

Centre d'intérêt 1

Théorème de l'énergie cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

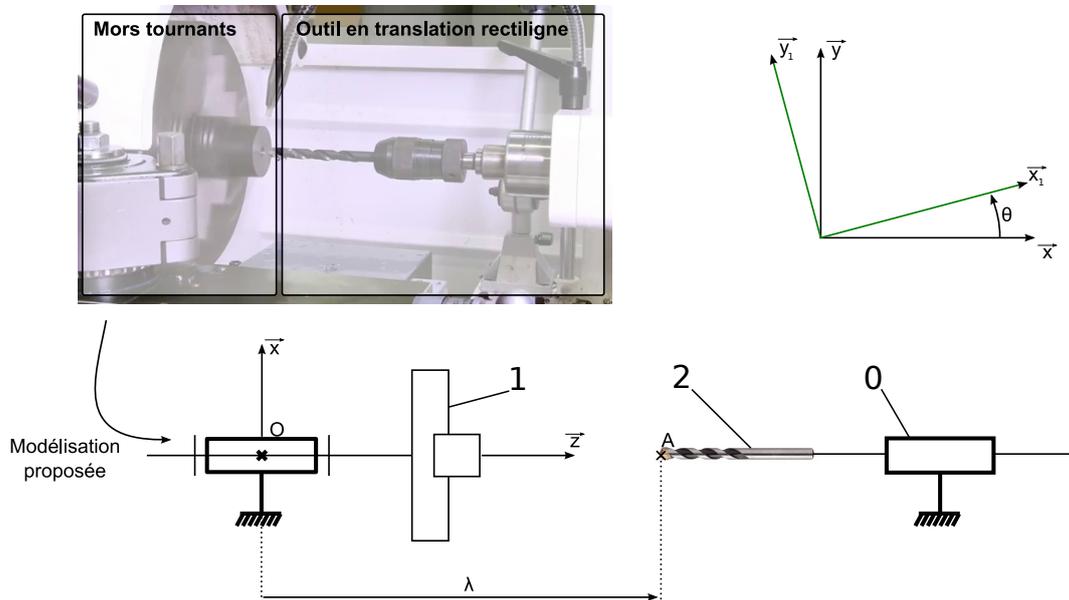
- Cours sur l'ensemble des notions de dynamique
- Cours sur le théorème de l'énergie cinétique

Objectifs

- Savoir déterminer une équation de mouvement en utilisant le théorème de l'énergie cinétique

1 Loi de commande pour une opération de perçage ★

On s'intéresse ici à une opération de perçage sur un tour. Ce tour peut se décomposer en deux sous-systèmes : la partie composée des mors (et de la pièce à usiner) notée 1 en rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) et la partie composée de l'outil notée 2 en translation suivant la direction \vec{z} . Le schéma cinématique du mécanisme est donné ci-dessous :



On suppose dans cette étude que l'outil n'est pas en contact avec la pièce à usiner.

Les actions mécaniques s'exerçant sur le système sont les suivantes :

- La liaison pivot est supposée présenter des frottements visqueux (coefficient de frottement visqueux k_p) et des frottements secs notés C_r .
- La liaison glissière est supposée présenter des frottements visqueux (coefficient de frottement visqueux k_g) et des frottements secs notés F_r .

- Deux moteurs permettent respectivement de mettre en rotation les mors et de mettre en translation l'outil :

$$\{0 \xrightarrow{\text{mot}} 1\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}^{\text{mot}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{0 \rightarrow 1}^O} = C_m \vec{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \{0 \xrightarrow{\text{mot}} 2\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 2}^{\text{mot}}} = F \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{0 \rightarrow 2}^O} = \vec{0} \end{cases}$$

On cherche à déterminer **les équations de mouvement du système**. L'équation du mouvement est une équation mathématique décrivant le mouvement d'un objet physique. En général, l'équation du mouvement comprend l'accélération de l'objet en fonction de sa position, de sa vitesse, de sa masse et de toutes variables affectant l'une de celle-ci.

