

**DS SCIENCES PHYSIQUES N° 3**

**Les résultats doivent être encadrés, votre copie soignée .**

**Toute réponse doit être justifiée .**

**Vos copies doivent être numérotées sous la forme 1/4 , 2/4 , 3/4 ....**

**Un résultat numérique sans unité ne rapporte aucun point .**

**Tous les étudiants traiteront la chimie et l'exercice de la partie physique .**

**Deux problèmes au choix pour la partie physique : niveau 1 type CCINP-E3A ou niveau 2 type Centrale-Mines .**

**CHIMIE :**

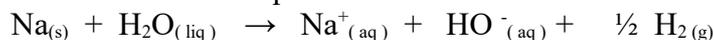
**Partie A : autour du potentiel chimique .**

**I- Dissolution du diiode :**

A 298K, la solubilité du diiode solide dans l'eau ( donnant du diiode aqueux ) vaut  $s = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$   
Sachant que, à 298K, le potentiel chimique standard de  $I_{2(s)}$  est nul, déterminer la valeur, à 298K, du potentiel chimique standard du diiode en solution aqueuse  $I_{2(aq)}$  .

**II- Variation des grandeurs thermodynamiques d'un système en réaction chimique :**

On envisage la réaction chimique du sodium solide dans de l'eau liquide à 298K et à pression constante.  
Il s'agit d'une réaction totale d'équation bilan :



On utilise 2,0 g de sodium et 200mL d'eau , le dihydrogène se dégage sous une pression de 1,1 bar .

On donne à  $T = 298 \text{ K}$  :

Espèce	$\text{Na}_{(s)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(l)}$	$\text{Na}^+_{(aq)}$	$\text{HO}^-_{(aq)}$	$\text{H}_{2(g)}$
Potentiel chimique standard $\mu^\circ$ en $\text{kJ.mol}^{-1}$	0	- 237,2	-261,9	- 157,3	0
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ en $\text{kJ.mol}^{-1}$	0	-285,8	-239,7	-230,0	0

Masses molaires :  $M(\text{Na}) = 23 \text{ g.mol}^{-1}$

$M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g.mol}^{-1}$

$R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1- Déterminer l'expression littérale de l'enthalpie libre avant et après réaction . En déduire la variation d'enthalpie libre du système . Faire l'application numérique .

2- Déterminer la variation d'enthalpie du système . Faire l'application numérique .

3- En déduire la variation d'entropie du système . Faire l'application numérique .

**Partie B : cinétique chimique .**

Les ions peroxydisulfate  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$  sont instables en solution aqueuse car ils oxydent lentement l'eau en dioxygène gazeux en formant des ions sulfates  $\text{SO}_4^{2-}$ , ce qui a pour effet d'acidifier la solution ( formation de  $\text{H}^+_{(aq)}$  ).

On cherche à savoir combien de temps une telle solution peut être conservée dans une pièce de stockage à 25 °C d'un laboratoire sans que sa concentration ne soit trop altérée.

Pour étudier la cinétique de la réaction, on suit l'évolution d'une solution de peroxydisulfate de sodium  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_8$  de concentration initiale  $C_0 = 10,0 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Ce suivi se fait en mesurant la pression dans un réacteur fermé de volume fixé.

Le tableau ci-dessous donne la concentration  $C$  en ions  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ , calculée à partir des mesures de pression, pour une manipulation réalisée à 80°C.

$t \text{ (min)}$	0	50	100	150	200	250
$C \text{ (mmol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	10,0	7,80	6,05	4,72	3,68	2,86

Par ailleurs, des expériences complémentaires ont permis de déterminer que l'énergie d'activation de la réaction vaut  $E_a = 140 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On donne : constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1 - Écrire l'équation de réaction traduisant l'instabilité des ions peroxodisulfate avec un coefficient 1 en valeur absolue pour le peroxodisulfate. Pourquoi est-il judicieux de faire le suivi cinétique par mesure de pression ?

2 - Quel est l'intérêt de mener l'étude expérimentale à 80°C alors que la pièce de stockage n'est qu'à 25°C ?

3 - Montrer que les résultats obtenus par le suivi temporel sont compatibles avec une cinétique d'ordre 1 par rapport aux ions peroxodisulfate. Déterminer la constante de vitesse à cette température.

4 - Pendant combien de temps peut-on conserver cette solution, à 25°C, sans que sa concentration ne varie de plus de 1% ?

5 - Qu'en est-il si l'on souhaite maintenant conserver une solution dix fois plus concentrée ?

## **PHYSIQUE :**

### **Exercice:**électrostatique

#### **A- Champ et potentiel créés par un ensemble de charges ponctuelles :**

On se place en coordonnées cartésiennes d'origine  $O$ . Un carré, de sommets  $A, B, C$  et  $D$ , a pour centre  $O$  et pour côté  $2a$ .  $A(a,a,0)$ ;  $B(a,-a,0)$ ;  $C(-a,-a,0)$  et  $D(-a,a,0)$ .

L'origine des potentiels est choisie à l'infini. Certaines questions peuvent se résoudre uniquement en étudiant les éléments de symétrie de la distribution de charges.

1- En  $A, B, C$  et  $D$  sont placées des particules identiques de charge  $q$ .

a- Déterminer le champ électrostatique en  $O$ .

b- Déterminer le potentiel en  $O$ .

2- En  $A$  et  $B$  sont placées deux particules identiques de charge  $q$ , en  $C$  et  $D$  deux particules identiques de charge  $-q$ .

a- Déterminer le champ électrostatique en  $O$ .

b- Déterminer le potentiel en  $O$ .

