{AO}\cdot\vec{OM}$

$z>0$: $\vec{AO}\cdot\vec{OM} = -zd \quad OM^3 = z^3$

$z<0$: $\vec{AO}\cdot\vec{OM} = d|z| = -zd \quad OM^3 = (-z)^3$

D'où. $z>0$ $\quad V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$

$z<0$: $\quad V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$

On retrouve bien l'expression

④

du potentiel électrostatique créé par un dipôle de moment

$\vec{p} = q\,\vec{AO} = -qd\,\vec{e}_z$.