On considère :

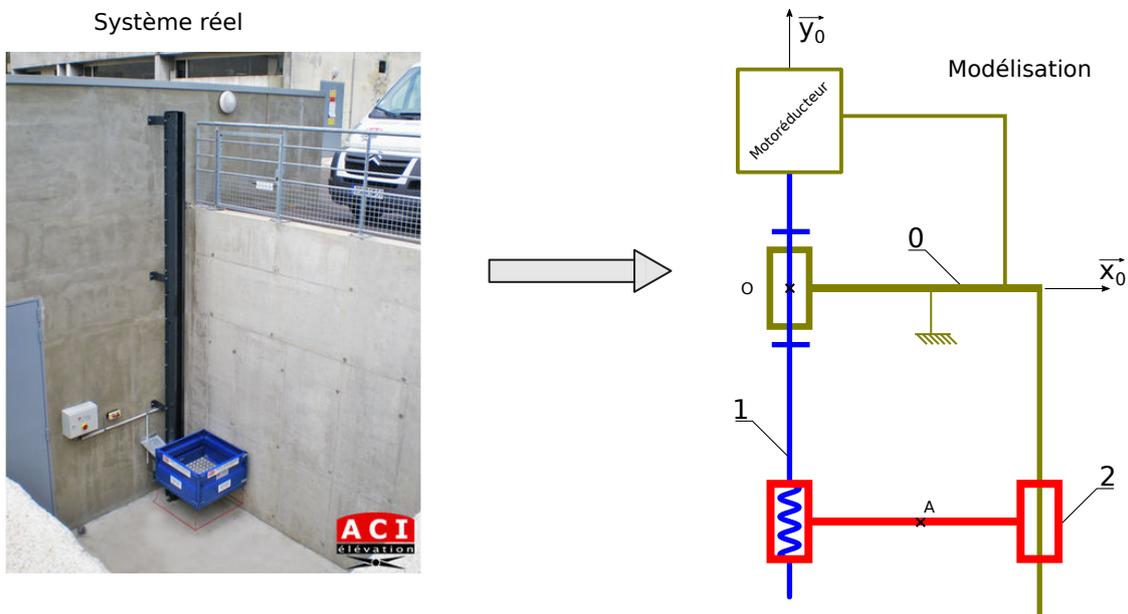
- Une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée au bâti, et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ une base liée à la pièce à usiner avec $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ et $\vec{z} = \vec{z}_1$.
- G_1 , le centre d'inertie de l'ensemble 1 = {mors + pièce}, tel que $\overrightarrow{OG_1} = L_1 \cdot \vec{z}$ où L_1 est une constante. On notera J_1 le moment d'inertie de 1 autour de l'axe (O, \vec{z}) et m_1 sa masse.
- G_2 , le centre d'inertie de l'outil, tel que $\overrightarrow{OG_2} = (L_2 + \lambda) \cdot \vec{z}$ où L_2 est une constante et λ une fonction du temps. On notera J_2 le moment d'inertie de l'outil autour de l'axe (O, \vec{z}) et m_2 sa masse.

Question 1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement de l'ensemble {mors + pièce}.

Question 2. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'équation de mouvement de l'outil.

2 Monte charge ★

Dans cet exercice, on s'intéresse au monte-charge présenté ci-dessous :



Les données sont les suivantes :

- La vis 1 ayant un pas à droite a pour masse $m_1 = 5.2$ kg et pour centre d'inertie G_1 (on considère que le centre d'inertie est sur l'axe de rotation). Son moment d'inertie autour de l'axe (O, \vec{y}_0) est I_1 .
- Le solide 2 a pour masse $m_2 = m_{\text{vide}} + m_{\text{ajout}}$ où $m_{\text{vide}} = 15$ kg et pour centre d'inertie A de telle sorte que $\overrightarrow{OA} = l_1 \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_0$.
- On définit la rotation de la vis par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ et on note $p = 5$ mm le pas de cette vis.

Un moteur fournit un couple moteur C_m à un réducteur dont la sortie est reliée à la pièce 1. Le rapport de réduction du réducteur est r où $r < 1$. On note également C_1 le couple en sortie du réducteur. On suppose que le rendement du réducteur est $\eta = 0,7$.