3- En  $A$  et  $C$  sont placées deux particules identiques de charge  $q$ , en  $B$  et  $D$  deux particules identiques de charge  $-q$ .

a- Déterminer le champ électrostatique en  $O$ .

b- Déterminer le potentiel en  $O$ .

#### **B- Champ et potentiel créés par une distribution cylindrique de charges :**

##### **1- Généralités :**

a- Donner les deux relations traduisant les propriétés locales du champ électrostatique, donner les deux relations intégrales correspondant à ces deux équations.

b- Rappeler la relation locale liant le champ et le potentiel électrostatiques au point  $M$ . Qu'est ce que cette relation implique sur les lignes de champ et les surfaces équipotentielles ?

On considère une distribution volumique de charges contenues dans un cylindre de rayon  $R_2$ , d'axe ( $Oz$ ) et de longueur très grande devant  $R_2$ .

Pour  $r < R_1$ , la densité volumique de charge est uniforme et égale à  $\rho_1$ .

Pour  $R_1 < r < R_2$ , la densité volumique de charge est uniforme et égale à  $\rho_2$ .

On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(Oz)$ , on appelle  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  la base orthonormée directe liée au point M.

## 2- Champ électrostatique :

a- Justifier soigneusement que  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ .

b- Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ créé en un point M de l'espace par cette distribution de charges (on distinguera plusieurs cas).

c- Déterminer l'expression du potentiel électrostatique en choisissant l'origine sur l'axe (on ne déterminera pas les constantes d'intégration pour  $r < R_1$  et  $R_1 < r < R_2$  mais on indiquera la relation permettant de les calculer).

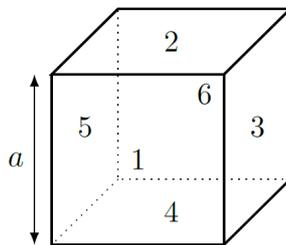
Données: gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}} U(r, \theta, z) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

**Problème Niveau 1 type CCINP – E3a Polytech :** quelques problèmes classiques de diffusion.

### Partie I : Déperditions thermiques à travers les parois de l'aquarium

On considère un aquarium cubique ayant une longueur d'arête  $a = 1,0$  m. Celui-ci possède une face avant nettoyée de tout calcaire notée 1, formée d'une vitre en verre en contact avec l'air extérieur à la température constante  $T_a = 12^\circ C$ . À cause d'une eau comportant une concentration importante en minéraux au pH considéré, le calcaire et d'autres sels précipitent sur les autres parois. Ainsi les faces 2, 3, 4, 5 et 6 sont recouvertes d'une couche de tartre puis d'une couche de béton pour le maintien de la structure.



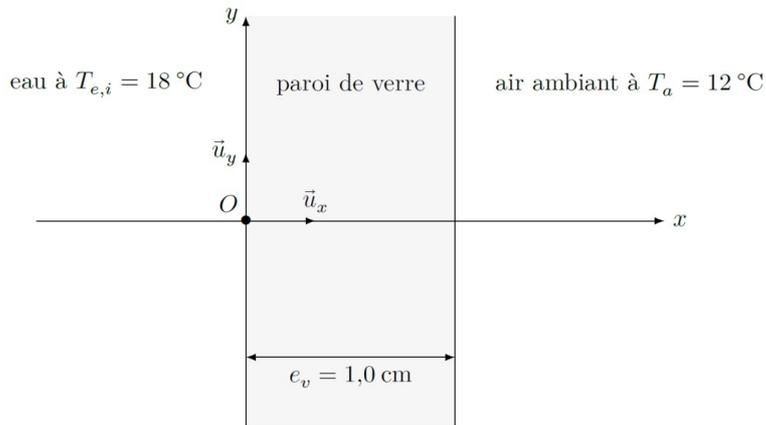
**Figure 1** Numérotation des faces de l'aquarium

#### A- Renouvellement de l'eau

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la paroi 1 de l'aquarium. Elle est constituée de verre d'épaisseur  $e_v = 1,0$  cm et sépare l'eau de l'aquarium de l'air extérieur. Les caractéristiques du verre sont données en fin d'énoncé.

L'eau issue de la citerne d'approvisionnement est à la température initiale  $T_{e,i} = 18^\circ C$ . L'aquarium était vide depuis suffisamment de temps pour considérer que celui-ci est à la température de l'air ambiant  $T_a = 12^\circ C$ . On remplit progressivement l'aquarium avec l'eau de la citerne.

On suppose que le flux thermique dans la paroi de verre s'effectue totalement dans la direction  $\vec{u}_x$  (figure 2) et on note  $T(x, t)$  la température dans le verre.



**Figure 2** Représentation de la paroi 1

1- Justifier que le vecteur densité de flux thermique ne dépende que de la coordonnée  $x$  :  
 $\vec{j}_{th}(x, t) = j_{th}(x, t) \vec{u}_x$  .

2- Montrer que, au sein de la paroi de verre, le champ des températures vérifie l'équation différentielle

$$\rho_v c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Comment appelle-t-on le coefficient  $\frac{\lambda_v}{\rho_v c_v}$  ? En quelle unité s'exprime-t-il ?

3- Exprimer l'ordre de grandeur de la durée nécessaire à l'établissement du régime stationnaire. Calculer sa valeur numérique.

### **B – Régime stationnaire**

On se place désormais dans le cas où le régime stationnaire est atteint.

4- Déterminer l'évolution de la température selon l'axe dans la paroi de verre 1. On suppose que

$$T(0) = T_{e,i} \quad \text{et} \quad T(e_v) = T_a \quad .$$

5- Donner une représentation graphique de  $T(x)$  .

