DM sciences physiques 5/2 :

A_ Relation de dispersion :

1_ $\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$

$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On obtient donc l'équation : $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Pour une oppm dont le champ électrique s'écrit

$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}} \qquad \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$ d'où

$+k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{k}\| = \dfrac{\omega}{c}}$

Vitesse de phase = $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{\|\vec{k}\|} = c}$ cette vitesse est indépendante de ω $\Rightarrow$ le vide n'est pas dispersif.

2_ L'équation de propagation devient :

$\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ ce qui donne $k^2 = \dfrac{n^2\omega^2}{c^2}$

$\boxed{\|\vec{k}\| = n\dfrac{\omega}{c}} \qquad \boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{n}}$ comme n dépend de la longueur d'onde, le milieu est dispersif.

B – Coefficients de réflexion et de transmission :

3 – On écrit la continuité du champ électrique à la traversée du dioptre :

$$\forall x, \forall t; \quad \vec{\underline{E}}_i(x, z=0, t) + \vec{\underline{E}}_r(x, z=0, t) = \vec{\underline{E}}_t(x, z=0, t)$$

D'où $\quad E_0 e^{-j(\omega t - k_{ix} x)} + \underline{r} E_0 e^{-j(\omega t - k_{rx} x)} = \underline{t} E_0 e^{-j(\omega t - k_{tx} x)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^{j k_{ix} x} + \underline{r}\, e^{j k_{rx} x} = \underline{t}\, e^{j(k_{tx} x)}}$$

4 – La relation ci-dessus est vrai pour tout x cad notamment pour $x = 0$ d'où $\boxed{1 + \underline{r} = \underline{t}}$

5 – $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$

On sait que $\|\vec{k_i}\| = \|\vec{k_r}\| = n \frac{\omega}{c}$ et $\|\vec{k_t}\| = \frac{\omega}{c}$

Or $k_{ix} = \|\vec{k_i}\| \sin(i_1)$ $\quad k_{rx} = -\|\vec{k_r}\| \sin(i'_1)$ $\quad (i'_1 < 0)$

et $k_{tx} = \|\vec{k_t}\| \sin i_2$

Comme $k_{ix} = k_{rx}$ alors on en déduit : $\sin i_1 = -\sin i'_1$

$$\Rightarrow \underline{i'_1 = -i_1}$$

$k_{ix} = k_{tx} \Rightarrow \boxed{n \sin i_1 = \sin i_2}$

On retrouve les lois de Descartes.

6 – D'après les relations de structures on a :

$$\underline{\vec{B_i}} = \frac{\vec{k_i} \wedge \vec{E_i}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} k_{ix} \\ 0 \\ k_{iz} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E_i} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} -k_{iz} \underline{E_i} \\ 0 \\ k_{ix} \underline{E_i} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B_i}} = \frac{E_0}{\omega}\left(-k_{iz}\vec{e_x} + k_{ix}\vec{e_z}\right)e^{-j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})}}$$

De même :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\vec{B_r}} &= \frac{\underline{r} E_0}{\omega}\left(k_{rz}\vec{e_x} + k_{rx}\vec{e_z}\right)e^{-j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})} \\ \underline{\vec{B_t}} &= \frac{\underline{t} E_0}{\omega}\left(-k_{tz}\vec{e_x} + k_{tx}\vec{e_z}\right)e^{-j(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r})} \end{aligned}}$$

La relation de continuité du champ magnétique en $z=0$ projetée sur l'axe des x donne :

$$\forall x, \quad -k_{iz}\, e^{j k_{ix} x} + \underline{r}\, k_{rz}\, e^{j k_{rx} x} = -k_{tz}\, \underline{t}\, e^{j k_{tx} x}$$

D'où $\quad k_{iz} - \underline{r}\, k_{rz} = +k_{tz}\, \underline{t}$

Or $\|\vec{k_i}\| = \|\vec{k_r}\|$ et $k_{ix} = k_{rx}$ d'où $k_{iz} = +k_{rz}$
(d'après les notations choisies pour exprimer $\vec{k_i}$ et $\vec{k_r}$)

$$\Rightarrow \quad 1 - \underline{r} = +\frac{k_{tz}}{k_{iz}} = +\nu\, \underline{t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1 - \underline{r} = +\nu\, \underline{t}}$$

7 – $\boxed{\vec{k_i} = n k_0 \left(\sin i_1\, \vec{e_x} + \cos i_1\, \vec{e_z}\right)}$

8 – $\|\vec{k_t}\|^2 = k_0^2 = k_{tx}^2 + k_{tz}^2$

or $k_{tx} = k_{ix} = n k_0 \sin i_1$

$$\boxed{k_{tz}^2 = k_0^2 \left(1 - n^2 \sin^2 i_1\right)}$$

Si $n \sin i_1 < 1 \Rightarrow$ $\boxed{k_{tz} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}}$

Si $n \sin i_1 > 1 \Rightarrow$ $\boxed{k_{tz} = \pm j k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$

Si $n \sin i_1 < 1$:

$$\boxed{\vec{E_t} = \underline{t} E_0 e^{-j\left(\omega t - n k_0 \sin i_1 x - k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}\, z\right)} \vec{e_y}}$$

L'onde est progressive et se propage dans le demi-espace $z > 0$.

Si $n \sin i_1 > 0$:

$$\boxed{\vec{E_t} = \underline{t} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\left(\omega t - n k_0 \sin i_1 x\right)} \vec{e_y}}$$

Avec $\boxed{\delta = \dfrac{1}{k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}} = \dfrac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}}$

L'onde ne se propage que dans la direction $\vec{e_x}$ et s'atténue selon la direction z au fur et à mesure qu'on s'éloigne du dioptre.

9 – Si $n \sin i_1 > 0$ on obtient une onde progressive évanescente.

$\vec{k_t} = k_{tx} \vec{e_x} - j k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}\, \vec{e_z}$

D'après la relation de structure

$\underline{\vec{B_t}} = \dfrac{\vec{k_t} \wedge \vec{E_t}}{\omega}$ avec $\vec{E_t}$ selon $\vec{e_y}$

$\vec{B_t} = B_{tx}\,\vec{e_x} + B_{tz}\,\vec{e_z}$ $\quad \vec{E_t} = E_t\,\vec{e_x}$ $\Big)$ En notation réelle

B_{tx} est en quadrature avec E_t

B_{tz} est en phase avec E_t.

$$\vec{\Pi_t} = \frac{\vec{E_t} \wedge \vec{B_t}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} 0 \\ E_t \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_{tx} \\ 0 \\ B_{tz} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} E_t B_{tz} \\ 0 \\ -E_t B_{tx} \end{vmatrix}$$

E_t et B_{tx} étant en quadrature $\langle E_t B_{tx} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle$ n'aura pas de composante selon $\vec{e_z}$ $\Rightarrow$ pas de puissance en moyenne propagée dans la direction $\vec{e_z}$.

Ceci est cohérent avec le fait que la propagation a lieu uniquement dans la direction $\vec{e_x}$.