L'arbre du moteur, qui tourne à une vitesse de rotation ω_m , a un moment d'inertie I_m . Le réducteur a un moment d'inertie équivalent, noté I_r , ramené sur l'arbre moteur.

On suppose que toutes les liaisons peuvent être modélisées par des liaisons avec frottement visqueux.

- Le moteur ainsi que le réducteur présentent un frottement visqueux équivalent ramené sur l'arbre moteur. Le coefficient de frottement visqueux associé est f_m en N.m/(rad/s).
- Pour la liaison pivot entre 0 et 1, le coefficient de frottement visqueux associé est f_1 en N.m/(rad/s).
- Pour la liaison pivot glissant entre 0 et 2, on distingue le frottement lié au mouvement linéaire de 2 par rapport à 0 et celui lié à l'éventuel mouvement rotatif de 2 par rapport à 0. Le frottement "rotatif" est donné par le coefficient de frottement visqueux f_{r2} en N.m/(rad/s) et le frottement "linéaire" est lié au coefficient f_{t2} en N/(m/s).
- Concernant la liaison hélicoïdale, on suppose qu'une puissance est perdue dans la liaison, cette puissance perdue peut s'écrire $P_h = -f_h \dot{\theta}^2$

Question 1 : Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement Σ . En déduire le moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre moteur.

Question 2 : Donner l'équation de mouvement. On ne fera apparaître que le paramètre ω_m .

Question 3 : En faisant l'hypothèse d'un fonctionnement en statique, déterminer le couple C_1 nécessaire pour lever une charge de masse $m_{\text{ajout}} = 200$ kg.

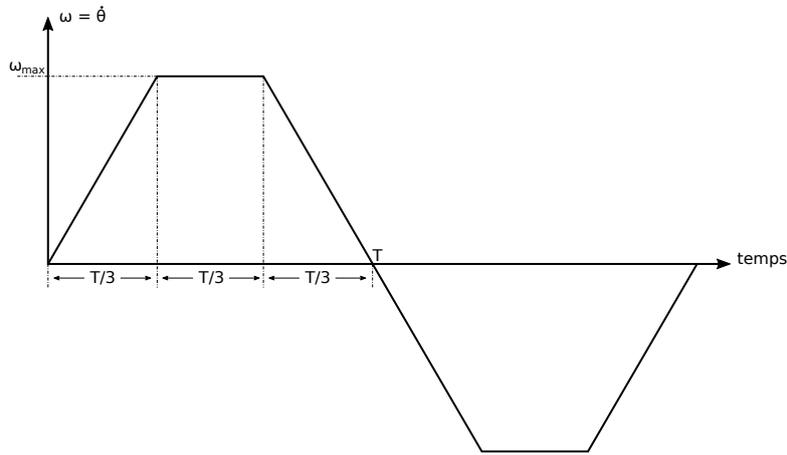
Question 4 : Proposez la(es) gamme(s) de motoréducteurs proposés par le fabricant FOCQUET (ci-dessous) et permettant de monter une charge de 200 kg (en statique).



Référence motoréducteur	Vitesse de rotation nominale (tr/min)*	Couple maximal (N.m)*
IE3-160L2HU	2950	2.3
IE3-160M4HU	1470	2.3
IE3-180L6HU	980	2.1