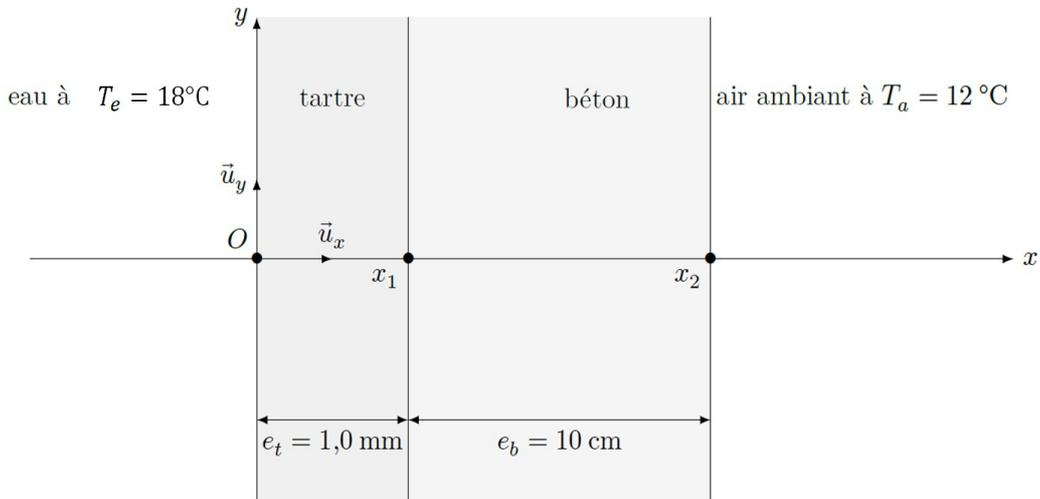
### **C – Pertes de puissance thermique**

Les poissons de cet aquarium ont besoin d'une température d'eau constante  $T_e = 18^\circ C$  . On suppose que cette condition est réalisée grâce à un dispositif de chauffage. On se place en régime stationnaire.

#### **C-I-Pertes par conduction thermique**

On suppose que les autres parois (2, 3, 4, 5 et 6) sont constituées d'une couche de tartre d'épaisseur  $e_t = 1,0 \text{ mm}$  , de conductivité thermique  $\lambda_t = 0,78 \text{ W.K}^{-1} . \text{m}^{-1}$  puis d'une couche de béton d'épaisseur  $e_b = 10 \text{ cm}$  de conductivité thermique  $\lambda_b = 1,7 \text{ W.K}^{-1} . \text{m}^{-1}$  (figure 3).

On ne tient compte dans cette section que du transfert thermique par conduction.



**Figure 3** Représentation des parois 2 à 6

6- En raisonnant sur une analogie électrique, établir l'expression de la résistance thermique de conduction d'une plaque d'aire  $S$ , d'épaisseur  $e$  constituée d'un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ .

On s'intéresse à une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton.

7- Déterminer l'expression puis la valeur de la résistance thermique de conduction  $R_{cond}$ , comprise entre les abscisses  $x=0$  et  $x_2$ , équivalente à l'association de la couche de tartre suivie de la couche de béton.

### C-II- Prise en compte de pertes convectives et du rayonnement

Les transferts convectifs entre la paroi de béton et l'air sont modélisés par la loi de Newton.

On note  $h_{conv} = 14 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , le coefficient de transfert conducto-convectif entre la paroi de béton et l'air,  $T(x_2)$  la température du béton à l'abscisse  $x_2$  et  $T_a = 12^\circ\text{C}$  la température de l'air ambiant.

On note  $R_{conv}$  la résistance thermique associée au transport convectif.

Le transfert thermique par rayonnement entre la paroi de béton et l'extérieur est modélisé par le flux de rayonnement total  $\Phi_{ray} = h_{ray} a^2 (T(x_2) - T_a)$  avec  $h_{ray} = 4\epsilon\sigma T_a^3$

où  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  est appelée constante de Stefan-Boltzmann,  $\epsilon$  est l'émissivité du béton caractérisant l'efficacité du transfert radiatif.

On note  $R_{ray}$  la résistance thermique associée au transport radiatif.

8- Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer  $R_{conv}$  et  $R_{ray}$ . Déterminer leurs valeurs numériques.

9- Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer la résistance thermique  $R_{th}$  tenant compte des différents modes de transfert de la chaleur en fonction de  $R_{cond}$ ,  $R_{conv}$  et  $R_{ray}$ . On s'appuiera sur un schéma électrique équivalent. Déterminer la valeur de  $R_{th}$ .

10- On suppose que la température du tartre à l'interface eau-tartre est égale à celle de l'eau ( $T(0) = T_e$ ). Exprimer et calculer la température  $T(x_2)$  sur la paroi de béton.

**C-III- Bilan des pertes thermiques :**

11- Calculer la résistance thermique de la paroi de verre 1 en tenant compte des transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement . On donne, pour l'interface verre-air,  $h_{conv,v}=30 W.m^{-2} . K^{-1}$  et l'émissivité du verre  $\epsilon_v=0,90$  . On suppose que la température du verre à l'interface eau-verre est égale à celle de l'eau .

12- Estimer la puissance thermique perdue à travers l'ensemble des parois de l'aquarium . Quelle solution peut-on envisager pour limiter ces pertes ?

