EQUATIONS DE MAXWELL .

Les quatre équations de Maxwell (James Clerk Maxwell physicien écossais, formulées en 1865) constituent les postulats de base de l'électromagnétisme . Elles ont été construites progressivement à partir des travaux de plusieurs physiciens (Thomson, Faraday …) .

I- Champ électromagnétique :

Objet de l'électromagnétisme : décrire les interactions qui s'exercent à l'intérieur et à l'extérieur d'un système (D) de charges en mouvement .
Dans un référentiel (R) , ce système sera décrit par une densité volumique de charge $\rho(M,t)$ et une densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$.
L'action de (D) peut être caractérisée en M à l'instant t par un ensemble de deux champs vectoriels $(\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t))$: le champ électromagnétique .

Remarque :
→ Le champ électromagnétique est accessible expérimentalement via la force de Lorentz . Plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t),\vec{B}(M,t))$, une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}(M,t)$ est soumise à la force de Lorentz $\vec{F}=q(\vec{E}(M,t)+\vec{v}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t))$
→ Le champ électromagnétique a un caractère relatif, il est modifié par changement de référentiel .

II- Equation de conservation de la charge :

1- Cas d'un problème à une dimension :

2- Généralisation :

III- Equations de Maxwell – Formulations locale et intégrale :
Leurs formes locales et intégrales contiennent toute l'information sur le champ électromagnétique .

1- Equations de Maxwell (formulation locale) :
a-
Equation Maxwell-Gauss :

Equation de Maxwell-Thomson :
(Maxwell- Flux)

Equation de Maxwell-Faraday :

Equation de Maxwell-Ampère :

b- Propriétés – Remarques :
→ Les équations de Maxwell étant linéaires $(\vec{E}, \vec{B})$ **vérifie le principe de superposition** .
En particulier, si on intègre les équations de Maxwell par rapport au temps, les constantes d'intégration qui s'introduisent peuvent être interprétées comme des champs statiques . Si le problème est uniquement dynamique alors ces constantes seront nulles .

→ En régime dynamique les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés via les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère .
Ces équations montrent également que les distributions de charges et courants ne sont pas les seules

source de champ électromagnétique .
L'équation de Maxwell-Faraday montre qu'un champ magnétique variable dans le temps est, au même titre qu'une distribution de charges, source du champ $\vec{E}$.
L'équation de Maxwell-Ampère montre qu'un champ électrique est, au m^me titre qu'une distribution de courant, source du champ $\vec{B}$.

c- Propriétés de symétrie du champ électromagnétique :

→ Champ magnétique : .

L'étude des symétries doit être faite par rapport à $\vec{j}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Soit M un point quelconque de l'espace .

Si M appartient à un plan de symétrie (Π_S) de la distribution de courant et de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ alors $\vec{B}(M)$ est orthogonal à (Π_S) .

Si M appartient à un plan de d'antisymétrie (Π_A) de la distribution de courant et de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ alors $\vec{B}(M)$ appartient à (Π_A) .

Si dans une zone de l'espace $\vec{j}=\vec{0}$ alors c'est $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui détermine la géométrie de $\vec{B}$ dans cette zone .

→ Champ électrique :

Dans le cas général, les symétries de $\vec{E}$ ne sont pas simples à étudier .

Dans une zone vide de charges , $\vec{E}$ vérifie les équations locales

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \vec{rot}\, \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ces équations sont de la même forme que celles vérifiées par $\vec{B}$ en régime statique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Si M appartient à un plan de symétrie (Π_S) de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ alors $\vec{E}(M)$ est orthogonal à (Π_S) .

Si M appartient à un plan de symétrie (Π_A) de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ alors $\vec{E}(M)$ appartient à (Π_A) .

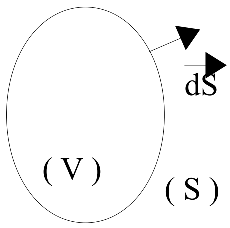
d- Equation de conservation de la charge :

A partir des équations de Maxwell, on peut retrouver l'équation de conservation de la charge .