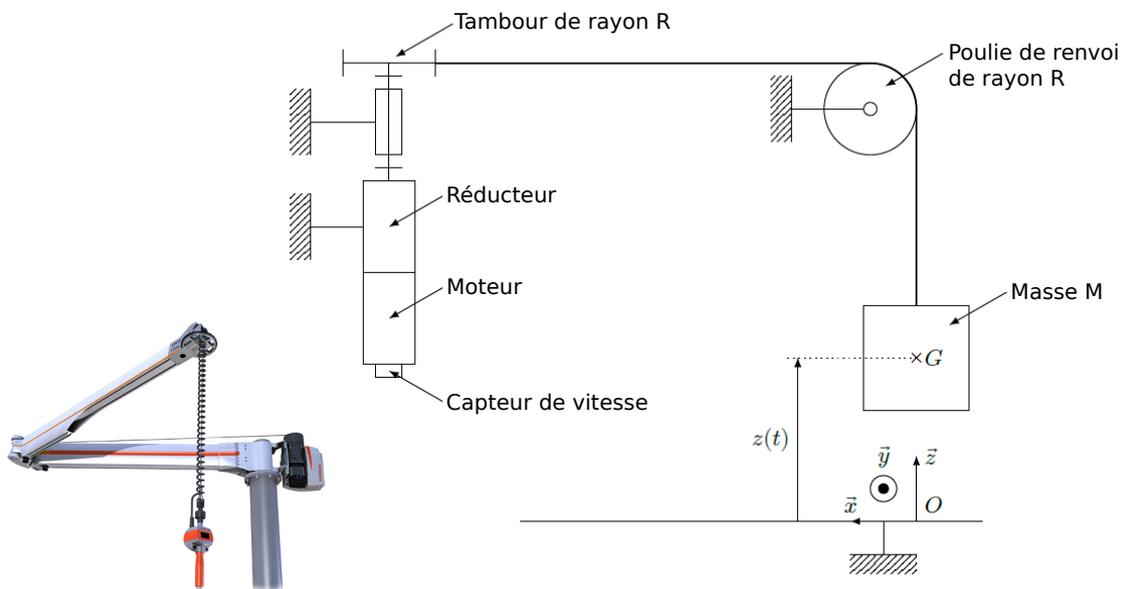
* : en sortie du motoréducteur

Concernant la vitesse de montée/descente, le cahier des charges impose un temps limite de 15 secondes pour un cycle montée puis descente. La course du chariot 2 est évaluée à 3 m. Une commande par un trapèze de vitesse équiréparti est privilégiée (voir figure ci-dessous).



Question 5 : Les motoréducteurs envisagés précédemment sont-ils compatibles vis-à-vis de la vitesse de rotation ?

3 Bras manipulateur collaboratif ZE Solution ★



Dans le contexte industriel actuel, il existe encore un grand nombre de tâches pénibles qui ne peuvent pas être automatisées et où le geste humain reste indispensable. L'introduction d'une assistance robotique peut alors être envisagée pour réduire les efforts que l'opérateur doit fournir et ainsi éviter l'occurrence de troubles musculo-squelettiques. Le bras collaboratif de l'entreprise sapelem, nommé ZE Solution, permet de manipuler intuitivement différents types de charges allant jusqu'à 200 kg « sans effort ». Afin de respecter la confidentialité de ce système, les données et résultats présentés dans ce sujet sont approchés et limitatifs par rapport à la solution industrielle réelle.

Paramétrage cinématique :

Grandeur	Notation	Valeur
Vitesse angulaire du moteur	$\omega_m(t)$	
Vitesse angulaire du tambour	$\omega_T(t)$	
Rayon du tambour et de la poulie de renvoi	R	$R = 0,05 \text{ m}$
Rapport de réduction du réducteur	$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega_T(t)}{\omega_m(t)}$	$\rho = 15,88$
Vitesse linéaire de la masse en translation	$v(t)\vec{z} = \dot{z}(t)\vec{z}$	

Paramétrage des actions mécaniques :

Grandeur	Notation	Valeur
Couple imposé par le stator du moteur brushless sur le rotor	$C_m(t) \vec{z}$	
Rendement du réducteur	η	0.9
Accélération de la pesanteur	$-g \vec{z}$	$g = 9,81 \text{ m.s}^2$

Paramétrage des masses et inerties :

Grandeur	Notation	Valeur
Masse entraînée	M de centre de gravité G	$M \leq 200 \text{ kg}$
Inertie de l'axe moteur autour de son axe de rotation	J_0	$J_0 = 0,0011 \text{ kg.m}^2$
Inertie du réducteur rapportée sur l'axe de rotation du moteur brushless	J_1	$J_1 = 0,00215 \text{ kg.m}^2$
Câble de levage		Masse et inertie négligées Câble inextensible
Inertie de la poulie de renvoi	J_p	$J_p = 0,02 \text{ kg.m}^2$
Inertie du tambour	J_T	$J_T = 0,02 \text{ kg.m}^2$

