Ex: cylindre parcouru par un courant non homogène.

1 – 

$I = \iint_{M \in \text{disq. rayon } R} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M \qquad \vec{j}(M) = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z$

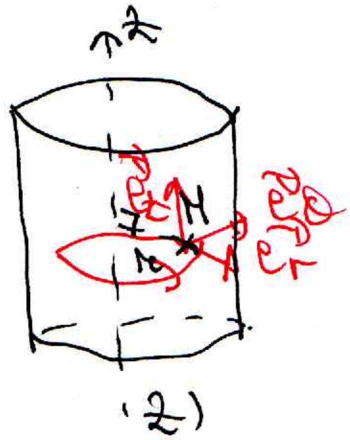
On découpe le disque en couronne comprise entre les cercles de rayons r et $r+dr$.
L'intensité traversant la couronne vaut :

$dI = j(r)\, 2\pi r\, dr$

$I = \int_0^R J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\, dr$

$I = J_0\left[\pi R^2 - \underbrace{\frac{2\pi}{R^2}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R}_{\frac{\pi R^2}{2}}\right] = J_0 \pi R^2\left[1 - \frac{1}{2}\right] = J_0 \frac{\pi R^2}{2}$

$$\boxed{J_0 = \frac{2I}{\pi R^2}}$$

2 – 

Le plan $(M ; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courant $\Rightarrow \vec{B}(M) \perp$ à plan
$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\,\vec{e}_\theta$

Invariance par rotation et translation selon $(z'z) \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$

Th. appliqué à un cercle de rayon r :
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)\, 2\pi r$

$\underline{r < R}$: $I_{enlacée} = \int_0^r J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\,dr$

$I_{enlacée} = 2\pi J_0\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]$

$I_{enlacée} = \frac{4I}{R^2}\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) = 2I\,\frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right).$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\frac{I\,r}{\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right)\vec{e}_\theta}$$

$\underline{r > R}$: $I_{enlacée} = I$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta}$$

Continuité en $r = R$ vérifiée.

3- $\underline{r<R}$

$\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{d(r B_\theta)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right)\right]$

$\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\frac{1}{r}\left(2r - \frac{2r^3}{R^2}\right)\vec{e}_z$

$\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0}{\pi R^2}\times\frac{\pi R^2}{2}\times 2 J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z = \mu_0 J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z$

$= \mu_0\vec{j}$

$\underline{r > R :}$

$\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{d}{dr}\left(r\times\frac{1}{r}\right)\vec{e}_z = \vec{0} = \mu_0\vec{j}$

L'éq. de Maxwell-Ampère est bien vérifiée.