**Données :**

- Masse volumique du verre  $\rho_v=2,5 . 10^3 kg.m^{-3}$
- Conductivité thermique du verre  $\lambda_v=1,1 W.m^{-1} . K^{-1}$
- Capacité thermique massique du verre  $c_v=720 J.K^{-1} . kg^{-1}$

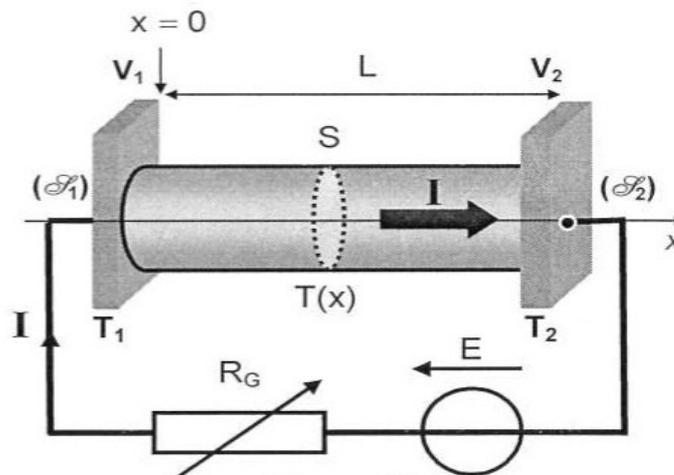
**Partie II : diffusion dans un fil parcouru par un courant .**

Considérons un fil métallique cylindrique, homogène, de section droite S dont le rayon vaut a et de longueur L. Le rayon de ce fil est supposé petit par rapport à sa longueur.

Le métal constitutif possède une conductivité thermique  $\lambda$ , une résistivité électrique  $\rho$  ( la résistivité est l'inverse de la conductivité ) , une masse volumique  $\mu$  et une capacité thermique massique C.

Le fil est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I, répartie uniformément sur toute la section S (Figure ci-dessous). Les sections terminales ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont maintenues simultanément à des températures constantes  $T_1$  et  $T_2$ , et à des potentiels constants  $V_1$  et  $V_2$ . Après établissement d'un régime stationnaire, les surfaces isothermes et équipotentielles sont des plans orthogonaux à l'axe Ox.

La résistivité électrique  $\rho$  du fil est indépendante de la température et le fil est considéré comme un conducteur ohmique ayant une résistance constante  $R=\rho \frac{L}{S}$  . Le courant électrique produit, à l'intérieur du fil une puissance volumique uniforme  $p_j=\frac{\rho I^2}{\pi^2 a^4}$  Les dimensions du fil ne varient pas avec la température.



**Toute l'étude est réalisée en régime stationnaire .**

Dans le fil, le vecteur densité de courant thermique sera noté  $\vec{j}_{th}(x)=j_{th}(x)\vec{u}_x$  .

1- Rappeler la loi de Fourier pour une densité de courant thermique notée  $\vec{j}_{th}(x)=j_{th}(x)\vec{u}_x$  . Exprimer

le flux ( ou puissance ) thermique  $\Phi(x)$  traversant une section droite S du fil .

2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$  dans le fil en supposant les parois latérales de celui-ci calorifugées .

En déduire l'expression de  $T(x)$ , puis celle de la densité volumique de courant de chaleur  $j_{th}(x)$  en fonction de  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $S$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $L$ ,  $x$  et  $I$ .

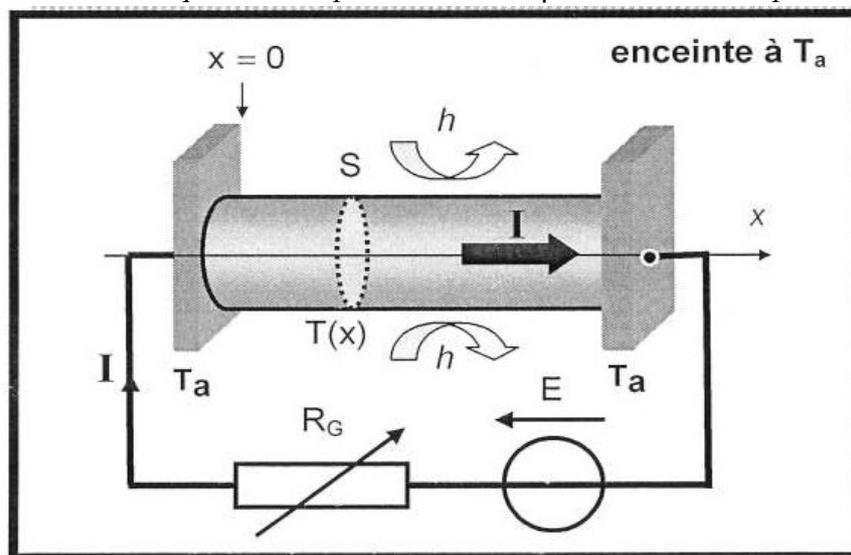
3- Ecrire le courant de chaleur ou flux thermique  $\Phi(x)$  le long du fil, en notant  $G_{th} = \frac{\lambda S}{L}$  sa conductance thermique et  $R$  sa résistance électrique.

4- Déterminer la puissance thermique  $\Phi_2$  cédée à la source de température  $T_2$ . Interpréter physiquement le résultat obtenu.