L'actionneur (moto-réducteur) choisi par le constructeur est l'association d'un moteur brushless et d'un réducteur, de référence "Moteur brushless 400V/0016". Le couple $C_m(t)$ fourni par le moteur brushless au réducteur vérifie la relation $C_m(t) = K_m i(t)$. Les caractéristiques du moto-réducteur sont les suivantes :



Caractéristiques	Valeur
Vitesse maximale du moteur en charge	6200 tr/min
Couple moteur nominal	3,15 N.m
Couple moteur maximal	10,8 N.m
Courant nominal	3,5 A
Courant maximal	12 A

Dans le cadre des hypothèses retenues, on pose $v(t) = K_{rigide} \omega_m(t)$ avec $K_{rigide} > 0$ par convention.

Question 1. Déterminer la valeur numérique de K_{rigide} . Vérifier que l'actionneur retenu permet de respecter l'exigence id 1.4.1 qui stipule que "le déplacement vertical de la charge doit se faire à une vitesse maximale de 2 m/s"

On souhaite déterminer l'équation du mouvement de l'axe du moteur brushless liant le couple $C_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

Question 2. Préciser le système isolé et les puissances mises en jeu en vue de déterminer l'équation de mouvement de l'axe du moteur brushless.

Question 3. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme $A \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - B$ et expliciter les constantes A et B en fonction des paramètres M , g , des inerties et K_{rigide} .

Question 4. Déterminer, en descente, l'accélération maximale qu'il est possible d'atteindre avec l'actionneur retenu pour une masse maximale $M = 200 \text{ kg}$.

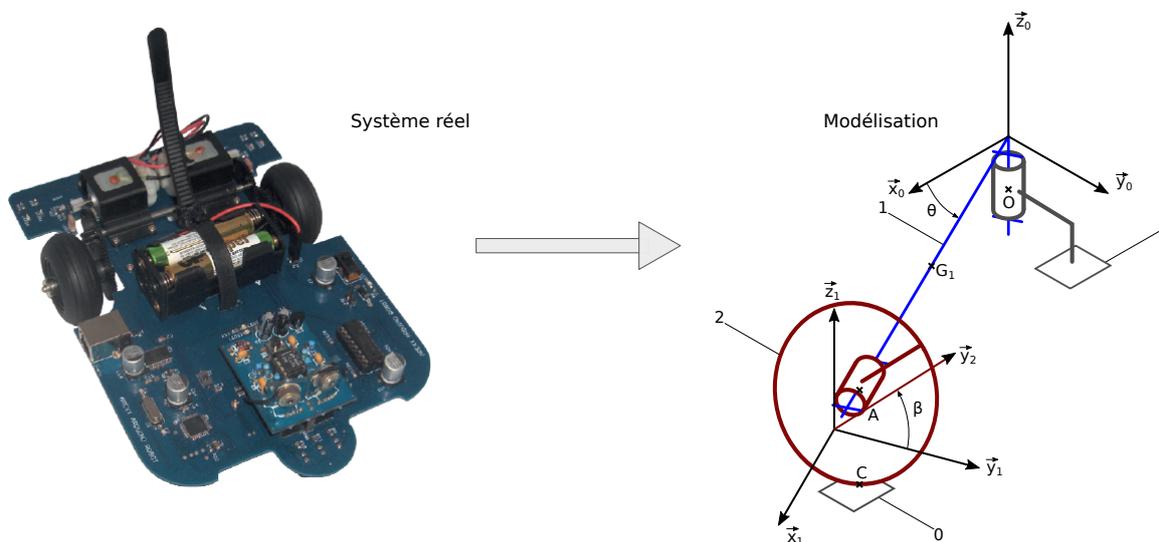
Le cahier des charges impose que la descente de la masse se fasse de telle sorte que l'accélération du point M vérifie

$$\|\vec{\Gamma}_{M/0}\| < g.$$

Question 5. Valider ou non la satisfaction de l'exigence ainsi définie. Quel est le problème si cette exigence n'est pas vérifiée ? Conclure en justifiant que le contrôle du courant $i(t)$ permettra de s'assurer de la satisfaction de cette exigence.