2- Formulation intégrale :

a- Equation de Maxwell-Thomson :

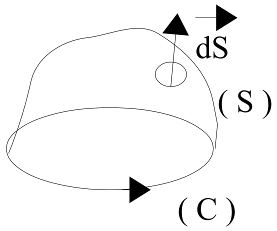
Intégrons l'équation de Maxwell-Thomson sur un volume (V) délimité par une surface fermée (S) .



L'équation de Maxwell-Thomson traduit le caractère conservatif du flux de $\vec{B}$. Une des conséquence de cette conservation est que le flux de $\vec{B}$ à travers une surface ouverte s'appuyant sur un contour fermé (C) ne dépend qe de (C) .
Les lignes de champ de $\vec{B}$ sont fermées et tourbillonnent autour des sources .

b- Equation de Maxwell-Faraday :

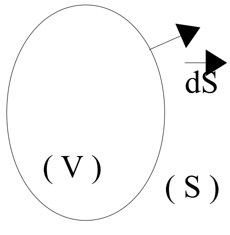
Intégrons l'équation de Maxwell-Faraday sur une surface ouverte (S) s'appuyant sur un contour fermé (C) .



L'équation de Maxwell-Faraday traduit le fait qu'un flux magnétique variable dans le temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservation .
La formulation intégrale est **la loi de Faraday**, loi qui régit notamment les phénomènes d'induction électromagnétique .

c- Equation de Maxwell-Gauss :

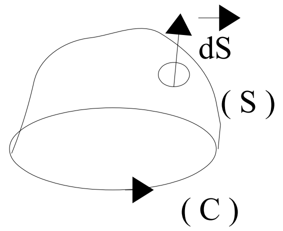
Intégrons l'équation de Maxwell-Gauss sur un volume (V) délimité par une surface fermée (S) .



L'équation de Maxwell-Gauss rend compte du théorème de Gauss .

d- Equation de Maxwell-Ampère :

Intégrons l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface ouverte (S) s'appuyant sur un contour (C) fermé .



L'équation de Maxwell-Ampère exprime le théorème d'Ampère généralisé .

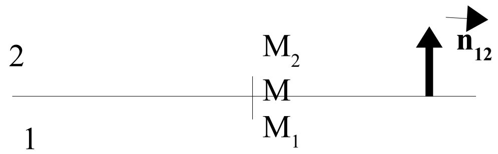
Le flux de $\vec{j}_D$ intervient au même titre que is , Maxwell a donné à $\vec{j}_D$ **le nom de vecteur densité de courant de déplacement .**

$\vec{j}$ est associé aux **courants de conduction .**

3- Relations de passage du champ électromagnétique à la traversée d'une surface chargée :(non exigible)

On considère une surface (S) séparant deux milieux 1 et 2 ayant les propriétés du vide . Cette surface porte des charges en surface caractérisées par une densité surfacique au point M $\sigma(M,t)$ et des courants de densité surfaciques $\vec{j}_S(M,t)$.

Par un passage à la limite des équations de Maxwell, on montre que pour deux points M_1 et M_2 infiniment voisins de M et appartenant respectivement aux milieux 1 et 2



$\vec{E}(M_2)-\vec{E}(M_1)=\frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\vec{n}_{12}$ M_1 et M_2 étant deux points infiniment voisins de M respectivement situés dans les milieu 1 et 2 et σ (M) la densité surfacique de charge au point M .

Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$: $\vec{E}_{t2}-\vec{E}_{t1}=\vec{0}$

Discontinuité de la composante normale de $\vec{E}$: $E_{n2}-E_{n1}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$\vec{B}(M_2)-\vec{B}(M_1)=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}$ $\vec{j}_s$ étant la densité surfacique de courant au point M .

Continuité de la composante normale de $\vec{B}$: $B_{n2}-B_{n1}=0$

Discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$: $\vec{B}_{t2}-\vec{B}_{t1}=\mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{n}_{12}$

4- Equation de propagation des champs dans une région vide de charge et courant .