*Le dispositif précédent est maintenant placé dans une enceinte maintenue à une température uniforme  $T_a$ . Le fil est relié à deux bornes maintenues rigoureusement à la même température  $T_a$ . La capacité thermique de ces bornes est suffisamment grande pour que leurs températures restent constantes et égales à  $T_a$ . (Figure ci-dessous)*

*Le fil subit, à travers sa surface latérale, des pertes thermiques conducto-convectives latérales ; elles correspondent à la puissance thermique  $d\Phi_{cc} = h[T(x) - T_a]d\Sigma$  cédée par le fil au milieu extérieur,  $h$  étant le coefficient d'échange et  $d\Sigma$  un élément de surface latérale du fil.*

*Afin d'améliorer la précision de la mesure, il convient de tenir compte de la variation de la résistivité électrique en fonction de la température, suivant la loi :  $\rho(x) = \rho_a [1 + \beta(T(x) - T_a)]$ , où  $\rho_a$  désigne la résistivité électrique à la température  $T_a$  et  $\beta$  une constante positive.*



5- Proposer, en raisonnant sur une tranche élémentaire de fil de longueur  $dx$  et de section  $S$ , un bilan des flux thermiques en présence ; en déduire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur  $\theta(x) = T(x) - T_a$ , sous la forme :

$$\frac{d^2(\theta(x))}{dx^2} + m^2 \theta(x) = -k$$

Exprimer  $m^2$  en fonction du périmètre  $p$  de la section droite, de  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\rho_a$ ,  $\beta$ ,  $S$  et  $I$ , puis écrire  $k$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\rho_a$ ,  $S$  et  $I$ .

6- Montrer que, selon la valeur de l'intensité  $I$  du courant, trois types de solutions mathématiques de  $\theta(x)$  sont attendues. (aucune résolution de l'équation différentielle n'est demandée)

Réalisons l'expérience suivante : le fil est alimenté par un courant dont l'intensité  $I_0$  correspond au cas particulier où  $m^2=0$ .

7- Préciser la valeur  $I_0$  de cette intensité en fonction de  $h, p, \rho_a, \beta$  et  $S$ .

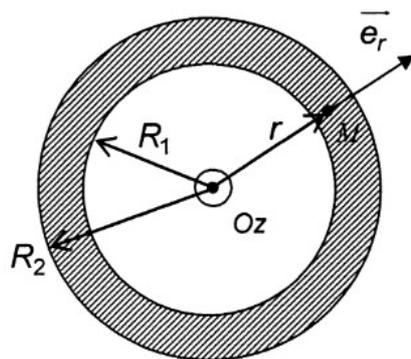
Résoudre l'équation différentielle qui en résulte en établissant la loi de variation de la température  $\theta(x)$ . Illustrer son évolution à l'aide d'un schéma. Analyser physiquement le résultat obtenu.

8- Exprimer la résistance électrique totale  $R_a$  du fil, à la température uniforme  $T_a$ , puis celle de sa résistance  $R$  lorsqu'il est à la température  $T(x)$  à l'abscisse  $x$  en fonction de  $R_a, \beta, k$  et  $L$ .

En déduire la variation relative de résistance  $\delta = \frac{(R-R_a)}{R_a}$ , puis l'écrire en fonction des grandeurs  $h, p, \lambda, L$  et  $S$ .

### Partie III : échanges thermiques à travers un tube cylindrique

Considérons un tube cylindrique d'axe  $Oz$ , de rayon intérieur  $R_1$  de rayon extérieur  $R_2$  et de très grande longueur (figure ci-dessous). Le tube est réalisé dans un matériau de conductivité thermique notée  $\lambda$ .



1- Dans le cas général, rappeler la loi de Fourier qui relie le vecteur densité de courant thermique, noté  $\vec{j}_Q$  au gradient de la température.

Justifier en quelques mots que la conductivité thermique, telle qu'elle apparaît dans la loi de Fourier, est toujours un nombre positif.

Le système est en régime permanent : la température  $T(r)$  en un point  $M$  du tube ne dépend donc que de  $r$ , la distance de  $M$  à l'axe (coordonnées cylindriques). Les températures de surface sont notées  $T_1 = T(R_1)$  et  $T_2 = T(R_2)$ .

On donne le gradient en coordonnées cylindriques :  $\vec{\text{grad}} U(r, \theta, z) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$

2- Préciser la direction du vecteur  $\vec{j}_Q$  dans le tube.

Exprimer la puissance thermique  $P_{th}(r)$  sortant d'un cylindre de rayon  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) et de longueur,  $L$  en fonction de  $j_Q(r)$ ,  $L$  et  $r$ .

3- En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système correctement choisi, montrer que la puissance thermique  $P_{th}(r)$  est indépendante de  $r$ . Cette puissance sera notée  $P_{th}$  par la suite. En déduire l'expression de la température  $T(r)$  en fonction de  $P_{th}$ ,  $r, R_1, \lambda, T_1$  et  $L$ .

4- Etablir que la puissance thermique  $P_{th}$  peut s'écrire :  $P_{th} = g L (T_1 - T_2)$  (1) en exprimant  $g$  en

fonction de  $\lambda$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

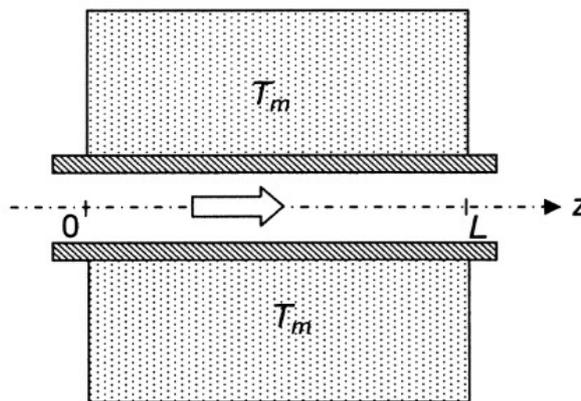
5- Calculer  $g$  pour un tube possédant les caractéristiques suivantes :  
 conductivité thermique  $\lambda = 0,40 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , rayons  $R_1 = 8,0 \text{ mm}$  et  $R_2 = 8,5 \text{ mm}$ .