4 Programmation d'un robot ★

Dans cet exercice, on s'intéresse au robot présenté ci-dessous :



Les deux roues peuvent être commandées séparément. On se place dans le cas particulier où une seule roue est mise en rotation.

Les données sont les suivantes :

- Le solide lié au châssis du robot est référencé 1. Il a pour masse m_1 et pour centre d'inertie G_1 (on considère que le centre d'inertie est défini par $\vec{OG}_1 = \frac{l_3}{2}\vec{x}_1 + r\vec{z}_0$). Son moment d'inertie autour de l'axe (O, \vec{z}_0) est I_1 .
- Le solide 2 correspondant à la roue en rotation a pour masse m_2 et pour centre d'inertie A de telle sorte que $\vec{OC} = l_3\vec{x}_1$ et $\vec{CA} = r\vec{z}_0$. Sa matrice d'inertie est la suivante :

$$I_A(2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \dots, \dots)}$$

- Cette roue roule sans glisser sur le sol 0.
- On définit la rotation du châssis du robot par l'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. La rotation de la roue du robot est donné par l'angle $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

Un motoréducteur M_{12} fournit un couple C_{12} (en sortie du réducteur) sur la pièce 2, on aura donc :

$$\{1 \xrightarrow{mot} 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \xrightarrow{mot} 2} = \vec{0} \\ M_{1 \xrightarrow{mot} 2}^A = C_{12} \vec{x}_1 \end{cases}$$

Le réducteur a un rapport de réduction noté r_{red} . Le moteur génère un couple noté C_m et l'arbre moteur tourne à une vitesse ω_m . Le moment d'inertie de l'arbre moteur autour de son axe de rotation est noté I_m . Le moment d'inertie des pièces en mouvement du réducteur ramené à l'arbre moteur est noté I_r .

On suppose que l'ensemble des frottements dans le mécanisme peut se modéliser par un seul frottement visqueux équivalent ramené sur l'arbre moteur et caractérisé par son coefficient de frottement visqueux f en N.m/(rad/s).

Question 0 : Exprimer la condition de roulement sans glissement puis en déduire la relation qui lie $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$.

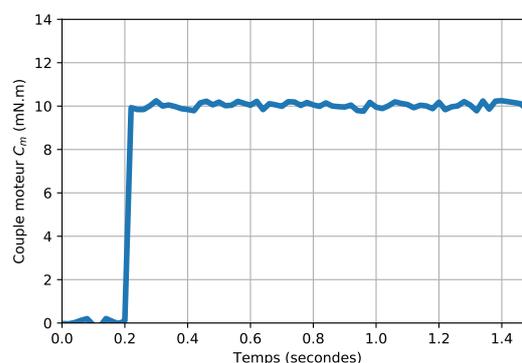
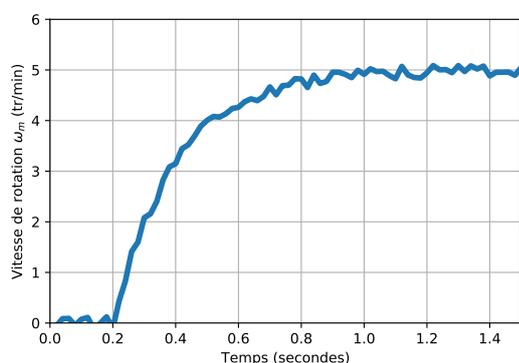
Question 1 : Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement noté Σ . En déduire le moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre moteur, noté J_{eq} .

Question 2 : Donner l'équation de mouvement. On ne fera apparaître que le paramètre ω_m .

On mesure lors d'un essai :

- la vitesse de rotation ω_m en fonction du temps ;
- le couple moteur C_m en fonction du temps.