Les équations de Maxwell montre qu'en régime dynamique, il existe un couplage spatio-temporel entre les champs électrique et magnétique . Ce couplage est à l'origine d'une propriété fondamentale du champ électromagnétique : celui-ci peut se propager .

Dans la cas d'une région vide de charge et de courant, déterminons les équations d'ordre 2 vérifiées par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

IV Cas du régime statique : (rappels)

→ div $\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ↔ $\oiint_{(S)} \vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Qint}{\epsilon o}$ S étant une surface fermée

$\vec{rot}\,\vec{E}=\vec{0}$ ↔ $\oint_{(C)} \vec{E}\,.\vec{dl}=0$ C étant un contour ferm é

$\vec{rot}(\vec{grad})=\vec{0}$ il existe une fonction scalaire V(M) (potentiel électrostatique telle que

$E(\vec{M})=-\vec{grad}\,V(M)$ ↔ $V_A-V_B=\int_A^B E(\vec{M}).\vec{dl}=\int_A^B -grad\,\vec{V}(M).\vec{dl}$

div $(-\vec{grad}(V))=-\Delta V=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson $\Delta V+\frac{\rho}{\epsilon o}=0$

→ div $(\vec{B})=\vec{0}$ ↔ $\oiint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS}=0$

$\vec{rot}\,B(\vec{M})=\mu_0\,j(\vec{M})$ ↔ $\oint_{(C)} \vec{B}.\vec{dl}=\mu_0 I_{enlacé}$

→ div $(\vec{j})=0$ ↔ $\oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{dS}=0$

$\vec{j}$ est à flux conservatif

Conséquence : l'intensité est la même à travers toute section d'un tube de courant .

V Approximation des régimes quasi-stationnaires :

Il existe deux types d'Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) .

Ici nous nous intéressons à l'ARQS magnétique .

Soit a la distance caractéristique de variation des champs , T la durée caractéristique de variation des champs , E et B les valeurs typiques des variations des composantes des champs .

Des courants variables créent un champ $\vec{B}$ mais aussi un champ $\vec{E}$.

$\vec{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ D'où $\frac{B}{a}\approx\mu_0 j+\epsilon_0\mu_0\frac{E}{T}$

$\vec{rot}\,\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\frac{E}{a}\approx\frac{B}{T}$ d'où $E\approx\frac{B\,a}{T}$

$$\frac{B}{a} \approx \mu_0 j + \frac{Ba}{c^2 T^2}$$

Le terme $\frac{Ba}{c^2 T^2}$ présente un écart par rapport au cas statique .

Si $\frac{Ba}{c^2 T^2} \ll \frac{B}{a}$ c'est à dire $a \ll cT$ alors on peut négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction .

Pour une évolution périodique l'ARQS est vérifiée si $a \ll \lambda$.

En électrocinétique par exemple pour $f \approx 100\, kHz$ alors $\lambda = \frac{3.10^8}{10^5} = 3000\, m$ l'ARQS vérifiée pour des montages tenant sur une table .

Cela se traduit par le fait que l'on ressent instantanément les variations de courant .

<u>Dans le cadre de l'ARQS magnétique les équations de Maxwell, en présence de courant, s'écrivent :</u>

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{rot}\, \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

div $(\vec{rot}\, \vec{B}) = 0$ d'où div $\vec{j} = 0$ d'où $\oiint_{(S)} \vec{j} \, . \vec{dS} = 0$ l'intensité est la même à travers toute section d'un tube de courant .

Le théorème d'Ampère est vérifié $\oint_{(C)} \vec{B} \, . \vec{dl} = \mu_0 I(t)$

On peut étendre les expressions des champs magnétiques et les méthodes de calculs de ceux-ci vues en régime stationnaire au cas de l'ARQS .

<u>Exemple :</u>

Champ à l'intérieur d'un solénoïde infini dans le cadre de l'ARQS $\vec{B}_i = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$.