*Le tube précédent est utilisé comme « échangeur thermique » permettant les transferts thermiques entre un fluide (appelé fluide caloporteur – ici il s’agit d’eau) transporté dans le tube et le milieu extérieur.*

*Le fluide caloporteur est supposé incompressible, de masse volumique  $\rho$  constante et de capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  (phase condensée idéale) ; il s’écoule dans le tube avec un débit massique  $D_m$ .*

*Dans cette partie, tout phénomène de viscosité est négligé. L’écoulement est supposé uniforme et stationnaire. Dans une section d’abscisse  $z$  constante, la température du fluide est uniforme et notée  $T_f(z)$ .*

*Le tube, parcouru par le fluide caloporteur est mis en contact, sur une longueur  $L$  (comprise entre les sections  $z = 0$  et  $z = L$ ) avec un milieu extérieur de température  $T_m$ , qui demeure constante et uniforme dans tout l’espace, comme l’illustre la figure ci-dessous.*



*Les contacts thermiques sur les faces internes et externes du tube sont supposés parfaits : la température  $T_2$  de la surface externe du tube est égale à  $T_m$  et, localement, la température  $T_1$  de la surface interne est égale à  $T_f(z)$ . Le fluide pénètre dans le tube à la température d’admission :  $T_{adm} = T_f(0) < T_m$ .*

*Toute conduction thermique au sein du fluide est négligée.*

6- En appliquant le premier principe industriel à une portion élémentaire située entre  $z$  et  $z + dz$ , exprimer en  $\frac{dT_f}{dz}$  fonction de  $T_m - T_f(z)$  et de la longueur  $l_1 = \frac{D_m c_p}{g}$ .

7- Déterminer  $T_f(z)$  en fonction de  $z$ ,  $T_{adm}$ ,  $T_m$  et  $l_1$ .  
 Représenter graphiquement  $T_f(z)$ .

8- Exprimer la puissance thermique totale  $P_{th,ech}$  fournie par le fluide caloporteur au milieu en fonction de  $D_m$ ,  $c_p$ ,  $T_m$ ,  $T_{adm}$ ,  $L$  et  $l_1$ .

## Problème Niveau 2 type centrale-mines : diffusion thermique

### Partie I : Refroidissement des supraconducteurs

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ( $T < T_{SC}$ ) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique permanent sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de Fourier, de masse volumique  $\rho$  et de capacité thermique massique  $c$ . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'intérieur du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$  où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de Newton : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température  $T$  vers le fluide de température  $T_f$ , par unité de temps et par unité d'aire, est  $j_{par} = k(T - T_f)$  où  $k$  est une constante.

Les études menées en A et B sont totalement indépendantes.

#### A- Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie A à la forme d'une boule de rayon  $R$ , de température uniforme  $T(t)$ . Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante  $T_0 < T_{SC}$  (cf figure 1). On appelle  $T_s(t)$  la température du fluide en contact immédiat avec la sphère.

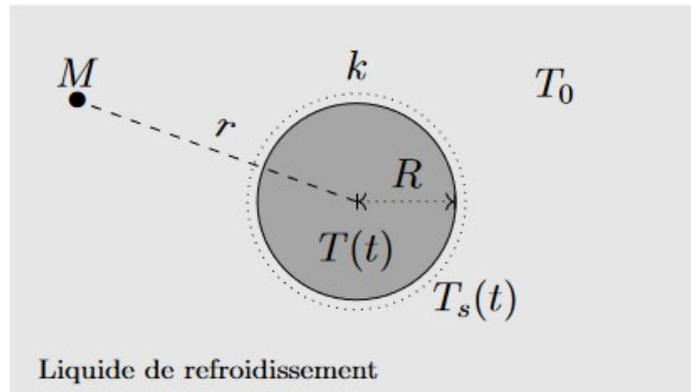


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

1- Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de  $k$  et  $\lambda$ .

Établir, dans le cas unidimensionnel sphérique, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.

2- Rappeler l'expression de la diffusivité thermique  $D_{th}$  d'un matériau.

À quelle condition, portant sur la durée  $\Delta t$  du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme uniforme est-elle légitime ? On se placera dans ce cas dans la suite.

3- Exprimer en fonction des données la capacité thermique  $C_{th}$  de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement  $R_{th}$  associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température  $T_f(M, t)$  en un point  $M$  du liquide supposé immobile ne

dépend que de la distance  $r$  au centre  $O$  de la boule (figure 1) et de  $t$ . On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée  $\lambda'$ .

4- Montrer que  $T_f(r, t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] \frac{R}{r}$ .

5- Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique ? Exprimer la résistance thermique  $R_{th}'$  associée au refroidissement conductif, en fonction de  $\lambda'$  et  $R$ .

On suppose pour finir que  $\lambda' \gg Rk$ .

6- Déterminer l'équation d'évolution de la température  $T(t)$  de la boule solide ; on posera  $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$

7- On notera  $T_i = T(t=0)$  la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe  $T(t)$  et exprimer la durée  $\Delta t$  au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur  $\rightarrow$  supraconducteur.

### B- Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur.

Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique  $T_{SC}$  a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de quench (voir figure 2).

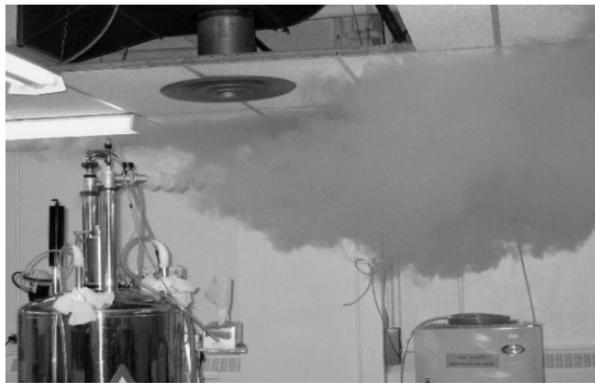


FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de quench.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon  $R$ , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme  $T_0 < T_{SC}$ , avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de Newton.

