Roue de Vélo

① On a : $I(O, \text{cylindre}) = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2).dm & -\cancel{\int x.y.dm} & -\cancel{\int x.z.dm} \\ & \int (x^2+z^2).dm & -\cancel{\int y.z.dm} \\ \text{SYM} & & \int (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Le cylindre possède : • une symétrie / au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$

• une infinité de symétrie /à des plans contenant l'axe $(O, \vec{z})$

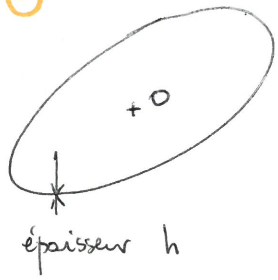
Le cylindre est donc invariant par rotat° autour de l'axe $(O, \vec{z})$.

On a donc :

$$\int_{M \in \text{cylindre}} (x^2 + z^2).dm = \int_{M \in \text{cylindre}} (y^2 + z^2).dm$$

La matrice sera donc de la forme : $\boxed{I(O, \text{cylindre}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}}$

②



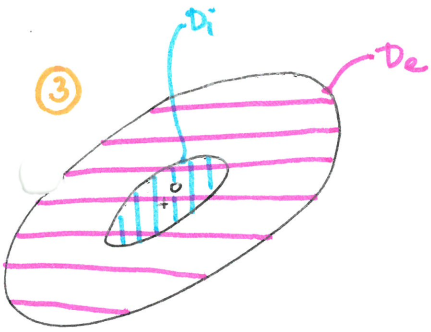
Compte-tenu des symétries, le centre d'inertie du disque est le centre du disque.

La masse est : $\boxed{m = \rho.\pi.r^2.h}$

Et : $I(O, \text{Disque}) = \frac{m}{12}.\begin{bmatrix} 3.r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.r^2 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$ car $h \ll r$

$$\boxed{I(O, \text{Disque}) = \frac{\rho.\pi.r^4.h}{4}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}}$$

③



La masse du disque creux est : $m_{D_c} = \rho.\pi.r_e^2.h - \rho.\pi.r_i^2.h$

$$\boxed{m_{D_c} = \rho.\pi.(r_e^2 - r_i^2).h}$$

On obtient également :

$$\boxed{I(O, O_c) = \frac{\rho \cdot \pi \cdot (r_e^4 - r_i^4) \cdot h}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}}$$

4 JANTE :

$$M_j = \rho_j \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot e_j$$

$$I(O, j) = \frac{1}{4} \cdot \rho_j \cdot \pi \cdot (r_e^4 - r_i^4) \cdot e_j \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

5 MOYEU :

$$M_m = \rho_m \cdot \pi \cdot r_m^2 \cdot e_m$$

$$I(O, m) = \frac{1}{4} \cdot \rho_m \cdot \pi \cdot r_m^4 \cdot e_m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

6 ROUE :

$$M_r = M_j + M_m \quad \text{et} \quad I(O, \text{roue}) = I(O, j) + I(O, m)$$

7 On ne peut modifier que le paramètre r_i. Pour minimiser M_r, il faut minimiser M_j et donc que $r_i \simeq r_e$. Cela correspond à une roue avec une faible hauteur de jante.

8 On veut rendre le moment d'inertie autour de l'axe $(O, \vec{z})$ le plus grand possible. Il faut donc $r_i \simeq r_m$, ce qui correspond à une roue pleine.

9 Le vainqueur a changé de vélo (début : roue pleine, fin : hauteur de jante moyenne) juste avant la dernière montée.