Les résultats sont donnés ci-dessous :



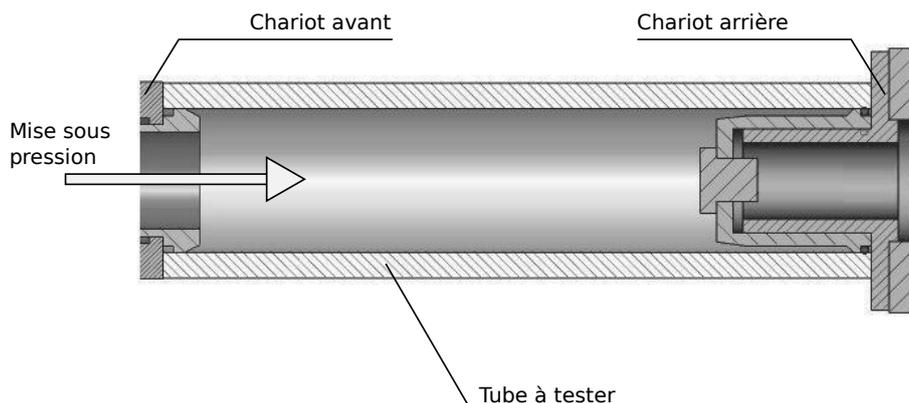
Question 3 : Identifier le moment d'inertie équivalent J_{eq} et le frottement équivalent f .

5 Banc d'épreuve hydraulique ★★

Vallourec & Mannesmann Tubes (V & M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

Pour les industries pétrolières ou nucléaires, où les problèmes de sécurité sont particulièrement importants, il arrive que les clients exigent la garantie de la tenue des tubes à un seuil de pression durant un temps donné.

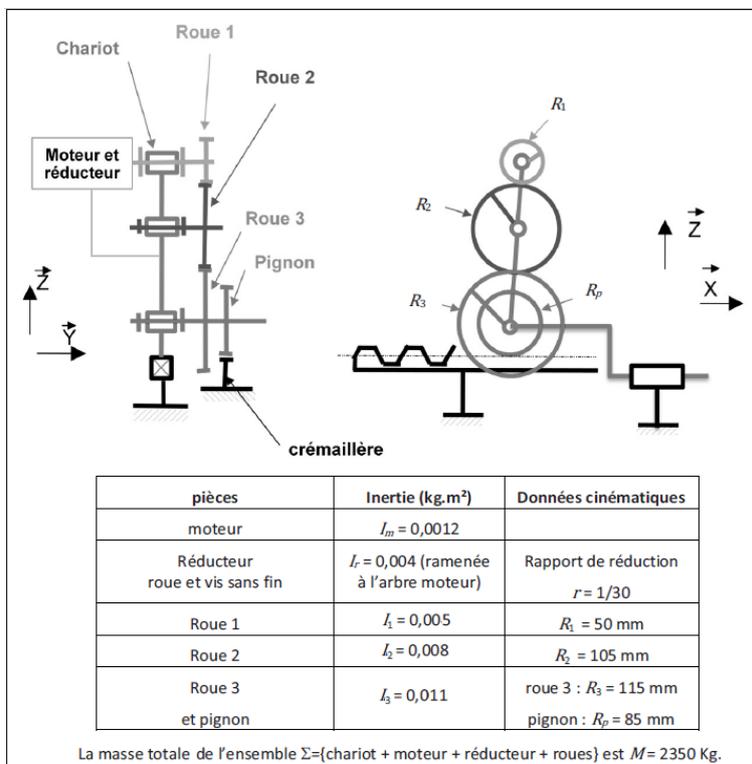
La figure ci-dessous présente le fonctionnement du banc hydraulique. Le tube est inséré entre le chariot avant et le chariot arrière. Le chariot avant est fixe. Le chariot arrière est, quant à lui, mobile et peut se translater dans la direction du tube. Il est donc possible de le déplacer pour qu'il s'adapte aux différentes longueurs des tubes. On s'intéressera particulièrement à la mise en mouvement de ce chariot arrière.