La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante  $p_u$ .

8- Exprimer la puissance totale  $P_s(r)$  évacuée par une hauteur  $H$  de la partie du fil située au plus à la distance  $r$  de l'axe avec  $0 \leq r < R$ , cf. figure 3.

9- En déduire, en régime permanent, l'intensité  $j_{th}(r)$  de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.

10- Déterminer l'expression de la température de surface  $T_s$  en fonction de  $T_0, k, p_u$  et  $R$ .

11- À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale ? Déterminer l'expression de la valeur  $T_{max}$  correspondante.

Montrer que le phénomène de quench ne se produit pas si  $p_u$  est inférieur à une valeur critique  $p_{max}$  que l'on exprimera.

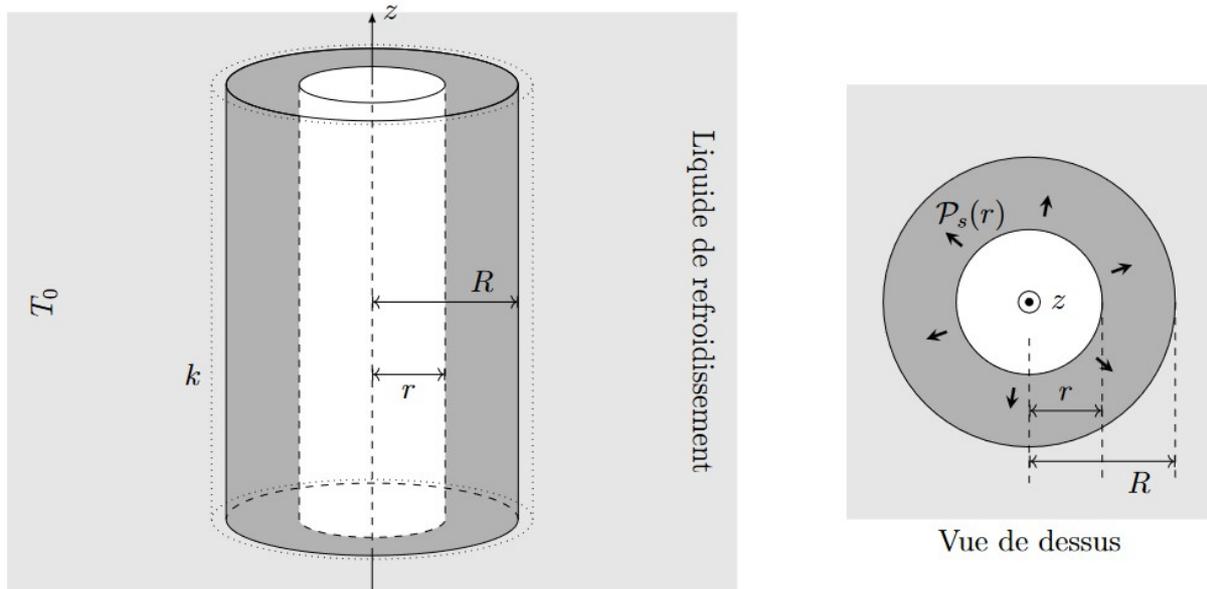


FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

### Partie II : combustion d'une poutre

Le 15 avril 2019, un violent incendie s'est déclaré dans la cathédrale de Notre-Dame de Paris. La charpente constituée de milliers de poutres provenant de chênes centenaires a entièrement brûlé, la flèche réalisée en plomb s'est effondrée et la structure a été endommagée.

#### A- Propagation de la chaleur dans le combustible

1- Citer les trois modes de transfert thermique et donner leurs spécificités.

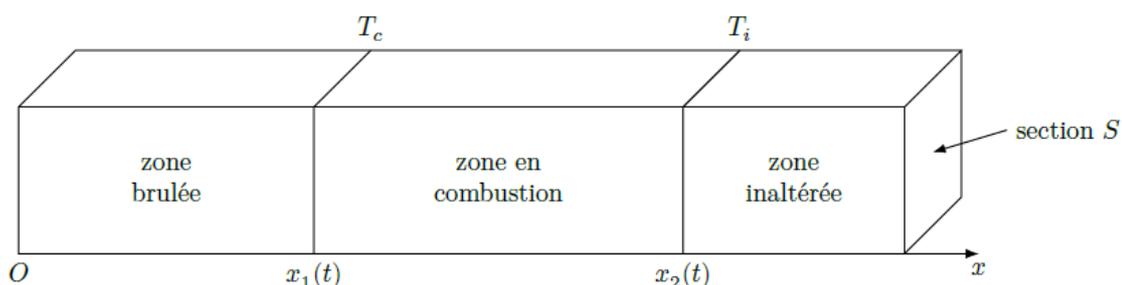
2- Indiquer le rôle de chacun de ces modes dans la propagation d'un incendie.

On s'intéresse à l'avancée du front de combustion, au cours du temps, d'une poutre qui entre en combustion par l'une de ses extrémités. On fait l'hypothèse que les transferts thermiques dans le bois sont de nature purement diffusive.

La poutre en combustion est un parallélépipède, infiniment long dans la direction (Ox). La température sur une section transverse d'aire S de la poutre est supposée uniforme. On note  $T(x, t)$  la température à l'abscisse x de la poutre à un instant t.

On suppose que le feu prend à l'une de ses extrémités d'abscisse nulle à un instant pris comme origine des temps ( $t = 0$ ). À un instant t ultérieur, on estime, dans ce modèle simple, que la poutre peut-être découpée en trois zones :

- la zone ayant brûlé entre l'instant initial et l'instant t, dont la température est supposée constante et égale à la température  $T_c$ , dite température de combustion,  $T_c = 720$  K ;
- une zone dans laquelle se déroule la combustion ;
- la zone encore inaltérée.



On note  $x_1(t)$  l'abscisse de la frontière entre la zone brûlée et la zone de combustion et  $x_2(t)$  l'abscisse de la frontière entre la zone de combustion et la zone inaltérée. Loin de  $x_2(t)$ , la température est supposée constante et égale à  $T_\infty = 320 \text{ K}$ .

La température  $T(x, t)$  dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion  $T_c$  et d'inflammation du bois  $T_i = 520 \text{ K}$ , conduisant à l'avancement des frontières  $x_1$  et  $x_2$  au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de brûler, on a toujours  $T(x_1(t), t) = T_c$  et  $T(x_2(t), t) = T_i$ .

Les valeurs des conductivités thermiques, notées  $\lambda$ , et des diffusivités thermiques, notées  $D$ , du charbon et du bois étant relativement proches, nous considérerons qu'elles sont égales dans les trois zones. Nous prendrons comme valeur de la diffusivité thermique  $D = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On rappelle que la diffusivité thermique d'un matériau est le rapport entre sa conductivité thermique et sa capacité thermique volumique à pression constante.

On note  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante du bois dans la zone de combustion,  $\rho$  la masse volumique et  $p_c$  la puissance thermique massique correspondant à l'enthalpie de réaction de combustion par unité de masse de bois et par unité de temps. On donne  $p_c = 4,0 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $c_p = 2,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**3-** Effectuer un bilan d'enthalpie sur un élément de longueur  $dx$  de poutre de bois de section  $S$  compris entre  $x$  et  $x+dx$ , dans la zone de combustion. En supposant la loi de Fourier applicable, en déduire l'équation régissant l'évolution de la température  $T(x, t)$  dans la zone de combustion. Mettre cette

équation sous la forme 
$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K$$

en précisant les expressions de  $D$  et  $K$  en fonction des données du problème.

**4-** De même, écrire l'équation régissant l'évolution de la température  $T(x, t)$  dans la zone non altérée.

On souhaite dans un premier temps vérifier si l'on peut se placer dans le cadre simplifié de l'approximation des régimes quasi stationnaires thermiques.

**5-** Calculer la durée caractéristique  $\tau_d$  de diffusion thermique pour une longueur d'une dizaine de centimètres d'un tronçon de poutre. Comparer ce temps de diffusion à l'ordre de grandeur de la durée  $\tau_c$  de combustion d'une même longueur de poutre. Conclure.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose  $u = x - ct$  où  $c$  est une constante positive et on effectue le changement de variables tel que  $T(x, t) = \theta(u)$ .

**6-** Donner une interprétation de la quantité  $c$ .

**7-** Déterminer les équations différentielles régissant l'évolution de la dérivée de  $\theta(u)$  dans la zone inaltérée et dans la zone en combustion.

**8-** Montrer que la forme générale des solutions  $\theta_i(u)$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) dans chacune des trois zones respectives peut s'écrire :

→  $\theta_1(u) = a_1$  pour  $u < u_1$

→  $\theta_2(u) = a_2 + b_2 \exp\left(\frac{-c}{D}u\right) - \frac{K}{c}u$  pour  $u_1 < u < u_2$

→  $\theta_3(u) = a_3 + b_3 \exp\left(\frac{-c}{D}u\right)$  pour  $u > u_2$

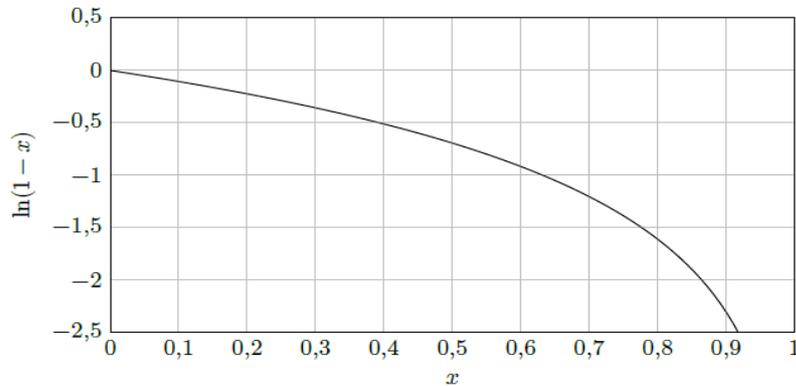
**9-** Déterminer, en justifiant la réponse, les expressions de  $a_1$  et  $a_3$  en fonction des données.

10- Tracer l'allure de la fonction  $\theta(u)$  dans la poutre.

11- Quelles conditions permettent d'obtenir les constantes  $a_2, b_2, b_3$  ? On écrira ces conditions sans chercher à déterminer les expressions de ces constantes .

On montre que la constante  $c$  est solution de l'équation : 
$$\frac{c^2}{KD}(T_c - T_\infty) = -\ln\left(1 - \frac{c^2}{KD}(T_i - T_\infty)\right)$$

On se propose de déterminer la valeur de  $c$  par une méthode graphique. La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \ln(1 - x)$  est fournie ci-dessous .



12- Déterminer une valeur approchée de  $c$ . Conclure.

13- Estimer la durée de combustion complète d'un mètre de poutre.

Données :

On rappelle que si  $f(x, t) = g(u, v)$  avec  $u$  et  $v$  des fonctions de  $x$  et  $t$  alors 
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$