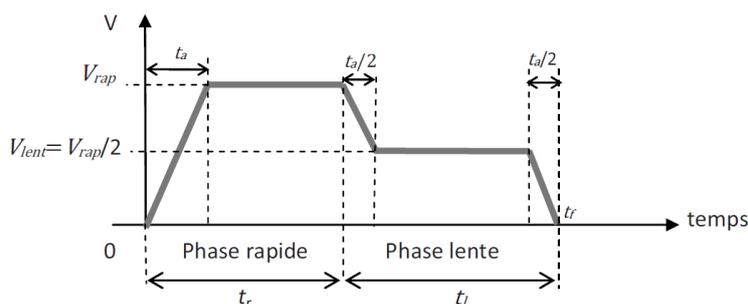
Un schéma cinématique simplifié du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques, sont donnés sur la figure ci-dessous.

La chaîne de puissance comporte un moteur hydraulique, un réducteur roue et vis sans fin, un réducteur à engrenages parallèles et un système pignon-crémaillère.

Le guidage du chariot est modélisé par une glissière.



On note C_m le couple moteur, ω_m sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et V la vitesse du chariot. La loi de vitesse du chariot pendant la totalité du trajet est présentée ci-dessous :



- On note t_r la durée de la phase de déplacement rapide, t_l la durée de la phase lente, t_f la durée totale, t_a la durée de la phase d'accélération. Chacune des 2 phases de décélération dure $t_a/2$.
- La course pendant la phase de déplacement en vitesse rapide (de 0 à t_r) est au maximum de $c_{rap} = 6,24$ m (pour le tube le plus court que peut tester le banc) et pendant la phase en vitesse lente (de t_r à t_f) $c_{len} = 1,56$ m.
- La durée maximale du déplacement total (phase rapide + phase lente) est limitée à 20 s.
- La vitesse du chariot, lors de la phase rapide, V_{rap} est limitée à 0,5 m/s.
- On considérera que le module de l'accélération a du chariot est identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

Question 1 - a : Montrer alors que t_a , t_l et t_r vérifient les relations suivantes :

$$c_{len} = \frac{V_{rap}}{2} t_l \qquad c_{rap} = V_{rap} \left(t_r - \frac{1}{2} t_a \right)$$

Question 1 - b : En déduire les valeurs numériques de t_a et de t_r . En déduire l'accélération a du chariot.

Question 2 - a : Déterminer ω_m en fonction de V et des données cinématiques utiles.

Question 2 - b : En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur ω_m et de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

Question 3 - a : Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ par rapport au référentiel galiléen bâti.

Question 3 - b : En déduire l'expression de l'inertie équivalente de cet ensemble ramenée à l'axe de sortie du moteur, notée J_{eq} . Faire l'application numérique.

- Les efforts résistants sur le chariot sont modélisés par un glisseur $F = 500$ N.
- Le rendement de l'ensemble du mécanisme (réducteur roue et vis sans fin, réducteur à axes parallèles) est $\eta = 0,3$.
- Quelles que soient les valeurs précédemment trouvées, on prendra une accélération angulaire maximale du moteur $\dot{\omega}_m$ égale à 250 rad/s^2 et une inertie totale équivalente ramenée à l'arbre moteur J_{eq} égale à $0,01 \text{ kg.m}^2$.

On se propose de déterminer le couple nécessaire du moteur.

Question 4 : Déterminer l'expression du couple C_m à fournir par le moteur en fonction de $\dot{\omega}_m$, J_{eq} et F . Calculer C_m .

Question 5 : À partir de la valeur de C_m et de la vitesse moteur ω_m calculées précédemment, choisir dans le tableau fourni ci-dessous un moteur compatible avec les spécifications demandées.



Référence	Cylindrée [cm ³]	N max [tours/min]	Couple max [Nm]	Puissance [kw]	Poids [kg]
HDMF11-05	4,88	12 000	7,8	13	5
HDMF11-14	14,3	10 000	22,7	26	9
HDMF11-19	19,0	7 500	30,2	32	11
HDMF11-150	150,0	3 000	238	145	70
HDMF11-250	242,0	2 700	384	190	77